LEZIONI ELEMENTARI DI MATEMATICHE

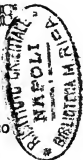
DEL SIG. ABATE

MARIE

Tradotte dal Francese

DA STANISLAO CANOVAI E GAETANO DEL-RICCO
DELLE SCUOLE PIE
Pubblici Professori di Fisica-Matematica.

QUARTA EDIZIONE

Arricchita di nuove Illustrazioni ed Aggiunte.

IN FIRENZE MDCCXCVI.

PRESSO PIETRO ALLEGRINI ALLA CROCE ROSSA

A Spese di Giovacchino Pagani. Con Approvazione.

PREFAZIONE

NElla penuria di Libri Matematici che potessero dirsi compiutamente elementari, cioè che senza esser troppo diffusi e troppo spinosi contenessero tutti i semi della sublime Analisi e spargessero di tanto in tanto dei lampi di quella luce infinita che fa poi vedersi a chi prosegue il viaggio, noi stimammo di non poter meglio profittare dei replicati incoraggimenti e della Beneficenza del Protettor generoso delle Lettere e dei Talenti, l' AUGUSTO LEOPOLDO II., quanto col presentare agli Studiosi tre successive Edizioni di questo Libro prezioso, ove si trova tutto ciò che può mettergli in grado di far prontamente i più gran passi nelle Matematiche. In sedici anni di esperienza ci siamo col fatto stesso convinti che un Giovane ben determinato per questo studio e ben diretto nella sua carriera, non vi incontra quelle difficoltà che taluno, forse poco pratico, ha rilevate: ne abbiamo avuta sotto gli occhi la riprova più decisiva nell' Auguste Persone del NOSTRO REAL SOVRANO e dei REALI PRINCIPI DI TOSCANA, che unendo gli Studj gravi e profondi a quanto può mai prescrivere di pellegrino e di raro un'

egregia Educazione, scelsero quest' Opera per Loro guida nelle Scienze sublimi, e vi fecero ben presto quei luminosi progressi che Li resero l' ammirazione di tutti, e che dovrebbero servir d' esempio alla Gioventù de' nostri tempi.

Il rapido esito del Libro e le incessanti richieste ci hanno impegnati ad una quarta Edizione. Vi si troveranno varj miglioramenti, molte utili aggiunte e molte nuove illustrazioni con cui abbiamo in infiniti luoghi appianata la strada ai Principianti, moderando i salti di calcolo talor troppo arditi, e aggiungendo a certe operazioni la ragione di cui mancavano: senza contare o i piccoli Trattati delle Variazioni e dell' Equazioni a Differenze Finite e a Differenze Parziali, da noi composti per compiacere altrui; o i Problemi d' Algebra, di Geometrìa, di Trigonometrìa e di Calcolo Infinitesimale che abbiamo sparsi quà e là per esercizio.

Chi getterà lo sguardo su questo Libro sentirà ben presto la necessità delle Tavole Trigonometriche e di molte altre, relative alla prontezza e facilità di calcolare: troverà ancora che l' Opera comprende le sole Matematiche teoriche, e desidererà di vederne l' applicazione alla Pratica. Quanto al primo, soddisfacemmo in parte al bisogno coll' accurata Edizione delle celebri Tavole di Gardiner, che escono ora una seconda volta, e in parte colle quattro Tavole da noi calcolate

e poste al fine di quest' Opera. Quanto al secondo, già pubblicammo un Corso Fisico-Matematico che fa vedere le più utili e più belle Applicazioni Elementari di queste Teorìe, il quale presto si riprodurrà con molti utili cangiamenti.

Intanto a queste Teorìe rivolgano i nostri Giovani i lor pensieri. Il dotto Autore scrisse in piccol carattere *ciò che gli sembrò men facile; onde per apprendere i soli primi Elementi delle Matematiche, basterà impossessarsi di quei precetti che sono esposti in* carattere maggiore: *ma volendo andar più oltre, bisognerà* primieramente studiare quanto è contenuto nel maggior carattere, e ripigliar poi in un secondo studio tutto il filo delle Lezioni.

Noi speriamo che gli Studiosi nell' osservar le scoperte mirabili dei più grandi ingegni che abbia avuti la Terra, di un Newton, di un Leibnitz, dei due Bernoulli, di un Eulero ec., concepiranno in parte i vantaggi di una Scienza che può chiamarsi l' apice dell' umano sapere, e che quand' anche non sia sempre per renderli dei Professori di Matematica, li renderà però sempre dei savj Metafisici e dei buoni Ragionatori, abituandogli al diritto discorso, all' acutezza delle riflessioni, allo spirito d' invenzione, e a tutto ciò che distingue nella Società l' uomo profondo e penetrante dall' uomo incoerente e superficiale.

INDICE

DELLE LEZIONI ELEMENTARI DI MATEMATICHE.

Pag.	Vers.	ERRORI	CORREZIONI
22.	5.	$\frac{BN^{(m)}}{A}$	$BN^{(m)}$
26.	10.	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$
29.	34.	IV.	80. IV.
35.	27.	inferioriori . . .	inferiori
55.	26.	$\mp p(y \mp \frac{p}{3y})$ . . .	$\mp p(y \pm \frac{p}{3y})$
69.	11.	$c^2 \pm \frac{x^2}{2c}$	$c \pm \frac{x^2}{2c}$
98.	16.	somma differenza .	somma o differenza
135.	1.	numeso	numero
136.	26.	*infinità*	*infinità*
141.	1.	radici sorde e . .	radici sorde di secondo grado e
142.	33.	(476 . LX)	(476 . XLVI)
149.	11.	± 46	$\pm\sqrt{46}$
152.	6.	siochè	sicchè
154.	29.	$\pm f$	f
160.	27.	b negativo . . .	b positivo o negativo
166.	*ult.*	ex^2	ex^3
200.	7.	Si proverà ec. . .	*si tolgano questo e i seguenti tre versi*.
295.	26	FMO	FMO = HO
296.	16.	$\beta = 2MTP = 2\varphi$.	$\beta = 2\varphi$
315.	1.	$r - x : y :: r : tang\, u$	$r - x : y :: r : r\, tang\, u :: 1 : tang\, u$ [mutando il calcolo della Quadratrice qui e a pag. 350 relativamente a questa correzione; e osservando (pag. preced.) che AB (u) diventa ru, ed ABE (c) diventa rc].
367.	23.	$\int x^{10} dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (-$ec	$\int x^{10} dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{\frac{3}{2}} (-$ ec.
ivi	*ult.*	$+ \frac{9 . 7 . ec.}{12 . 10 \; ec.}$ . .	$- \frac{9 . 7 . ec.}{12 . 10 . ec.}$
371.	18.	z^n	z^2
373.	12.	$\int dz (z^2 + 1)_{-1}$.	$\int dz (z^2 + 1)^{-1}$
378.	6.	e n	se n
382.	20.	$l \sec y$	$l \sec y$
394.	1.	$\frac{9y}{4a})^{\frac{1}{2}}$	$\frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}}$
399.	11.	2C) − lC'] . . .	2C)] − lC'
417.	19.	$y = c^m$	$y = c$
421.	11.	$\frac{C\; g^n - ec.}{-2\omega (a^n - ec.)}$ . .	$\frac{C (g^n - ec.}{a^n - ec.}$
XLIX.	49.	1560601	1560001

LEZIONI
ELEMENTARI
DI MATEMATICHE.

1. Ciò che può crescere o scemare si chiama *Quantità:* i numeri, l'estensione, il moto ec. son quantità.

2. Le *Matematiche* comprendon tutte le Scienze che trattano delle proprietà e rapporti di queste quantità: ma ciascuna Scienza ha un nome particolare secondo l'oggetto che ella contempla. Si chiama *Aritmetica* la Scienza dei numeri; *Geometrìa* la Scienza che misura e paragona le tre dimensioni dell'estensione, lunghezza, larghezza e profondità: *Meccanica* la Scienza del moto e dell'equilibrio ec.

3. L'Aritmetica è il fondamento di tutte le Matematiche: bisogna dunque cominciar questo studio da lei che è inoltre di tanto uso nella Società.

4. Si distinguono due specie di Aritmetica: l'ordinaria che ha per oggetto il calcolo de'numeri, e l'*Algebra* che abbraccia il calcolo e i rapporti d'ogni specie di quantità.

ELEMENTI DI ARITMETICA.

5. È inutile definir l'*Unità* e la *Pluralità*: tutti ne hanno un'idea distinta.

6. Ma essendo ogni pluralità il risultato di unità particolari, per distinguere una pluralità dall'altra s'immaginò il *Numero*, che significa la riunione di molte unità. Così tre, sei, venti uomini riuniti, doveano essere espressi con numeri o segni differenti; e poichè posson concepirsi infiniti uomini, parea necessaria per esprimergli un'infinità di segni.

7. Ma la lor moltitudine avrebbe oppressa la memoria, e scoraggiti i più intrepidi Calcolatori. Perciò tutti i numeri si espressero ingegnosamente con la combinazione delle dieci *Cifre* sì note:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
zero,	uno,	due,	tre,	quattro,	cinque,	sei,	sette,	otto,	nove.

8. La prima nulla significa quando è sola; ma collocata a destra d'un'altra cifra, le dà per convenzione un valore dieci volte più grande; così per esprimer *dieci*, o *l'unità di diecina*, si scrive 10; per esprimer *venti* si scrive 20; e *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta* si scrivono 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. *Ogni altra cifra*, come lo zero, *collocata a destra d'un'altra*, *la rende dieci volte più grande*. Un 5, un 4 e un 6 collocati così „ 546 „ son dunque l'espressione del numero *cinquecento quaranta sei* ec.

9. Tre cifre disposte l'una dopo l'altra, forman la *classe* delle *unità*: tre altre poste in diritto alla sinistra di queste così „ 921546 „ forman la classe delle *migliaja*, e si pronunziano „ *novecento vent' un mila*, *cinquecento quaranta sei* „: quindi seguon pure a sinistra le classi dei *milioni*, delle *migliaja di milioni*, dei *bilioni*, delle *migliaja di bilioni*, dei *trilioni*, delle *migliaja di trilioni* ec., e si vede che delle tre cifre d'ogni classe l'una a destra

contiene *unità*, l'altra *diecine*, l'ultima *centinaja*, tutte le quali son *semplici* nella prima classe, *di migliaja* nella seconda, *di milioni* nella terza ec. Onde il numero 1 030 010 000 125 812 600 003 diviso in classi si leggerà: *mille trenta trilioni, diecimila bilioni, cento venti cinque mila ottocento dodici milioni, seicento mila, tre*; e il numero *sei trilioni, due mila milioni, sette* dividendolo in classi si scriverà: 6 000 000 002 000 000 007; ed è facile dopo ciò di *pronunziar qualunque numero scritto in cifre, e di scrivere in cifre qualunque numero pronunziato*.

10. Con queste nozioni e con l'uso del Binomio di Nevvton si trova 1°. che l'espression generale d'un numero intero qualunque della volgare Aritmetica è $10^m a + 10^{m-1} b + 10^{m-2} c + 10^{m-3} d +$ ec. $+ z$, ove a, b, c ec. esprimono una qualunque delle dieci cifre primitive, ed m un qualunque numero intero positivo: 2°. che una potenza m di 10 diminuita di 1, è sempre un multiplo di 9: 3°. che le potenze pari ed impari di 10, quelle diminuite e queste accresciute di 1, son sempre un multiplo d'11.

11. I numeri si dividono in *interi* e *rotti*. I primi sono unità, ciascuna delle quali è un tutto, come due uomini, sette, mille ec.; gli altri sono unità, ciascuna delle quali non è un tutto ma parte d'un tutto, come due terzi di lega, sette ventesimi ec.

12. I numeri e tutte l'altre quantità si dividono anche in *razionali* ed *irrazionali* che già si son definite (162); in *reali* ed *immaginarie* pur definite (202. 204); in *algebriche*, le quali derivano dalle volgari operazioni dell'Algebra, somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, innalzamento alle potenze, estrazion delle radici, risoluzion dell'equazioni ec.; e in *trascendenti*, che nascon da operazioni più sublimi, e son composte di logaritmi, di seni, d'archi, d'esponenti variabili, di differenziali, d'integrali ec. Osserveremo a tal proposito 1°. che tra due numeri p, q razionali e comunque contigui vi è un'infinità d'altri numeri razionali evidentemente espressi da $p + \frac{q-p}{m^r}$ o da $q - \frac{q+p}{m^r}$ ove m, r son numeri interi qualunque: 2°. che perciò può sempre aversi una quantità razionale inassegnabilmente diversa da una data irrazionale o trascendente, la quale sarà dunque un limite della razionale (999).

13. Del resto l'Aritmetica o aumenta i numeri, il che si chiama *somma*, o gli diminuisce, il che diccsi *sottrazione*: da queste due dipendono tutte l'operazioni sui numeri. Cominciamo dagl'interi.

Somma.

14. Non vi è difficoltà per *sommare* o raccogliere insieme dei numeri *semplici* o che non passan 10: così 5, 7, 4 sommati fanno 16, e per abbreviare il discorso, si scrive $5+7+4=16$. Il segno $+$, destinato alla somma, si pronunzia *più*; il segno $=$ significa egualità e si pronunzia *eguale*.

15. Se i numeri da sommarsi son *composti*, per esempio se si cerchi la somma di 432 e di 363, ecco la regola: 1°. *scrivo questi numeri l'un sotto l'altro, onde le unità siano sotto le unità, le diecine sotto le diecine, le centinaja sotto le centinaja ec.* 2°. *tiro una linea al di sotto, e andando da destra a sinistra, prendo la somma delle unità; se ella non passa 9, la scrivo sotto la colonna delle unità: se passa 9, scrivo le unità e serbo le diecine per aggiungerle alla colonna seguente:* 3°. *prendo nel modo stesso la somma delle diecine, delle centinaja ec., e la scrivo sotto alle colonne corrispondenti.* Così nella prima colonna dico $2+3=5$; scrivo 5 al di sotto: nella seconda, $3+6=9$; pongo 9: nella terza, $4+3=7$; scrivo 7: la somma cercata è 795. Ma se debbo sommar tre numeri, 6078, 9198, 483, gli scrivo l'un sotto l'altro secondo la regola, e dico: $8+8+3=19$ o sia una diecina e 9 unità; scrivo 9 sotto la colonna dell'unità, e tengo la diecina per la seguente. Dico poi: $1,+7+9+8=25$; scrivo 5 sotto la seconda colonna e tenute le due diecine per la seguente, dico:

$$\begin{array}{r} 432 \\ \underline{363} \\ 795 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6078 \\ 9198 \\ \underline{483} \\ 15759 \end{array}$$

$2, +0+1+4=7$, e pongo 7; finalmente dico: $6+9=15$, e perchè questa è l'ultima colonna, scrivo 15 tutto di seguito: la somma è 15759.

16. Per infallibile che sia questa regola, non di rado vi si sbaglia. Si rifaccia dunque l'operazione prendendo la somma delle colonne di basso in alto; se si operò bene, deve tornar la stessa. Ma bisogna abituarsi a ben separar le colonne, a ben formar le cifre, e a non dimenticar di aggiungere alla colonna seguente ciò che si ritenne nella precedente: da tali trascuratezze nascon talvolta gli sbagli.

Sottrazione.

17. La sottrazione fa trovar la *differenza* di due quantità date, cioè il resto di una di esse quando se ne è tolta l'altra. Nei numeri semplici si trova senza calcolo. Per esempio, togliendo 2 da 5 riman 3, differenza fra 2 e 5. Questa operazione si esprime così: $5-2=3$ (il segno $-$ significa *meno*).

18. Ecco la regola dei numeri composti. *Metto il più piccol numero sotto al più grande come nel sommare, e tiro una linea; scrivo poi sotto ciascuna colonna gli eccessi dell'unità, diecine, centinaja ec. del numero superiore sull'unità, diecine, centinaja ec. dell'inferiore, e ho la differenza fra i due numeri.* Così per sottrarre 243 da 695, gli scrivo come vedete, e dico: $5-3=2$ che pongo sotto la colonna delle unità: $9-4=5$ che scrivo tra le diecine: $6-2=4$, che pongo tra le centinaja: la differenza cercata è dunque 452. Infatti prendendo tutte le differenze parziali, si deve aver la differenza totale.

$$\begin{array}{r} 695 \\ \underline{243} \\ 452 \end{array}$$

19. *Allorchè la cifra inferiore è più grande del-*

la superiore, aggiungo a questa una diecina presa dalla cifra che le sta accanto a sinistra: poi dalla cifra superiore così aumentata sottraggo l'inferiore e scrivo l'eccesso: manca perciò un' unità alla cifra superiore che segue. Così per sottrar 38 da 64, dico: $4-8$ non si può: stacco un'unità dal 6 e la trasporto alla colonna delle unità semplici dove ella val 10, e aggiungendo queste 10 unità alle 4 altre, dico $14-8=6$: poi $5-3=2$: la differenza è 26.

20. Se la cifra che segue a sinistra sia zero, o s'egli stesso sia seguito da altri zeri, si anderà indietro fino alla cifra da cui può staccarsi un'unità. La decomposizione di quest'unità *cangia in tanti 9 gli zeri precedenti*, e resta una diecina che aggiungo alla cifra che è più piccola dell'inferiore. Per sottrar 18 da 200 dico: $0-8$ non si può; l'unità staccata dal 2 si decompone in dieci diecine, se ne lascian 9 in luogo del secondo zero, e la decima posta in luogo del primo, rende possibile la sottrazione, e dico: $10-8=2$; $9-1=8$; $1-0=1$; onde resta 182. Così per sottrarre 1296 da 3000, dirò: $0-6$ non si può; dunque: $10-6=4$; $9-9=0$; $9-2=7$; $2-1=1$; onde resta 1704.

$$\begin{array}{r} 200 \\ 18 \\ \hline 182 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3000 \\ 1296 \\ \hline 1704 \end{array}$$

21. La sottrazione si fa anche in un altro modo che useremo nella divisione. Per sottrarre 2964 da 4571 si dirà: dalla cifra inferiore 4 non può andarsi alla superiore 1 che è più piccola, ma andando a 11, la differenza è 7 che scrivo, e porto 1 perchè sono andato a 11: parimente da $6+1(=7)$ andando a 7, la differenza è 0 che scrivo: quindi

$$\begin{array}{r} 4571 \\ 2964 \\ \hline 1607 \end{array}$$

da 9 non può andarsi a 5, ma andando a 15, la differenza è 6 che scrivo, e porto 1: infine da 2, + 1 (= 3) andando a 4, la differenza è 1 che scrivo; e il resto totale è 1607.

22. Per verificar la sottrazione *sommo il resto col minor numero, e se la somma eguaglia il maggiore, l'operazione è ben fatta*; poichè un tutto deve eguagliar le sue parti prese insieme.

Moltiplicazione.

23. La moltiplicazione fa trovar senza gran calcolo la somma di un numero che si vuol prender più volte. Così per trovar la somma di 12 preso 9 volte, invece di sommar 9 volte il 12, il che sarebbe assai lungo, si moltiplica e si trova in un tratto che la somma è 108.

24. In quest'esempio, 12 si chiama *il Moltiplicando*, 9 *il Moltiplicatore* e 108 *il Prodotto:* in generale il moltiplicando e il moltiplicatore si chiamano le *radici* o i *fattori* del prodotto.

25. Se in luogo di sommar nove 12 si sommino dodici 9, verrà la stessa somma 108; onde *preso ad arbitrio l'un de' due numeri per moltiplicando, l'altro sarà il moltiplicatore, e il prodotto non varierà.*

26. Se i numeri son semplici, si vede facilmente che, per esempio, il prodotto di 2 moltiplicato per 3 è 6, il che si esprime così: 2×3 ovvero $2.3 = 6$ (il segno $\times$ o il punto messo tra due numeri significa *moltiplicato per*); così $3 \times 4 = 12$; $7 \cdot 5 = 35$ ec. Imparati perciò i prodotti di tutte le combinazioni dei numeri semplici a due a due da $2 \times 2 = 4$ fino a $9 \times 9 = 81$, si moltiplicano prontamente i composti.

27. Per moltiplicare i numeri composti co-

me 32 per 24, 1°. *pongo il moltiplicatore* (questo è per lo più il minore) *sotto il moltiplicando e tiro una linea*: 2°. *scrivo da destra a sinistra il prodotto di ciascuna cifra del moltiplicando per ciascuna del moltiplicatore*; così dico: 2×4 =8, scrivo 8; 3×4=12, scrivo 12; poi *scrivo pur da destra a sinistra* (*cominciando dalla colonna delle diecine*) *il prodotto del moltiplicando per le diecine del moltiplicatore*, e dico: 2×2=4, scrivo 4 sotto le diecine; 3×2=6, scrivo 6 a sinistra; 3°. *sommo questi due prodotti parziali*, e il prodotto totale è 768.

```
  32
  24
 ---
 128
 64
 ---
 768
```

28. Infatti moltiplicar 32 per 24 significa sommare il 32 quattro volte e due diecine di volte (23): ma sommandolo quattro volte vengono 8 unità, 2 diecine, 1 centinajo; e sommandolo due diecine di volte vengono 4 diecine e 6 centinaja; dunque poichè l'unità, le diecine ec. debbon collocarsi nelle loro respettive colonne (15), scrivendo i prodotti parziali con la regola data, si otterrà il vero prodotto totale.

Debba moltiplicarsi 564 per 249. Scritti i due numeri l'un sotto l'altro, moltiplico tutto il 564 per le 9 unità del moltiplicatore, e dico: 4×9=36, scrivo 6 e porto 3: 6×9=54 e (a cagione del 3 che porto) 54+3=57; scrivo 7 e porto 5: 5×9=45, +5=50, scrivo tutto il 50 perchè la moltiplicazione per la prima cifra è finita. Passo alle 4 diecine del moltiplicatore per le quali moltiplico 564 dicendo 4×4=16; scrivo 6 tra le diecine e porto 1: 6×4=24, +1=25; scrivo 5 e porto 2: 5×4=20, +2=22; scrivo 22. Infine

```
   564
   249
  ------
  5076
 2256
1128
------
140436
```

moltiplico 564 per le 2 centinaja del moltiplicatore dicendo: $4 \times 2 = 8$; scrivo 8 tra le centinaja: $6 \times 2 = 12$; scrivo 2 e porto 1: $5 \times 2 = 10, + 1 = 11$; scrivo 11. Il prodotto totale è 140436.

29. Quando vi è uno o più zeri al fine dell' uno o dei due fattori, si moltiplican l'altre cifre solamente, aggiungendo al prodotto tutti gli zeri tralasciati: così per moltiplicar 120 per 120 si dirà: $12 \times 12 = 144$ e si avrà per prodotto 14400: del pari $406000 \times 10700 = 4344200000$.

Per conoscer se la moltiplicazione è ben fatta si può prender per moltiplicatore il moltiplicando e rifare il prodotto che dee esser lo stesso (25).

30. Può usarsi un'altra prova. Tolgo dai fattori 564, 249 (28) una cifra qualunque, per esempio il 5, quante volte si può, e noto i due avanzi 4, 4: moltiplico questi avanzi tra loro, e dal prodotto 16 tolgo il 5 quante volte si può notandone l'avanzo 1: infine anche dal prodotto 140436 tolgo il 5 quante volte si può, e se l'avanzo sia parimente 1, la moltiplicazione è ben fatta.

$$\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$$

Poichè sieno $F (= qB + m)$ ed $F' (= qC + n)$ i due fattori che contengono B, C volte la cifra qualunque q con gli avanzi m, n; e supposto $mn (= qD + r)$ il prodotto di questi avanzi, si avrà $q^2BC + qnB + qmC + qD + r = P$ per prodotto dei due fattori F, F': ora è chiaro che tolto q quante volte si può 1°. da F, resta m; 2°. da F', resta n; 3°. da mn, resta r; 4°. da P, resta parimente r.

$$\begin{array}{c|c} m & r \\ \hline n & r \end{array}$$

31. Gli Aritmetici preferiscono a tutte l'altre la cifra 9, e però questa operazione si chiama *la prova del 9*. Attesa la natura della nostra Aritmetica (8), tolto il 9 quante volte si può da 10, da 100, da 1000 ec., da 20, da 200, da 2000 ec., da 30, da 300, da 3000 ec., resta sempre 1, 2, 3 ec.; dunque per togliere il 9 quante volte si può da un numero $564 = 500 +$

60+4, basta toglierlo da 5+6+4, cioè basta sommar le cifre del dato numero come se fossero semplici unità, e toglierne il 9 a misura che si forma sommando. Ciò rende la prova più facile, e perciò il 9 fu preferito.

32. La prova del 9 può indurre in inganno: così trasponendo le cifre d' un prodotto, mettendo in esso degli zeri in luogo di 9, tralasciando i 9 e non mettendo in vece altre cifre ec., tornerebbe la prova, e il prodotto sarebbe falso. Ma errori difficili a commettersi non debbono impedir l' uso d' una regola sì spedita. Del resto la divisione direttamente verifica la moltiplicazione (42).

Divisione.

33. La divisione fa trovar quante volte un numero è contenuto in un altro; e come non vi può esser contenuto se non quante volte ne può esser sottratto, la divisione è una compendiosa sottrazione. Così per saper quante volte il 12 contiene il 4, in vece di sottrarre il 4 da 12 quante volte si può, il che sarebbe assai lungo, si divide, e si trova subito che lo contiene 3 volte.

34. In questo esempio, 12 si chiama il *Dividendo*, 4 il *Divisore*, e 3 che mostra *quante volte* il 4 entra in 12, dicesi il *Quoziente*.

35. Perciò I°. *il prodotto del divisore per il quoziente è eguale al dividendo:* onde *un quoziente è esatto, se moltiplicato per il divisore, riproduca il dividendo;* e poichè il dividendo è un prodotto i cui fattori sono il divisore ed il quoziente, *dato un prodotto ed un fattore, se quello si divida per questo, si avrà l' altro fattore.*

36. II°. *Per far d' una quantità un dato numero di parti eguali, bisogna dividerla per questo numero; il quoziente esprime la grandezza di ciascuna parte.* Infatti nell'esempio precedente (33)

il 12 si trova diviso in 4 parti eguali, ciascuna delle quali è 3.

37. Or se i numeri da dividersi son semplici, facilmente si vede che per esempio, 8 contien 4 appunto 2 volte, o che il quoziente di 8 diviso per 4 è 2. Per brevità si scrive il divisore sotto il dividendo e si separano con una linea: ovvero tra il dividendo e il divisore si scrivon due punti, e tanto la linea che i due punti significano *diviso per:* così $\frac{8}{4}=8:4=2$ significa che 8 diviso per 4 è eguale a 2.

Quando il quoziente non è esatto (come se volessi divider 9 per 4, dove il 9 contiene il 4 più di 2 volte ma meno di 3, e perciò il quoziente vero è fra 2 e 3) *scrivo per quoziente il più piccolo dei due numeri fra cui è il vero quoziente: moltiplico questo numero per il divisore, tolgo dal dividendo il prodotto, ed ho un resto che scrivo allato al quoziente, mettendo il divisore sotto questo resto con una linea tramezzo*. Per esempio, dico: 9 contien 4 due volte e più, ma non 3 volte: scrivo dunque 2 per quoziente, e dico: $2\times4=8$: poi $9-8=1$; onde $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$, il che significa che 9 diviso per 4 ha 2 per quoziente, ma resta ancora un'unità del 9 da dividersi in quattro parti. Così $\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

38. Osservazioni. I. Se il divisore è più grande del dividendo, come se debba dividersi 4 per 7, si scrive $\frac{4}{7}$, e questo è il quoziente. Tali quozienti, e generalmente tutte le espressioni indicanti una divisione per mezzo di una linea o di due punti (37), si chiamano *Rotti* o *Frazioni* (11).

II. Una quantità che si può dividere esattamente o senza resto per un'altra, è *multipla* di quest' altra cioè *dupla*, *tripla* ec. se il quoziente è 2, 3 ec.; e l'altra è *summultipla* o *aliquota* della prima cioè *suddupla*, *suttripla* ec. se è contenuta nella prima 2, 3 ec. volte: così 10 è duplo di 5; 18 è triplo di 6; 8 è multiplo di 4 e di 2; ogni numero è multiplo dell'unità: ma 8 non è multiplo di 7 nè di 6 nè di 5 nè di 3; 11 non è multiplo d'alcun numero intero maggior di 1. All' incontro 2 è un summultiplo di tutti i numeri pari, 5 di tutti i numeri che terminano in 5, in 0 ec.

III. La formula di tutti i multipli di un numero n è mn, preso successivamente $m=0, 1, 2, 3$ ec.: così se $n=2$, i multipli di 2 o i numeri pari si esprimeranno con $2m$, onde la formula dei non multipli di 2 o degli impari sarà $2m+1$, o $2m-1$. Se $n=3, =4, =5$ ec., i multipli di 3, di 4, di 5 ec. si esprimeranno con $3m$, $4m$, $5m$ ec. Quindi ogni numero intero è contenuto da una delle due formule $2m$, $2m+1$, o $2m$, $2m-1$, e secondo l'occorrenze può anche esprimersi con $3m$, $3m \pm 1$, con $4m$, $4m \pm 1$, $4m \pm 2$, con $5m$, $5m \pm 1$, $5m \pm 2$, con $6m$, $6m \pm 2$ per i pari e $6m \pm 1$, $6m \pm 3$ per gl' impari; d'onde si ha che $6m \pm 3$ essendo multiplo di 3 e perciò rappresentando il solo numero primo 3, *tutti i numeri primi fuorchè 2, 3 son della forma $6m \pm 1$*. Così potranno aversi infinite altre formule. Ma ecco alcuni utili teoremi che si deducono in parte da questi principj e in parte posson dimostrarsi con la formula del Binomio: 1°. la somma, la differenza e il prodotto di due numeri pari è numero pari: 2°. la somma e la differenza d'un pari e d'un impari è impari: 3°. il prodotto d'un pari per un impari è pari: 4°. perciò $a(a-1)$ è sempre pari: 5°. la somma e la differenza di due impari è pari: 6°. il prodotto di due impari è impari: 7°. se a non sia multiplo di 3, lo sarà $2a^2+1$: 8°. perciò $a(2a^2+1)$ è sempre multiplo di 3: 9°. se p sia numero primo, $(a+b)^p - a^p - b^p$ sarà multiplo di p: 10°. perciò lo sarà anche $c^p - c$: 11°. onde lo sarà pure $c^{p-1} - 1$ se c non lo sia: 12°. e lo sarà $c^{p-1} - d^{p-1}$ se c, d non lo sieno: 13°. se supposti a, b, c ec. numeri interi dati, il polinomio $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + z$ sia multiplo di D quando $x = F = F', = F''$ ec., lo sarà anche quando $x = F \pm mD, = F' \pm nD, F'' \pm pD$ ec., supposti m, n, p ec. numeri interi qualunque: 14°. onde i valori di x indipendenti tra loro ed atti a rendere il polinomio ax^n ec. multiplo di D, son tutti contenuti tra $-\frac{D}{2}$ e $+\frac{D}{2}$.

IV. Ogni numero intero non multiplo di altro numero intero maggiore dell' unità, si chiama *numero primo*. Onde un numero primo non potendo finire in 0, 2, 4, 5, 6, 8 perchè i numeri così terminati son divisibili per 2 o per 5 come si è detto, finirà sempre in 1, 3, 7, 9. Su questo principio è costruita la *Tavola dei numeri primi fino a* 100000, che è al fin di quest' Opera. I numeri vi son disposti sotto la lettera N purchè l' ultime due cifre si cerchino nella prima o ultima fila orizzontale: così per sapere se 85577 è numero primo, cerco 855 sotto N, e 77 in alto o in basso lungo N, e poichè dirimpetto a 855 e sotto 77 trovo un punto, 85577 è numero primo. Se nel modo stesso cerco 97983, troverò 3, il che significa che 3 è il minimo divisore o *elemento* di 97983: divido infatti per 3 ed ho 32661 che cerco parimente nella Tavola; trovo 3 per cui pur divido, ed ottengo 10887 sotto cui trovo 3; divido, e viene 3629 sotto cui trovo 19; divido, e viene 191, sotto cui trovo un punto, onde 191 è numero primo: perciò gli elementi di 97983 sono $3 \times 3 \times 3 \times 19 \times 191$, dai quali poi è facile di ricavare i *divisori* del numero, sol che disposti gli elementi come quì di faccia nella colonna A, si moltiplichi ciascun elemento inferiore per tutti i numeri superiori, tralasciando i prodotti già scritti una volta. Quindi i divisori di 97983 sono come quì si vede, dei quali prendendo il pri-

A	*Divisori di* 97983
1.	
3.	
3.	9.
3.	27.
19.	57. 171. 513.
191.	573. 1719. 5157. 3629. 10887. 32661. 97983.

mo e l'ultimo, il secondo e il penultimo ec. ordinatamente, si hanno a due a due i *fattori* di 97983, cioè 1×97983, 3×32661, 9×10887, 19×5157, 27×3629, 57×1719, 171×573, 191×513.

Il metodo stesso vale anche per le quantità algebriche, e si hanno quì di faccia gli elementi e i divisori di $2ab^2 - 6a^2c$.

	Divisori di $2ab^2-6a^2c$
1;	
2;	
a; $2a$;	
b^2-3ac;	$2b^2-6ac$;
ab^2-3a^2c;	$2ab^2-6a^2c$.

39. Sia ora il dividendo un numero composto e il divisore un numero semplice: 1°. *cerco quante volte il divisore sta nella prima cifra sinistra del dividendo* (poichè così si fa sempre la divisione): 2°. *scrivo il quoziente sotto alla corrispondente cifra del dividendo*: 3°. *cangio in diecine l'avanzo, se vi è, l'unisco alla cifra seguente, e ricomincio le stesse operazioni finchè giungo a dividere tutte le cifre del dividendo*. Così per dividere 7953 per 3, scrivo il divisore a sinistra e poi dico: in 7 quante volte entra il 3? 2 volte; scrivo 2 sotto il 7: unisco l'avanzo 1 cangiato in 10, al 9 seguente, onde ho 19, e dico: in 19 quante volte il 3? 6 volte; scrivo 6 sotto il 9, e il resto 1 unito alla cifra seguente fa 15: quindi trovo 5 e poi 1 per quozienti senza resto; onde 3 è contenuto 2651 volte in 7953.

$$3 \diagup 7953$$
$$2651$$

40. Osservazioni. I. Si comincia la divisione a sinistra affinchè i resti delle prime cifre possano unirsi alle seguenti; cominciando a destra bisognerebbe spesso tornare indietro. II. Se la prima cifra del dividendo è più piccola del divisore, si dividon subito le prime due. III. Quando fatta una divisione non vi è resto e la cifra se-

guente è più piccola del divisore, si mette zero nel quoziente e la cifra avanzata si unisce al solito con la seguente se vi è; lo zero nel quoziente conserva il valor respettivo dell'altre cifre. IV. Bisogna ricominciar la divisione e farla meglio, quando il resto che sempre dee esser più piccolo del divisore, lo eguaglia o lo supera. V. Non si può mai metter più di 9 nel quoziente, perchè la nostra Aritmetica è decimale (8).

41. Infine se il dividendo e il divisore son numeri composti, se per esempio ho da dividere 147475 per 362, comincio dallo scriver questi due numeri come sopra; poi dico: le tre prime cifre 147 del dividendo non contengono le tre cifre del divisore, astraendo dal valor relativo di 147 (9); dunque prendo le prime quattro 1474, e dico: il 3 in 14 entra 4 volte col resto 2, che con la cifra seguente dà 27, e il 6 (seconda cifra del divisore) entra pur 4 volte in 27 col resto 3, che unito alla seguente cifra 4 dà 34, in cui l'ultima cifra 2 del divisore entra pur 4 volte; scrivo dunque 4 nel quoziente, che si pone lungo una linea condotta sul dividendo. Moltiplico il divisore 362 per il quoziente trovato 4, e *sottraggo a mente* il prodotto dal dividendo 1474 dicendo: $4 \times 2 = 8$, e andando a 14 (21) resta 6 che scrivo sotto, e porto 1: $4 \times 6 = 24$, $+ 1 = 25$, e andando a 27 resta 2 che scrivo accanto a 6, e porto 2; $3 \times 4 = 12$, $+ 2 = 14$, e andando a 14 resta 0.

$$
\begin{array}{r}
407\ \frac{141}{362} \\
\hline
362-147475 \\
2675 \\
141
\end{array}
$$

Accanto al resto 26 abbasso la quinta cifra 7 che segno con un punto per riconoscere di mano in mano ove io sono, e ho da dividere 267

per 362, il che non essendo possibile, scrivo o nel quoziente (40), ed abbassata l'ultima cifra 5, ho da dividere 2675 per 362. Dico dunque: il 3 in 26 entra 8 volte col resto 2 che unito alla seguente cifra 7 dà 27: ma il 6 in 27 non entra 8 volte; torno dunque daccapo e dico: il 3 in 26 entra 7 volte col resto 5 che unito al seguente 7 dà 57, e il 6 in 57 entra pur 7 volte e avanza 15 che con la seguente cifra 5 dà 155, in cui entra pur 7 volte l'ultima cifra 2 del divisore; scrivo dunque 7 nel quoziente, e per 7 moltiplico il divisore 362 dicendo: $2\times7=14$, e andando a 15 (21) resta 1 che scrivo sotto e porto 1: $6\times7=42,+1=43$ e andando a 47, resta 4 che scrivo accanto a 1 e porto 4: $3\times7=21,+4=25$ e andando a 26, resta 1 che scrivo accanto a 41, e il quoziente completo è $407\frac{141}{362}$.

42. *La riprova della divisione si fa aggiungendo il resto al prodotto del divisore per il quoziente:* la lor somma dee uguagliare il dividendo. Poichè se 362 è contenuto 407 volte in 147475 col resto 141 (41), bisogna che $362\times407+141=147475$ (35). Quindi *la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, e queste due regole posson servirsi scambievolmente di riprova.*

43. Può anche farsi la riprova sopprimendo i 9 contenuti 1°. nel divisore, 2°. nel quoziente, 3°. nel prodotto dei loro resti, 4°. nel dividendo; poichè i due ultimi resti debbono essere eguali come nella moltiplicazione (30). Solo si osservi che quando la divisione ha un resto, bisogna sommarlo col prodotto dei resti del divisore e del quoziente, e toglier da questa somma i 9 che

contiene: così il resto del divisor 362 e del quoziente 407 è 2; il loro prodotto è 4 che col resto 141 dà 145; tolto il 9 resta 1 che restando anche dal dividendo 147475, mostra esatta l'operazione.

2	1
2	1

44. Osservazioni. I. Quando il dividendo e il divisore finiscono in zeri, ne tolgo ad ambedue lo stesso numero: così $\frac{417000}{2500} = \frac{4170}{25}$ (49) $= 166\frac{4}{5}$ II. Quando il solo divisore finisce in zeri, separo alla fine del dividendo un egual numero di cifre, divido le rimanenti di questo per le rimanenti di quello, congiungo il resto, se vi è, alle cifre separate, e ne fo un rotto: così $\frac{238873}{3600} = \frac{2388\frac{73}{100}}{36}$ (49) $= 66\frac{1273}{3600}$ (52): III. Il quoziente deve aver tante cifre quanti sono i punti che si fanno sotto il dividendo: onde fin dal primo membro della divisione si sa quante cifre avrà il quoziente. IV. prendendo a caso un dividendo D ed un divisore d, si può scommettere $d - 1$ contro 1 che la divisione non succederà senza resto. V. Se diviso un numero n per d e per d', si abbiano i quozienti q, q', sarà $\frac{n}{dd'} = \frac{q \pm q'}{d' \pm d}$.

DEI ROTTI

Natura dei Rotti in generale; loro valore e loro paragone.

45. Una quantità divisa in parti eguali si riproduce dalla lor riunione; dunque se non si riuniscon tutte le parti in cui fu divisa, se ne avrà una porzione più o men grande, e questa si chiama *Rotto* o *Frazione*.

46. L'idea di frazione comprende perciò il *numero* e la *specie* delle parti eguali che formano la porzione di una quantità: così $\frac{4}{5}$ (che si pronunzia 4 *diviso per* 5 o *quattro quinti*) espri-

mono 4 parti delle 5 eguali, in cui l'unità fu divisa; e il numero superiore 4 si chiama il *Numerator* del rotto, l'inferiore 5 il *Denominatore*.

47. Un rotto *proprio* è dunque minor dell' unità perchè il suo numeratore è più piccolo del denominatore: ma si trovano spesso dei rotti *improprj* il cui numeratore è eguale e talvolta più grande del denominatore. Quando è eguale, la frazione è l'unità (37): perciò $\frac{4}{4}=1=\frac{11}{11}=\frac{99}{99}$ ec. Quando poi il numeratore supera il denominatore, il rotto supera l'unità (37); così $\frac{12}{4}=3$; $\frac{49}{7}=7$; $\frac{103}{20}=5+\frac{3}{20}$ ec.

48. *Se due rotti hanno uno stesso numeratore, quello che avrà un più piccolo denominatore sarà più grande*; così il rotto $\frac{1}{2}$ è maggiore del rotto $\frac{1}{4}$: *se hanno il medesimo denominatore, il più grande è quello che ha il più gran numeratore*; così $\frac{2}{3}$ son più che $\frac{1}{3}$. Tutto ciò è chiaro.

49. Il valor d'un rotto non si altera o si moltiplichino o si dividano i suoi termini per un medesimo numero. Infatti dividendo $2 \cdot 3$ per 2, e $2 \cdot 3 \cdot 5$ per $2 \cdot 5$, si ha sempre il quoziente 3 (35); dunque $\frac{2 \cdot 3}{2}=\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5}$ moltiplicando o dividendo i due termini per 5.

50. Onde *vi è un' infinità di rotti dello stesso valore benchè espressi in termini differenti*; così $\frac{36}{72}=\frac{18}{36}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, ove i due termini del primo rotto son divisi per 2, quei del secondo per 3, e quei del terzo per 6, che han dato $\frac{1}{2}$, fra-

zione visibilmente eguale alle precedenti, che si sarebbe avuta subito, dividendo i termini della prima per 36.

Operazioni preliminari sui Rotti.

51. *Trasformar gli interi in rotti.* Si dà a un intero la forma di rotto 1°. col dargli 1 per denominatore: così 6 ridotto in frazione è $\frac{6}{1}$; $8 = \frac{8}{1}$ ec: 2°. col moltiplicarlo per un dato denominatore: così per ridur 6 ad un rotto che abbia 7 per denominatore, si scriverà $\frac{6.7}{7} = \frac{42}{7} = 6$ (37). Per ridurre a un sol rotto un *intero con rotto*, si moltiplica l'intero per il denominator del rotto, si aggiunge il numeratore a questo prodotto, e della somma si fa il numerator del rotto cercato; così $6\frac{3}{4}$ si riduce a $\frac{27}{4}$, e $3\frac{1}{22}$ a $\frac{67}{22}$.

52. *Ridur più rotti allo stesso denominatore.* Moltiplico il numeratore e il denominator di ciascun rotto per ciascun denominatore di tutti gli altri, e trovo dei nuovi rotti che hanno il valor di prima e un denominator comune (49): così per ridurre $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$ allo stesso denominatore, moltiplico per 4 tutto il rotto $\frac{1}{5}$, e per 5 tutto il rotto $\frac{3}{4}$: le due frazioni ridotte sono $\frac{4}{20}$ e $\frac{15}{20}$. Del pari per ridurre i rotti $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, moltiplico per 7.4 il rotto $\frac{2}{3}$; per 3.4 il rotto $\frac{5}{7}$, per 3.7 il rotto $\frac{3}{4}$, e le tre frazioni ridot-

te sono $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$.

53. Moltiplicando ciascun rotto per ciascun numerator degli altri, si ridurrebbero tutti allo stesso numeratore: così $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ si riducono a $\frac{30}{45}$, $\frac{30}{42}$, $\frac{30}{40}$: questa riduzione vien poco in uso.

54. *Ridurre un rotto alla più semplice espressione*. Se il numeratore è più grande del denominatore, si divida quello per questo (37); così $\frac{12}{4}$ si riduce a 3; $\frac{8}{3}$ si riduce a $2\frac{2}{3}$. Quindi si veda se posson dividersi senza resto per uno stesso numero i due termini del rotto, che allora diverrà più semplice senza cangiar valore (49). Serve a questo esame la Tavola dei numeri primi (38); poichè per esprimer più semplicemente un rotto $\frac{91}{294}$, cerco in essa gli elementi di 91 e di 294 e trovo $91 = 7 \cdot 13$; $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, onde $\frac{91}{294} = \frac{7 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{13}{42}$, rotto più semplice del dato.

55. Se i termini del rotto superino 100000, oltre cui non va la Tavola, si suol far uso di certe proprietà de' numeri di cui ecco le principali. I. Ogni numero pari è divisibile per 2; onde un rotto potrà ridursi finchè i suoi termini saranno numeri pari: così $\frac{128}{432} = \frac{8}{27}$, dividendo quattro volte per 2. II. Ogni numero che finisce in 0 è divisibile per 2, per 5 e per 10 (10); così $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$. III. Ogni numero che finisce in 5 è divisibile per 5 (10); così $\frac{15}{85} = \frac{3}{17}$. IV. Ogni numero tale che la somma delle sue cifre sia un multiplo di 3, è divisibile per 3 (10); così $\frac{288}{351} = \frac{96}{117} = \frac{32}{39}$: se di più il numero divisibile per 3 è pari, può dividersi per 6: e può dividersi per 9 quando la somma delle sue cifre è multipla di 9 (31). V. Ogni numero è divisibile per 2^n quando lo sono le sue n ultime cifre: così $\frac{684}{1984} = \frac{171}{246}$, e $\frac{120}{784} = \frac{15}{98}$ (10). VI. Ogni numero è divisibi-

le per 11 se le somme delle sue cifre alternative sieno eguali: così $\frac{3256}{467687}=\frac{296}{42517}$ (10).

56. Ma in generale *per ridurre alla più semplice espressione un rotto, bisogna dividere i suoi due termini per il loro più gran comun divisore*. Per trovar questo divisore, divido il termine più grande per il più piccolo, e se la divisione è senza resto, il più piccolo è il divisor cercato. Se vi è un resto, divido per esso il più piccol termine, e se nulla avanza, il primo resto è il divisor cercato. Trovando un avanzo, ripeto la divisione finchè avanzi zero, *e il resto immediatamente superiore a zero è il massimo comun divisore cercato*; onde se questo resto sia 1, il rotto sarà *irriducibile* o i suoi due termini saranno *primi tra loro* (così si chiamano quei numeri il cui solo divisor comune è l'unità). Onde per ridurre $\frac{91}{294}$, 1°. divido 294 per 91, e ho 3 di quoziente e 21 di primo resto: 2°. divido 91 per 21, e vien 4 di quozienti e 7 di secondo resto: 3°. divido 21 per 7, e ho 3 di quoziente con zero di resto: perciò 7 è il massimo comun divisore, e $\frac{91}{294}=\frac{13}{42}$ (54).

$$\begin{aligned} A &= 294 \\ B &= 91 \ldots 3 = p \\ R' &= 21 \ldots 4 = q \\ R'' &= 7 \ldots 3 = r \\ R''' &= 0 \end{aligned}$$

57. Infatti dato il rotto $\frac{B}{A}$, l'operazione prescritta offre l'equazioni qui poste di faccia. Perciò se divisa A per B, si abbia p senza resto, sarà $R'=0$, $A=pB$, e B il comun divisore di B, A: ma se siavi un resto R', e diviso B per R', si abbia q senza resto, sarà $R''=0$, e $B=qR'$, valore che posto nella I. dà $A=(pq+1)R'$, ed R' comun divisore. Che se siavi un secondo resto R'', e divisa R' per R'', si abbia r senza resto,

$$\begin{aligned} \text{I. } A &= pB + R' \\ \text{II. } B &= qR' + R'' \\ \text{III. } R' &= rR'' + R''' \\ \text{IV. } R'' &= sR''' + R^{\text{IV}} \\ &\text{ec.} \quad \text{ec.} \end{aligned}$$

sarà $R''' = o$, ed $R' = rR''$, valore che posto nella II., dà $B = (qr + 1)R''$, e ambedue posti nella I., danno $A = (r[pq + 1] + p)R''$, ed R'' comun divisore ec.

58. Onde se nel dato rotto sia $B = o$, verrà $\frac{B}{A} = \frac{o}{A} = \frac{o}{1}$, e potrà farsi $B = o$, $A = 1$; e se divisa A per B, si abbia p senza resto, verrà $A = pB$ e $\frac{B}{A} = \frac{B}{pB} = \frac{1}{p}$, e potrà farsi $B = 1$, $A = p$. Unendo questi valori a quelli trovati di sopra quando $R'' = o = R'''$ ec., si avranno le successive equazioni $B = o, A = 1$; $B = 1, A = p$; $B = qR', A = (pq + 1)R'$; $B = (qr + 1)R'', A = (r[pq + 1] + p)R''$; $B = (s[qr + 1] + q)R''', A = (s[r(pq + 1) + p] + pq + 1)R'''$ ec., in cui se sieno successivamente $R' = R'' = R'''$ ec. $= 1$ (il che suppone (56) irriducibile il rotto $\frac{B}{A}$), e i diversi valori di B, A si chiamino M^o, M', M'' ec., N^o, N', N'' ec., si avranno le nuove equazioni, come quì sotto, la cui legge è manifesta, e da cui nascono alcune utili conseguenze.

$$B = \begin{cases} M^o = o \\ M' = 1 \\ M'' = qM' + M^o \\ M''' = rM'' + M' \\ M^{iv} = sM''' + M'' \\ \text{ec.} \quad \text{ec.} \end{cases} \qquad A = \begin{cases} N^o = 1 \\ N' = p \\ N'' = qN' + N^o \\ N''' = rN'' + N' \\ N^{iv} = sN''' + N'' \\ \text{ec.} \quad \text{ec.} \end{cases}$$

I°. I rotti $\frac{M^o}{N^o} = \frac{o}{1}, \frac{M'}{N'} = \frac{1}{p}$ ec. moltiplicati in croce differiscon sempre tra loro di ∓ 1: così $\frac{o}{1} - \frac{1}{p} = -1, \frac{1}{p} - \frac{q}{pq + 1} = pq + 1 - pq = 1, \frac{q}{pq + 1} - \frac{qr - 1}{r(pq + 1) + p} = qr(pq + 1) + pq - qr(pq + 1) - pq - 1 = -1$ ec., avendosi -1 quando il numero dei quozienti p, q, r ec. è impari, e $+1$ quando è pari.

II°. I rotti stessi $\frac{M^o}{N^o}, \frac{M'}{N'}$ ec. sono approssimazioni sempre più esatte del rotto irriducibile $\frac{B}{A}$: poichè le differenze $\frac{B}{A} - \frac{M^o}{N^o}, \frac{B}{A} - \frac{M'}{N'}, \ldots \frac{B}{A} - \frac{M^{(z)}}{N^{(z)}}$ moltiplicate in croce, sono $B, -R', \ldots \pm R^{(z)}$ (57), e vanno sempre scemando fino all' ultimo resto $\pm R^{(z)} = \pm 1$: perciò sempre si accostano al

dato rotto. Onde 1°. i rotti $\frac{M^\circ}{N^\circ}$, $\frac{M'}{N'}$ ec. che differiscon dal dato ora in + ed ora in —, sono a vicenda più piccoli e più grandi del dato $\frac{B}{A}$: 2°. $BN^{(z)} - AM^{(z)} = \pm R^{(z)} = \pm 1$, ovvero $BN^{(z)} = AM^{(z)} \pm 1$, cioè *il prodotto di* B *per l'ultima* N *o per* $N^{(z)}$ *è un multiplo* $M^{(z)}$ *di* A *più o meno* 1, *secondo che il numero dei quozienti* p, q, ec. *è pari o impari*.

III^a. I rotti medesimi $\frac{M^\circ}{N^\circ}$, $\frac{M'}{N'}$ ec. son tutti irriducibili: poichè se, per esempio, $\frac{M''}{N''}$ avesse un comun divisore, la avrebbe anche $N''M' - M''N'$, e si è visto che $N''M' - M''N' = 1$ (I^a.).

IV^a. Giacchè si ha, per esempio, $\frac{M'''}{N'''} = \frac{qr+1}{r(pq+1)+p} = \cfrac{1}{\cfrac{r(pq+1)+p}{qr+1}} = \cfrac{1}{p+\cfrac{r}{qr+1}} = \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{\cfrac{qr+1}{r}}} = \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}}$ (tal nuova espressione dicesi *rotto continuo*), si ridurrà in *continuo* qualunque rotto ordinario $\frac{B}{A}$ prendendo 1 per numerator costante, e i quozienti p, q, r ec. per denominatori.

59. Qui si osservi che se un rotto continuo sia in tutto o in parte *periodico*, il valore x del periodo verrà sempre espresso da un radicale quadratico. Infatti se

$$x = \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q}}}} \text{ ec. in inf.}$$

sarà $x = \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+x}}$ (269) $= \frac{q+x}{p(q+x)+1}$, onde $x = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{p} + \frac{q^2}{4})}$. Dunque all'opposto se la radice d'un numero si riduca in rotto decimale e poi in continuo, i denominatori di esso o i quozienti p, q, r ec. torneranno periodicamente.

Somma dei Rotti.

60. Per sommare i rotti *gli riduco allo stesso denominatore* (52), *e sotto la somma dei numeratori scrivo il denominator comune*. Così per sommare $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ gli riduco a $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$: per sommare $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ gli riduco a $\frac{16}{24}+\frac{12}{24}+\frac{18}{24}=\frac{46}{24}=1\frac{11}{12}$. Se vi son numeri interi con rotti, la lor somma si unisce a quella dei rotti; così $4\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}=6\frac{5}{6}$.

Sottrazione dei Rotti.

61. Per sottrarre i rotti *gli riduco allo stesso denominatore* (52) *e sotto la differenza dei numeratori scrivo il denominator comune*. Così per sottrarre $\frac{1}{4}$ da $\frac{2}{3}$ riducetegli a $\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$.

62. Se vi sono interi con rotti, è meglio ridur tutto a rotto (51): così per sottrar $3\frac{2}{5}$ da $6\frac{1}{4}$, riduco a rotto, ed ho $\frac{25}{4}-\frac{17}{5}$, quindi (61) $\frac{125}{20}-\frac{68}{20}=\frac{57}{20}=2\frac{17}{20}$.

Moltiplicazione dei Rotti.

63. Se un rotto $\frac{2}{13}$ debba moltiplicarsi per un intero 5, è chiaro che dovrà prendersi cin-

que volte (23), il che dà $\frac{10}{13} = \frac{2.5}{13}$; dunque se l'intero 5 si riduca ad un rotto qualunque $\frac{15}{3}$ (51), si avrà sempre $\frac{2}{13} \times \frac{15}{3} = \frac{2.5}{13} = \frac{2.5.3}{13.3}$ (49) $= \frac{2.15}{13.3}$, cioè *per moltiplicare i rotti, sotto il prodotto dei numeratori scrivo quello dei denominatori*.

64. Dal che segue 1°. che *il prodotto di due rotti proprj*, come $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$, *è sempre minore di ciascun fattore;* poichè moltiplicando $\frac{5}{7}$ per 1, si avrebbe appunto $\frac{5}{7}$; dunque moltiplicando $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, cioè per meno di 1, dee aversi meno di $\frac{5}{7}$: 2°. che per avere un *rotto d' intero* basta moltiplicar tra loro al solito il rotto e l' intero; così volendo $\frac{3}{7}$ di 10 si fa $\frac{3}{7}.10 = \frac{30}{7}$, perchè una settima parte di 10 è $\frac{10}{7}$ (36), onde tre settime son $\frac{30}{7}$: 3°. che per avere un *rotto di rotto* come $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7}$, il rotto $\frac{2}{7}$ farà figura d' un intero A: ma $\frac{4}{5}$ di A sono $\frac{4}{5} \times A$ come si è visto; dunque $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7}$ saranno $\frac{4.2}{5.7} = \frac{8}{35}$. Perciò $\frac{4}{5}$ di $\frac{2}{7}$, e $\frac{2}{7}$ di $\frac{4}{5}$ sono una cosa stessa.

65. Se il moltiplicando e il moltiplicatore sieno interi con rotti, si trasformi ciascuno in un sol rotto (51): così $3\frac{2}{9}.7\frac{1}{3} = \frac{29}{9}.\frac{22}{3} = \frac{638}{27}$.

Osservazioni. I. Quando un rotto dee moltiplicarsi per un multiplo o summultiplo del denominatore, si fa la riduzione prima di moltiplicare: così $\frac{5}{12}.2 = \frac{5}{6}$ (50). II. Quando più

rotti debbon moltiplicarsi gli uni per gli altri, è raro che il calcolo non possa abbreviarsi scancellando i numeri comuni al numeratore e denominator del prodotto: così $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Divisione dei Rotti.

66. Se i due termini d'un dividendo $\frac{8}{15}$ sieno respettivamente multipli dei due d'un divisore $\frac{2}{3}$, è chiaro che diviso il numeratore 8 per il numerator 2, e il denominator 15 per il denominator 3, si avrà il quoziente $\frac{4}{5}$ (35.63).

67. Ora i due termini di qualunque dividendo $\frac{2}{5}$ posson sempre rendersi multipli dei due di qualunque divisor $\frac{3}{7}$; poichè (49) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{2.3.7}{5.3.7}:\frac{3}{7}$, onde (66) il quoziente sarà $\frac{2.7}{5.3}=\frac{14}{15}$, cioè *per dividere i rotti roverscio i termini del divisore, e moltiplico tra loro i due rotti al solito* (63).

68. *Il quoziente d'una quantità* $\frac{2}{5}$ *divisa per un rotto proprio* $\frac{3}{7}$ *è sempre maggiore del dividendo*: poichè divisi $\frac{2}{5}$ per 1 si ha $\frac{2}{5}$; dunque divisi $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ cioè per meno di 1, dee aversi più di $\frac{2}{5}$ (48).

69. Se il dividendo e il divisore sieno interi con rotti, si trasformi ciascuno in un sol rotto; così $5\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}=\frac{11}{2}:\frac{8}{3}=\frac{33}{16}$.

70. Osservazioni. I. Se i rotti da dividersi hanno lo stesso denominatore, si ha subito per quoziente il rotto dei due nu-

meratori: così per dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{5}$ basta scriver $\frac{3}{4}$. II. Se i termini del dividendo son multipli o summultipli di quelli del divisore, si fa la riduzione prima di dividere: così $\frac{9}{19} : \frac{3}{7} = \frac{21}{19}$.

Frazioni o rotti Decimali.

71. I *Rotti decimali* hanno per denominator l' unità con uno o più zeri: tali sono i rotti $\frac{3}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{541}{1000}$ ec., e in questa forma appartengono ai rotti ordinarj e son soggetti al calcolo stesso. Ma si è immaginato un compendio sostituendo alle generali alcune regole particolari.

72. Ogni cifra posta alla destra d'un'altra, le dà un valor decuplo (8): così per scriver 3 diecine si pone o alla destra di 3 e si scrive 30; dunque per scriver 3 decimi basta porre 3 alla destra di o, e scrivere 03. Ma per fissare il luogo degl' interi si è convenuto di separarli dai decimi con una virgola, e in vece di scriver $\frac{3}{10}$ si scrive 0,3; si scrive 0,2 per $\frac{2}{10}$; 0,7 per $\frac{7}{10}$, ec.

73. Dunque occupando le centinaja il terzo luogo a sinistra, i centesimi debbono occupare il terzo luogo a destra; e come per scrivere cinquecento si fa 500, così per scrivere cinque centesimi si fa 0,05 ec. In generale si scrive sempre il numeratore come i numeri interi, e il denominator sott'inteso è l' unità con tanti zeri quante son cifre a destra della virgola.

74. Da ciò si rileva che 2,9654 è un'espression compendiosa di $2 + \frac{9}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{4}{10000}$ che

può ridursi a $2+\frac{9654}{10000}$ (52) o a $\frac{29654}{10000}$.

Somma, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione dei Rotti Decimali.

75. Se alle regole date per i numeri interi si aggiunge quella che concerne la virgola dei decimali, il loro calcolo non ha difficoltà.

I. Debban sommarsi 4852,791...4,00745...2,7...0,0049; scrivo questi numeri l' un sotto l' altro, osservando che le virgole si trovino nella stessa colonna; poi gli sommo al solito, e scrivo la virgola sotto l'altre.

4852,791
4,00745
2,7
0,0049
4859,50335

II. I decimali si sottraggono come gl' interi; basta osservar questi esempj:

57,02	4,8274	6,00435	8,842
48,1	2,0139	0,17	1,004554
8,92	2,8135	5,83435	7,837446

III. La moltiplicazione dei decimali si fa al solito senza osservar le virgole: ma *si separano nel prodotto totale tante cifre a destra quanti decimali sono nei due fattori*: non essendo nel prodotto tante cifre quanti decimali son nei fattori, si scriva a sinistra un bastante numero di zeri, come nel secondo esempio. La riprova si fa al solito.

43,7	2,4542	3,7	21,32
13	0,0053	4,12	0,100103
1311	73626	74	6396
437	122710	37	2132
568,1	0,01300726	148	2132
		15,244	2,13419596

76. Infatti da $3,7 \times 4,12 = \frac{37}{10} \times \frac{412}{100}$ (74) dee aversi un prodotto di millesimi (63): ora i millesimi si esprimono con tre decimali (73) quanti ne sono nei due fattori.

77. Quando il moltiplicando ha dei decimali e il moltiplicatore è 10, 100, 1000 ec., basta ritirar la virgola a destra per tanti numeri quanti sono zeri nel moltiplicatore: così $45,3289 \times 100 = 4532,89$ .... $0,007854 \times 10000 = 78,54$.

78. Se i due fattori hanno un gran numero di decimali e non bisogna un risultato esatto, opero così. Suppongo che dovendo moltiplicare 45,625957 per 28,635, mi basti un prodotto con tre soli decimali. Scrivo i due numeri come quì sotto, cioè roversciato l' ordine dell' uno, lo scrivo sotto l' altro facendo risponder la cifra delle sue unità sotto il decimale immediatamente inferior di due gradi a quello a cui voglio limitare il prodotto. Quindi moltiplico, e trascuro nel moltiplicando tutte le cifre a destra di quella per cui moltiplico, e a misura che muto cifra nel moltiplicatore, scrivo sempre la prima cifra del nuovo prodotto sotto la prima del passato. Fatta la somma di tutti questi prodotti, sopprimo le due ultime cifre osservando d' aumentar d' un' unità l' ultima di quelle che restano se le due soppresse passan 50: dopo ciò pongo la virgola avanti ai decimali che mi proposi d'avere, e trovo 1306,499.

```
45,625957
   53682
---------
 91251914
 36500760
  2737554
   136875
    22810
---------
130649913
```

79. Se nel moltiplicando non fossero tanti decimali quanti la regola vuole perchè la cifra dell' unità del moltiplicatore corrisponda ove è prescritto, si supplirebbe con degli zeri. E' facile di rendersi ragione delle differenti parti del metodo, che per altro non ha luogo in due casi assai rari: 1°. quando gli interi uniti ai decimali son numeri molto grandi: 2°. quando i decimali son moltissimi ed espressi con le cifre massime 8, 9.

80 IV. La divisione dei decimali si fa al solito, ma *si separano nel quoziente tante cifre a destra quanti decimali ha il dividendo più del divisore.*

```
       3             2,6              2,44
2,3115-6,9345   3,22-8.445    20,074-49,10000
                     2 005             89520
                       13              92240
                                       11944
```

81 Infatti da $8{,}445 : 3{,}22 = \frac{8445}{1000} : \frac{322}{100}$ dee aversi un quoziente di decimi (67): ora i decimi si esprimono con un decimale, come il dividendo ne ha uno più del divisore.

82. Se il divisore ha più decimali del dividendo (vedete il 3°. esempio) si aggiungono degli zeri al dividendo finchè superi in decimali il divisore, onde averne nel quoziente: e volendo considerare i resti di queste divisioni, si aggiungono nuovi zeri; così nel 2°. esempio aggiunti tre zeri al resto 73, si avrebbe il quoziente 2,6226 con un resto 228 ec. Gli zeri aggiunti non alterano il valor del numero (73).

Si divide un decimale per 10, per 100 ec. con avanzar la virgola di uno, di due gradi ec. verso la sinistra: così $124{,}65 : 100 = 1{,}2465$.

83. Le divisioni troppo lunghe per i molti decimali del dividendo, si abbrevian così. Qualunque sia il divisore 9,351, lascio nel dividendo 32,227348 tanti decimali più uno quanti ne voglio nel quoziente (quì ne voglio tre) e divido al solito (80.82), distinguendo nel quoziente gl' interi dai decimali (80). Se vi è un resto (come quì 4339) continuo a dividere per il divisor di prima, soppressa l' ultima sua cifra a destra cioè per 9,35: poi divido il nuovo resto per il divisore stesso, soppressa un' altra cifra a destra, cioè per 9.3: e così continuo finchè sieno nel quoziente tanti decimali più uno, quanti ne volli; quest' uno si sopprime, e se sia maggior di 5 si aggiunge un' unità al precedente. Quì si ha 3,446.

```
         |3,4464
         --------
9,351    32,2273
          41743
           4339
            599
             41
              5
```

Trasformazione e utilità dei Decimali.

84. I rotti ordinarj posson trasformarsi in un' infinità d' altri dello stesso valore. Ciò si fa nei decimali col solo aggiungere uno, due, tre zeri ec. alla destra del rotto (73); e però $0{,}4 = 0{,}40 = 0{,}400 = 0{,}4000 =$ ec.

85. Quindi posson sopprimersi gli zeri fi-

nali di un rotto decimale senza alterarne il valore, ma sopprimendo altre cifre, il valore scemerebbe: così 0,683 e 0,68 differiscono di $\frac{3}{1000}$.

86. Per altro la differenza è tanto meno sensibile quante più son le cifre del rotto: così 0,680003 scema solo di $\frac{3}{1000000}$ sopprimendo l'ultima cifra 3, onde posson trascurarsi dei decimali senza diminuir sensibilmente il valor del rotto.

87. Dee però correggersi almeno in parte il piccolo errore, aggiungendo un'unità all'ultima cifra restante, quando quella che si sopprime supera 5. Poichè essendo il 5 una mezza unità dell'ordine contiguo a sinistra, se la cifra soppressa è minor di 5, l'errore sarà men d'una mezza unità; se è 5, sarà d'una mezza unità o per eccesso aggiungendo 1, o per difetto non aggiungendolo; e se supera 5, l'errore sarà più d'una mezza unità non aggiungendo 1, è assai meno aggiungendolo.

88. Nei calcoli ordinarj raramente bisognano più di sei decimali e spesso bastano due o tre: ne è dunque superfluo il gran numero quando le circostanze non esigono grande esattezza; così posson prendersi senza error sensibile 15,3 per 15,3049: ma se 15,3 dovesse poi moltiplicarsi per numeri molto grandi, come 8476, la soppressione dei decimali cagionerebbe un errore di circa 42 interi.

89. Se le prime cifre di due decimali son le stesse, il più grande è quello che ha qualche cifra di più, purchè non sieno tutte zeri: così 0,763241 è maggiore di 0,76324.

90. E se le prime cifre de' due decimali non son le stesse, il più grande è quello che le ha maggiori: così 0,54 supera 0,53999, benchè

a questo secondo si aggiungessero infinite cifre; onde 0,539999 è minor di 0,54 e maggior di 0,53999 (89); e 0,5399992 si accosta più a 0,54 che 0,539999.

91. Di quì la principale utilità dei decimali per accostarsi sempre più al valor rigoroso che spesso non può aversi. Tutte le Matematiche offrono esempj di queste *approssimazioni*; eccone alcuni cavati dall'Aritmetica.

92. E' raro che di due numeri presi a caso l'uno sia divisibile per l'altro (44.IV); così dividendo 147475 per 362, il quoziente è $407\frac{141}{362}$: ma la forma di questo rotto è incomoda se si tratti di valutarlo. Lo trasformo dunque in un altro il cui valor sia lo stesso o vi si accosti quanto il Calcolatore vorrà.

93. Aggiungo uno o più zeri a ogni resto di divisione, onde continuarla; e poichè l'aggiunta di uno, due, tre zeri ec. ingrandisce di 10, 100, 1000 volte ec. il dividendo, correggo l'errore collocando i quozienti tra i decimi, centesimi, millesimi, ec. Aggiunti tre zeri al resto 141, divido 141000 per 362; il quoziente è 389 che scrivo tra i decimali, trascurato il resto 182 se tre decimali mi bastino. Perciò $407\frac{141}{362}=407,389$ che differisce dal vero men d'un millesimo.

94. Tutti i rotti ordinarj posson trasformarsi in decimali o eguali o approssimati quanto si vuole: per esempio, $\frac{1}{2}$ si trasforma in 0,5 esattamente; poichè aggiunto uno zero al numeratore 1 e diviso il 10 per 2, si ha 5, onde $\frac{1}{2}=0,5$.

Ma $\frac{1}{3}$ dà solo un'approssimazione, perchè operando come prima, il quoziente è sempre 3 in infinito; quindi $\frac{1}{3}=0,3333$ ec. Il rotto $\frac{1}{7}$ è nello stesso caso; messo in decimali dà il *periodo* 0,142857 142857 142857 ec., onde ripetendo lo stesso periodo si ha l'approssimazione che più si vuole, senza bisogno di calcolo. In generale, non può esattamente ridursi in decimali un rotto ordinario se le stesse cifre tornino con lo stess'ordine. Il denominatore fa conoscere il limite più lontano del loro ritorno periodico; per esempio, il denominator 7 indica che riducendo $\frac{1}{7}$ in decimali, le cifre non posson ricomparire nello stess'ordine più tardi del settimo luogo, e se ne troverà facilmente la ragione: ma ritornano spesso prima del luogo segnato dal denominatore, come si vede nel rotto $\frac{1}{3}$.

Altri Rotti.

La specie dei rotti è sempre relativa all' unità di cui son parte; e poichè nelle Scienze, nell'Arti e nella Società si impiegano diverse sorte d'unità, ecco i nomi dei loro rotti più comuni.

95. La *Circonferenza del Circolo* fu divisa in 360 parti eguali chiamate *Gradi* (si preferì il numero 360 ad ogn'altro inferiore, perchè ha più divisori esatti, e ad ogn'altro superiore per fuggire una maggior quantità di cifre); onde il grado è $\frac{1}{360}$ della circonferenza a cui appartiene; ma bisognando spesso diverse parti del grado, si considerò anche lui come un'unità divi-

sa in 60 parti eguali chiamate *Minuti*; onde ogni minuto è $\frac{1}{60}$ di grado e perciò $\frac{1}{21600}$ di circonferenza: per aver una misura ancor più precisa, si suddivise il minuto *Primo* in 60 *Secondi*, il secondo in 60 *Terzi* ec., onde la circonferenza ha 1296000 secondi e 77760000 terzi, ed il grado è 3600 secondi e 216000 terzi. Si son dati dei segni a queste diverse parti, ed in vece di scrivere 18 *gradi*, 34 *minuti*, 53 *secondi*, 26 *terzi*, si scrive $18^{\circ}.\ 34'.\ 53''.\ 26'''$.

96. La divisione del tempo in *Giorni* è antica quanto il Mondo; ma esigendo la Società una misura più esatta, si divise il giorno in 24 parti eguali, numero assolutamente arbitrario con cui si formarono l'*ore*; l'ora è dunque $\frac{1}{24}$ di giorno e si suddivide come il grado in 60 minuti, il minuto in 60 secondi ec. Il giorno è dunque $= 1440' = 86400'' = 5184000'''$, e il minuto $= 3600'''$.

97. Per misurar le *Distanze* si prese un'unità di nota lunghezza e si portò successivamente dal principio al fine della distanza da misurarsi. Quest'unità tra noi si chiama *Braccio*, tra i Francesi *Tesa*, misure però diverse fra loro. La tesa si divide in 6 parti eguali che si chiaman *Piedi*, il piede in 12 *Pollici*, il pollice in 12 *Linee*, e la linea in 12 *Punti*; onde il piede è $\frac{1}{6}$ della tesa, il pollice ne è $\frac{1}{72}$, la linea $\frac{1}{864}$ e il punto $\frac{1}{10368}$. Il braccio ha 20 parti chiamate *Soldi* ec.

98. I bisogni della Società e del Commercio introdussero i *Pesi* e le *Monete*. L'unità del peso si chiamò *Libbra*, e quella della moneta *Lira*.

La prima si divide tra noi in 12, tra i Francesi, in 16 parti eguali dette *Oncie*; l'oncia è tra noi di 24 *Denari* e tra i Francesi di 8 *Grossi*; il denaro è di 24 *Grani* ed il grosso di 72. Una libbra pesa dunque tra i Francesi 128 grossi o 9216 grani, fra noi 288 denari o 6912 grani. I Francesi impiegano spesso un altro rotto di libbra, il quale ne è la metà, e si chiama *Marco*; il marco dunque contiene 8 oncie. La lira si divide in 20 *Soldi* e il soldo in 12 *Denari*. Il resto delle monete si rapporta ordinariamente a lire, soldi e denari.

99. Posto ciò, per sommar queste diverse grandezze, scrivo l'une sotto l'altre le parti dello stesso nome; poi sommo le colonne andando da destra a sinistra, e scrivo il resto dopo averne tolto, se si può, di che formare una o più unità che porto alla colonna seguente. Esempj.

36°.	25'.	47"
49.	33.	28
55.	31.	49
141.	31.	4

tese	piedi	poll.	lin.	pun.
9.	3.	11.	2.	7
100.	0.	0.	0.	0
47.	5.	3.	8.	0
11.	0.	10.	8.	4
168.	4.	1.	6.	11

lire	soldi	den.
325.	17.	4
15.	11.	6
25.	1.	8
4.	10.	0
371.	—.	6

100. Le stesse specie scritte l'una sotto l'altra si sottraggono al solito, e se alcuna delle inferioriori supera la corrispondente, si toglie un'unità dalla colonna che segue nel numero superiore, per decomporla in tante unità del genere di quelle da sottrarsi. Esempj.

48°.	16'.	17"
24.	23.	12
23°.	53'.	5"

tese	pi.	po.	l.	p.
100.	0.	0.	0.	0
17.	4.	5.	11.	8
82.	1.	6.	0.	4

lire	sol.	den.
655.	3.	4
30.	6.	8
624.	16.	8

101. La moltiplicazione si fa nella maniera seguente. Si cerchi per esempio, il prezzo di Braccia 246 di Stoffa a 6^{l}. 15^{s}. 9^{d} il Braccio. Moltiplico le date lire ec. per 10 e scrivo il prodotto di sopra; moltiplico nuovamente per 10 questo prodotto, e ciò tante volte quante bisogna per distribuir le cifre del moltiplicatore come nell' esempio. E' chiaro che moltiplicando la quantità superiore (centupla della data) per 2, avrò il valor di 200 braccia; moltiplicando la quantità che segue (decupla della data) per 4, avrò il valor di 40 braccia; e finalmente moltiplicando per 6 la data, avrò il valor di 6 braccia; i quali valori raccolti mi danno il prezzo di braccia 246.

	678. 15. —	×2
	67. 17. 6	×4
B. 246 a	ℨ 36. 15. 9	×6
	1357. 10. —	
	271. 10. —	
	40. 14. 6	
Som.	ℨ 1669. 14. 6	

Se poi anche il moltiplicatore contenga diverse specie, e si cerchi, per esempio, il prezzo di 42.^{tese} 5.$^{pie.}$ 4$^{pol.}$ a lire 18. 6. 8. la tesa, moltiplico le lire come sopra per 10 ec., e poichè i piedi sono $\frac{1}{6}$ della tesa, divido le lire date per 6; indi divido il quoziente trovato per 12, perchè i pollici sono $\frac{1}{12}$ del piede. Fatto ciò, distribuisco il molti-

tese pie. pol.	183. 6. 8.	×4
42. 5. 4 a ℨ	18. 6. 8.	×2
6	3. 1. 1 $\frac{1}{3}$	×5
12	—. 5. 1 $\frac{1}{9}$	×4
	733. 6. 8	
	36. 13. 4	
	15. 5. 6 $\frac{2}{3}$	
	1. 0. 4 $\frac{4}{9}$	
Som.	ℨ 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$	

plicatore come nell' esempio, e moltiplico per ciascuna cifra la quantità corrispondente: il primo e secondo prodotto danno il valore delle diecine e dell' unità degl' interi: il terzo e quarto danno i sesti ed i dodicesimi di un sesto; onde la somma di tutto è il prezzo cercato.

Se in vece di moltiplicar le lire moltiplicassi le tese, avrei il prodotto in tese e non già in lire (come talvolta può bisognare); e questo prodotto sarebbe $786^{t}.\ 1^{pi}.\ 9^{pol}\frac{1}{3}$, un poco diverso da quel di sopra nelle frazioni; per altro $5^{s}.\ 11^{d}\frac{1}{9}$ rispetto alle lire, son precisamente lo stesso che $1^{pi}.9^{pol}\cdot\frac{1}{3}$ riguardo alle tese, cioè $\frac{8}{27}$.

Osservate 1°. che per prender la decima parte di un numero di lire, basta raddoppiar la cifra delle unità e valutarla per soldi, facendo lire dell' altre cifre a sinistra; così lire $\frac{347}{10}$ = lire 34. 14: 2°. che il rotto di una quantità si risolve nelle sue specie inferiori col moltiplicarlo per il loro numero caratteristico; così per sciogliere $\frac{7}{12}$ di lira in soldi e denari, si dirà: $\frac{7}{12}\times 20 = 11\ \frac{2}{3}$ soldi, e poi $\frac{2}{3}\times 12 = 8$ denari; onde $\frac{7}{12} =$ ℨ — 11.8: 3°. che all' opposto le specie inferiori si riducono a rotti della specie superiore col dividerle per il loro numero caratteristico; così ℨ $2.\ 3.\ 4. = 2.\ 3\,\frac{4}{12}. — = 2.\ 3\,\frac{1}{3}. — = 2\ \frac{10}{3\times 20} = 2\,\frac{1}{6}$. La ragione è chiara. Ecco altri esempj.

I. Una libbra di tabacco costa lire 3. 4. — ; quanto costeranno 19 libbre e 13 oncie? (presa la libbra alla Francese). *Risp.* lir. 63. 8. —. II. La tesa corrente di un muro, di cui son date la grossezza e l'altezza, costa lire 37. 10. —: che co-

za costeranno 9^{t}. 5^{pi}. 11^{po} di questo muro? *Risp.* lir 374. 9. 7.
III. Si è convenuto di pagare un cerchio diviso in gradi, minuti e secondi a ragione di lire 7. 8. — per grado. L'artefice incaricato di questa graduazione ha già divisi 258°. 48'. 12'': di qual somma sarà egli creditore al presente? *Risp.* di lir. 1915. 2. 10 $\frac{18}{25}$.

102. In vece del metodo già spiegato (101), può trasformarsi il moltiplicando e il moltiplicatore in parti della più piccola specie, e moltiplicarsi insieme le quantità frazionarie che ne risultano, e che poi si riducono all' espressione lor propria. Così nell'esempio di sopra, le 42^{tese}. 5^{pi}. 4^{pol} (che sono $42+\frac{5}{6}+\frac{4}{72}$ di tesa) si ridurranno a $\frac{386}{9}$ di tesa: le lire 18. 6. 8. (che sono $18+\frac{6}{20}+\frac{8}{240}$ di lira) si ridurranno a $\frac{55}{3}$; e moltiplicando questi due rotti, si avranno $\frac{21230}{27}=786\frac{8}{27}$, cioè lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$, o tese 786. 1^{pie}. 9^{pol} $\frac{1}{3}$ come sopra.

103. Quanto alla divisione, si voglia verificare il primo esempio di sopra, cioè si debban dividere lire 1669. 14. 6 per 246. Divido primieramente le lire, ed ho per quoziente 6 e per avanzo 193 che riduco a soldi, moltiplicandolo per 20, ed osservando di aggiungere al prodotto i soldi della quantità proposta. Proseguo al solito la divisione che mi dà 15 per quoziente e 184 per resto, il quale moltiplico per 12 che coll'aggiunta de' 6^{d}, mi dà per prodotto 2214 e per quoziente 9 senza resto. L'intero quoziente è dunque lire 6. 15. 9 come doveva essere.

```
                | 6.     15.  9.
per 246 - 3  1669.     14.  6
               193    ×20
              ----
              3874
              1414
               184    ×12
              ----
              2214
                00
```

Se l'avanzo moltiplicato per il numero respetti-

vo fosse più piccolo del divisore, passerei a moltiplicarlo per il numero caratteristico della specie seguente, scrivendo zero al quoziente: così dividendo lire 526. — 5 per 35, ho lire 15. — 7.

Quando il divisore contiene anch'esso diverse specie, ecco la regola. Si vuol dividere 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ per 42^{tese}. 5^{pie}. 4^{pol} in riprova del calcolo del secondo esempio (101). Riduco il divisore alla specie inferiore ultima, come quì le tese ai pollici; cioè moltiplico 42×6, aggiungendo al prodotto (che son le tese ridotte in piedi) i 5 piedi del divisore, ed

```
tese pie. pol.          | 18.   6. 8
                        ------------
42. 5.4 — ʒ 786.   5. 11 1/9 × 72
42 ×6      56613.  6. 8
257×12     25733
3088        1029×20
           20586
            2058×12
           24704
              00
```

ho 257; moltiplico questo 257×12, e al prodotto (che son le tese e i piedi ridotti in pollici) aggiungo 4 ed ho 3088 pollici o sia $\frac{3088}{72}$ di tesa. Dipoi moltiplico per 72 le lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$. (E' chiaro in fatti che per dividere questa quantità per una frazione, dee cominciarsi dal moltiplicarla per il suo denominatore (67)). Finalmente divido il prodotto, che è lire 56613. 6. 8 per 3088 come nell'esempio premesso, e trovo il cercato quoziente 18. 6. 8.

Dovendo divider ʒ 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ per ʒ 18. 6. 8 prezzo di una tesa, per avere il quoziente in

tese, riduco le specie inferiori a rotto della specie superiore, ed ho $\mathfrak{Z}\,18.6.8 = 18\frac{1}{3} = \frac{55}{3}$; $\mathfrak{Z}\,786.5.11\frac{1}{9} = 786\frac{8}{27}$; onde $786\frac{8}{27} : \frac{55}{3} = 2358\frac{8}{9} : 55 =$ tes. $42\frac{8}{9} = 42.5.4$.

104. Per ridurre un numero m' di monete d'una specie qualunque ad un numero m di monete d'un'altra e reciprocamente, osservo che una moneta d'ambedue le specie essendo un numero q', q di monete omogenee di specie infima come di *Quattrini*, dovrà aversi $qm = q'm'$, formula generale della riduzione quando son dati q, q', ed m o m'. Così se m sieno *Lire Toscane* (alle quali ordinariamente si riducon tra noi tutte l'altre monete) ed m' sieno 1°. *Paoli*, avremo $q = 60$, $q' = 40$ e $60m = 40m'$ cioè $3m = 2m'$; 2°. *Papetti*, avremo $q' = 76$ e $60m = 76m'$ cioè $15m = 19m'$; 3°. *Pezze*, avremo $q' = 345$ e $60m = 345m'$ cioè $4m = 23m'$ ec. ec.

Queste son le regole principali dell'Aritmetica. Per insegnare in un modo più generale *la Formazion delle Potenze, l'Estrazion delle Radici, la Regola del Tre* ec., premetteremo i principj del Calcolo Algebrico.

ELEMENTI D'ALGEBRA

L'Algebra è una specie d'Aritmetica universale, i cui principali vantaggi sono 1°. di far vedere in un modo generale ciò che l'Aritmetica dimostra per casi particolari: 2°. di condur prontamente a risultati che rare volte l'Aritmetica ottiene senza lunghe ed incerte operazioni: 3°. di esprimere con singolar laconismo questi stessi risultati che l'Aritmetica esprime con molte parole: 4°. di risolvere un'infinità di Problemi che l'Aritmetica non potrebbe: 5°. di dare all'Aritmetica stessa in operazioni complicate molti metodi che diminuiscon la fatica.

Nozioni Preliminari.

Ogni Scienza ha il suo linguaggio; l'Algebra ha il suo, e più singolare dell'altre; onde convien cominciare dal rendersi familiari l'espressioni di cui ella si serve.

105. Tutte le cifre hanno un valor determinato per convenzione: così benchè la cifra 3 possa significare egualmente 3 pollici, 3 tese, 3 leghe ec., non si può farle significar cento o mille; onde le cifre non son segni assai generali per rappresentar tutte le quantità possibili; perciò si pensò a sostituir loro altri *segni* il cui valore non essendo fissato, potesse variare ad arbitrio del Calcolatore. Questi segni son le lettere dell'Alfabeto volgare e greco, le quali di più hanno talora un piccolo *apice* come a', b'' e si legge *a prima*, *b seconda* ec.; ciascuno le conosce e con la loro generalità son suscettibili di qualunque valore, che dato loro in principio si conserva poi sino al fine dell'operazione.

106. Posto ciò, si chiama *Espressione Algebrica* tutto ciò che è notato con lettere, e si è convenuto di rappresentar con certi altri segni le diverse operazioni che posson farsi su queste espressioni; così per sommare a, b, si scrive $a+b$ (14); per sottrarre c da d, si scrive $d-c$ (17); per esprimer b maggiore di a, si scrive $b>a$, e per esprimerlo minore, si fa $b<a$. La moltiplicazione di x per y si indica con $x\times y$ o con $x.y$ (26), anzi si stima fatta quando una lettera è seguita da una o più altre senza in-

terruzione di segni: così $xy=x\times y$, $abc=a\times b\times c$. La divisione di a per b si accenna con $\frac{a}{b}$ o con $a:b$ (37).

107. Si chiama *Monomio* o *Termine* ogni quantità che non è unita ad alcun'altra coi segni $+,-$. Dalle lettere componenti il monomio risultano le sue *dimensioni*, ed ogni lettera forma una dimensione: così a è un monomio d'una dimensione, mn lo è di due, bcd di tre, $\frac{zz}{\varphi}$ di una, $\frac{\omega}{\beta}$ di niuna, nel qual caso il monomio si riduce a semplice *numero*: tutto ciò si intenderà meglio nella Geometrìa. Si chiama *Binomio*, *Trinomio* ec. la riunione di due, tre ec. termini, e in generale più termini riuniti diconsi *Polinomio*, che sarà *omogeneo* se tutti i suoi termini abbiano lo stesso numero di dimensioni.

108. I termini sono o *Positivi* o *Negativi*; quelli son preceduti dal segno $+$, questi dal $-$, con che si indica che gli uni sono opposti agli altri nel loro modo di esistere: così se un credito si nota col $+$, un debito dovrà notarsi col $-$; se una linea che comincia da un punto e va a destra o all'insù, si esprime col $+$, un'altra che cominci dal punto stesso e vada a sinistra o all'ingiù, dovrà esprimersi col $-$. Or poichè un credito si annulla da un egual debito, è manifesto che lo *zero* sta in mezzo tra i termini positivi e i negativi; ed *un termine si dirà positivo o negativo secondo che sarà maggiore o minor di zero*. Del resto quando il primo termine d'un polinomio non ha segno, si ha per positivo..

109. Spesso dovrebbero scriversi i termini

stessi in una stessa quantità, come $a+a+a-b-b+d$: si è immaginato perciò di scrivergli una sola volta, segnando con una cifra a sinistra quante volte dovrebbero ripetersi. Quindi $a+a+a-b-b+d$ diventa $3a-2b+d$, e la cifra 3, 2 che precede i termini, si chiama *Coefficiente*; se ella manchi, il coefficiente è 1; così nell'esempio precedente, la lettera d è un'espression compendiosa di $1d$, ed $fh-pq=1fh-1pq$ ec.

110. Spesso accade che una quantità è moltiplicata per se stessa, e allora o si scrive due, tre ec. volte di seguito senza interruzion di segno (106) come aa prodotto di a per a, aaa prodotto di aa per a ec., o con una cifra a destra ed in alto si indica quante volte meno una la quantità dee moltiplicarsi in se stessa: così a^2 è un'espression compendiosa di aa, $a^3=aaa$, $a^4=aaaa$ ec. Queste cifre in alto diconsi *Esponenti*, e bisogna guardarsi dal confonderle coi coefficienti; i coefficienti indicano l'addizione, e gli esponenti la moltiplicazione: così $3a=a+a+a$, mentre $a^3=aaa$, e se $a=5$, viene $3a=15$ ed $a^3=125$.

111. Ogni lettera ha il suo esponente particolare: ma se questo è l'unità, si sottintende: così bc, è lo stesso che b^1c^1, $xxxyyz=x^3y^2z^1$. Per distinguer poi un esponente numerico n da un numero n d'apici (105), quest'ultimo si scrive (n): così a^n esprime a moltiplicata $n-1$ volte per se stessa, ma $a^{(n)}$ significa a con un numero n d'apici $'$, $''$, $'''$ ec.

112. Non debbon mai riunirsi sotto uno stesso coefficiente se non i *termini simili* cioè *formati con le stesse lettere affette respettivamente da-*

gli stessi esponenti in ciascun termine. Così $a+3a+4a$ son termini simili, poichè la stessa quantità a è presa una, tre, quattro volte; si posson dunque riunire sotto uno stesso coefficiente e scrivere $8a$.

113. Se in luogo di $+3a$ si abbia $-3a$; la stessa quantità a sarà sottratta tre volte: dunque dalle due quantità positive $a+4a=5a$ bisognerà sottrar $3a$ e il resto sarà $2a$; e se si abbia $a+3a-4a$, le quantità positive distruggeranno le negative. Queste *Riduzioni* debbon farsi ogni volta che han luogo, e son frequentissime. Eccone la regola:

114. *Quando un' espressione algebrica ha dei termini simili, bisogna ridurgli ad un sol termine o scancellarli*. Si scancellano se con coefficienti eguali hanno segni contrarj: così $2a+b-2a-b$ va a o. Si riducono ad un sol termine 1°. se sono affetti dallo stesso segno; allora la somma dei loro coefficienti è il coefficiente del nuovo termine; così $a+3a+4a=8a$, $\gamma\varepsilon-\omega+5\gamma\varepsilon=6\gamma\varepsilon-\omega$, $f^2-3x+4f^2-8x=5f^2-11x$: 2°. se hanno segni contrarj; allora la differenza dei loro coefficienti è il coefficiente del nuovo termine preceduto dal segno del maggiore: così $12m-5n^2-8m+4nn=4m-n^2$, $\frac{3}{4}\pi+2\varphi-\frac{1}{4}\pi-15\varphi=\frac{1}{2}\pi-13\varphi$.

115. E' uso nei calcoli algebrici di osservar l'ordine alfabetico nelle lettere di ciascun termine: così si scrive piuttosto abc che cba, piuttosto $\gamma\pi$ che $\pi\gamma$: quest' uso contribuisce a far meglio conoscere i termini simili.

Somma Algebrica.

116. Per sommar le quantità algebriche basta scriverle l'une dopo l'altre coi segni che

hanno, e farne in seguito la riduzione se ha luogo: così la somma di cdn, $4m^2$ è $cdn+4m^2$; quella di $xy+z^3$, $u-t-z^3$ è $xy+u-t$; quella di $2m+3n-q$, $q-2m-3n$ è zero; e di $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ è $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

Sottrazione Algebrica.

117. Per sottrarre una quantità intera o rotta da un'altra le cangio i segni e la scrivo allato all'altra, facendo la riduzione se ha luogo: così sottraggo p da r scrivendo $r-p$; sottraggo m^3-n^4-g da x^3z-u^2, scrivendo $x^3z-u^2-m^3+n^4+g$, e per sottrarre $\frac{c}{d}$ da $\frac{a}{b}$ scrivo $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

118. Questa mutazion di segni nella quantità da sottrarsi è chiara quando si muta $+$ in $-$, poichè per indicar la sottrazione d'una quantità positiva p bisogna darle la forma negativa $-p$ (108): ma non par sì chiaro che per sottrarre una quantità negativa $-p$, bisogni scriver $+p$.

119. Rammentiamoci però che la quantità sottratta dee col resto della sottrazione render la quantità da cui si sottrasse (22): or questa non si riavrebbe senza mutare i segni alla quantità da sottrarsi; per esempio, se $-g$ fu sottratto da c, il resto sarà $c+g$, perchè sommando $c+g$ con $-g$, torna c.

120. Si osservi che per indicar la differenza positiva di due quantità a,b, qualunque di esse sia la maggiore, si adopra il particolar segno $\backsim$ e si scrive $a \backsim b$, il che vuol dire nel tempo stesso $a-b$ se $a>b$, e $b-a$ se $a<b$.

Moltiplicazione Algebrica.

Ogni termine algebrico è composto di quattro parti: del Segno che lo precede, del Coef-

ficiente da cui è affetto, delle Lettere che contiene, e degli Esponenti respettivi di esse. Ora la moltiplicazione di due termini algebrici esige delle regole per tutte queste parti.

121. Regola per i Segni. *I fattori con segni simili danno il prodotto col* $+$, *con segni diversi lo danno col* $-$: così $a\times b=ab$, $-a\times -b=ab$, $a\times -b=-ab$, $-a\times b=-ab$. Infatti moltiplicar per esempio -4×6, significa sommar sei volte il numero -4, ciò che manifestamente dà -24 (116); e moltiplicar -5×-6 significa negare o sottrar sei volte da zero il numero -5, ciò che con pari evidenza dà $+30$ (117). E' però assurdo il dire che $+\times+$ dà $+$, che $+\times-$ dà $-$ ec., perchè si moltiplicano le quantità, non i segni: ma l'uso autorizza tali locuzioni.

122 Regola per i Coefficienti. *I coefficienti si moltiplicano insieme come nell' Aritmetica, e il loro prodotto è il coefficiente del prodotto algebrico*: così $3a\times 9b=27ab$...... $\frac{1}{2}c\times\frac{1}{2}p=\frac{1}{4}cp=\frac{cp}{4}$.

123. Regola per le Lettere. *Le lettere*, come si è detto (106), *intendonsi moltiplicate quando sono scritte di seguito senza segno intermedio*: così $12x\times 5y=60xy$; $60xy\times 3az=180axyz$.

124. Regola per gli Esponenti. *Quando una lettera con esponente dee moltiplicarsi per la lettera stessa pur con esponente, bisogna scriverla con un esponente eguale alla somma dei due primitivi*: così $8a^2b^3\times 4a^5b=32a^7b^4$. Questa regola viene dalla passata; poichè $8a^2b^3\times 4a^5b=8aabbb\times 4aaaaab=32aaaaaaabbbb=32a^7b^4$ (110). Ciò supposto

125. La moltiplicazione dei polinomj si fa moltiplicando ciascun termine d'un fattore per ciascun termine dell'altro, e in fine si riduce

se occorra. Debba moltiplicarsi $a+3c-d$ per $2a-d$; moltiplico primieramente a per $2a$ (il prodotto è $2a^2$); quindi $+3c$ per $2a$, $(+6ac)$; poi $-d$ per $2a$, $(-2ad)$. Passo al secondo termine del moltiplicatore e moltiplico a per $-d$, $(-ad)$; poi $+3c$ per $-d$, $(-3cd)$; infine $-d$ per $-d$, $(+d^2)$. Sommo tutti questi prodotti e fatta la riduzione, ho per prodotto totale $2a^2+6ac-3ad-3cd+d^2$. Ecco degli altri esempj

$$\begin{array}{lr} & a+3c-d \\ & 2a-d \\ \hline & 2a^2+6ac-2ad \\ & -ad-3cd+d^2 \\ \hline \textit{Somma ridotta} & 2a^2+6ac-3ad-3cd+d^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+x \\ a-x \\ \hline a^2+ax \\ \quad -ax-x^2 \\ \hline a^2 \quad\quad -x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2+2ac-bc \\ a-b \\ \hline a^3+2a^2c-abc \\ -a^2b-2abc+b^2c \\ \hline a^3-a^2b+2a^2c-3abc+b^2c \end{array}$$

I rotti algebrici si moltiplicano come i numerici: così $\frac{x}{y}\times\frac{u}{z}=\frac{ux}{yz}$..... $\frac{c}{d}\times\frac{m+n}{p+q}=\frac{cm+cn}{dp+dq}$ .... $\frac{a+b}{1-x}\times\frac{a-b}{1+x}=\frac{a^2-b^2}{1-x^2}$.

Talvolta la moltiplicazione s' indica solamente, e si coprono i fattori con una linea o si chiudon tra parentesi: così il prodotto di $\overline{a+3d-d^2}$ per $\overline{b^2-6d^2}$ si scrive $\overline{a+3d-d^2}\times\overline{b^2-6d^2}$ ovvero $(a+3d-d^2)(b^2-6d^2)$. Se occorra effettuar l'operazione quando i fattori son molti, si moltiplicano i primi due, poi il lor prodotto si moltiplica per il terzo, e così di mano in mano. Per esempio in vece di $4a^2bc-12a^3c^2+5axy-10ax^2y^3-8a^2c-15a^2xy$, si può scrivere

$(b-3ac-2)4a^2c+(1-2xy^2-3a)5axy$: e in luogo di $s^4-ps^3+qs^2-s$, si scrive $(s^3-ps^2+qs-1)s$.

Divisione Algebrica.

Anche nella divisione debbonsi osservare alcune regole per i Segni, per i Coefficienti, per le Lettere e per gli Esponenti.

126. Regola per i Segni. Si è dimostrato (121) che $-4\times6=-24$; dunque (35) $\frac{-24}{-4}=6$, e $\frac{-24}{6}=-4$, cioè anche nella divisione *le quantità con segni simili danno il quoziente col* $+$, *e con segni diversi lo danno col* $-$.

127. Regola per i Coefficienti. *I Coefficienti si dividono come nell' Aritmetica scrivendone il quoziente esatto se son divisibili senza resto, o formandone un rotto se non lo sono.*

128. Regola per le Lettere. Poichè $a\times b=ab$ (121), sarà (35) $\frac{ab}{b}=a$ ovvero $\frac{ab}{a}=b$, cioè *dalle Lettere del dividendo si scancellan quelle del divisore, e ciò che resta è il quoziente*; così se si chieda *quante volte* m *entri in* mpr? si risponderà che *vi entra* pr *volte*, poichè scancellando *m* da *mpr* resta *pr* per quoziente. *Non trovandosi nel dividendo le lettere stesse del divisore, se ne forma un rotto come nei numeri.*

129. Regola per gli Esponenti. *Quando una lettera con esponente dee dividersi per la stessa lettera pur con esponente, bisogna scriverla nel quoziente con un esponente eguale alla differenza dei due primitivi*: così dividendo $6a^4b^3$ per ab^2, il quoziente sarà $6a^{4-1}b^{3-2}=6a^3b$. Questa regola vien dalla passata; poichè se dal dividendo $6aaaabbb$ si scancelli il divisore abb, resta il quoziente stesso $6a^3b$.

Esempj. Per dividere $4ac^3de^3$ per $-2bd^3e^3f$, io dico: $+4$ diviso per $-2=-2$ che scrivo nel quoziente: passo alle lettere e scancello nel dividendo quelle del divisore formando un rotto dell'altre: quindi il quoziente cercato è $-\frac{2ac^3}{bd^2f}$. Così $\frac{3abc}{3abc}=1$ ..... $\frac{-4bd}{2bd}=-2$ .... $\frac{3a^2b}{5ac}=\frac{3ab}{5c}$ .... $-\frac{12abd}{3a}=-4bd$ .... $\frac{4a^3b^2d}{4abd}=a^2b$ ec.

130. Queste regole si applicano ai rotti de' polinomj quando una stessa quantità è in tutti i termini del dividendo e del divisore: così $\frac{ax-2abx}{ax+ax^2}=\frac{1-2b}{1+x}$, scancellando ax in tutti i termini e mettendo 1 in suo luogo ove è sola (109). Del pari $\frac{3x^2}{3ax^2+3b^2x^2}=\frac{1}{a+b^2}$; $\frac{4a^2x^2+3a^3b^2x}{a^2x-a^2bx}=\frac{4x+3ab^2}{1-b}$.

131. Si dividono anche i polinomj come nell'Aritmetica, e per risparmiar fatica si *ordinano* i termini in modo che in ambedue sia quello il primo, in cui una lettera qualunque, purchè comune ad ambedue, ha il massimo esponente; che il secondo abbia la lettera stessa coll' esponente prossimamente minore ec. Ecco un dividendo e un divisore *ordinati* per a:
$a^2+2ab+b^2$ $\quad a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. Si sarebbe anche potuto ordinarli per b: ma talvolta è più comodo di preferir la lettera che non trovasi collo stesso esponente in più termini; per esempio, abbiamo preferita la lettera x a b e c nella divisione che riportiamo per disteso

$$
\begin{array}{l|l}
 & -3x^3+cx \\
\hline
-3b^2x^2+b^2cx & 9b^2x^5-3b^2cx^4-3b^2cx^3+b^2c^2x^2 \\
 & -9b^2x^5+3b^2cx^4+3b^2cx^3-b^2c^2x^2 \\
\hline
 & \quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0
\end{array}
$$

dico dunque, $\frac{9b^2x^5}{-3b^2x^2} = -3x^3$, che pongo al quoziente: moltiplico il divisore per questo termine e sottraggo il prodotto $9b^2x^5 - 3b^2cx^4$ dal dividendo. Continuo la divisione, e dico: $\frac{-3b^2cx^3}{-3b^2x^2} = +cx$, che pongo al quoziente; moltiplico il divisore per questo nuovo termine e sottraggo il prodotto $-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$ dal dividendo, e nulla resta; dunque il quoziente esatto è $-3x^3 + cx$. Moltiplicandolo per il divisore, ritrovo il dividendo; dunque l'operazione è buona.

132. Serviranno d'esercizio espressioni simili a questa $\frac{a^5+m^5}{a+m}$, che fanno nascere de' nuovi termini nel dividendo, a misura che si prosegue la divisione, come

$$\begin{array}{lllll}
 & | \; a^2 - am + m^2 & & & \\
\hline
a + m \; \text{-----} & a^3 + m^3 & & & \\
 & -a^3 & -a^2 m & & \\
\hline
\text{Primo Resto} & 0 + m^3 & -a^2 m & & \\
 & & +a^2 m & + am^2 & \\
\hline
2^{\circ}.\ \text{R}^{\circ}. & +m^3 & 0 & +am^2 & \\
 & -m^3 & & -am^2 & \\
\hline
 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Il quoziente è dunque $a^2 - am + m^2$. Dividendo $1 - x^{12}$ per $1 - x$, il quoziente è $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11}$. Così si trova che $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 +$ ec. all' infinito; e che $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$ ec. + ec. in infinito.

133. La divisione dei rotti algebrici per interi o per altri rotti, o d'un intero per un

rotto, non ha difficoltà (67): così si divide $\frac{m}{n}$ per $\frac{s}{t}$ scrivendo $\frac{mt}{ns}$: si divide $\frac{b}{c}$ per $4m$ scrivendo $\frac{\frac{b}{c}}{4m}=\frac{b}{4cm}$ (si fa più lunga la linea che separa il dividendo dal divisore per indicare che dee dividersi $\frac{b}{c}$ per $4m$, e non b per $\frac{c}{4m}$); si divide x per $\frac{p}{q}$ scrivendo $\frac{x}{\frac{p}{q}}=\frac{qx}{p}$.

134. Questi rotti si riducon poi all'espression più semplice con ordinar le due quantità (131), e quindi o risolverle nei loro fattori (125) o cercarne il massimo comun divisore come nei numeri (56): così poichè $x^2+px=x(x+p)$, e $bmx+bmp=bm(x+p)$, sarà $\frac{px+x^2}{bmx+bmp}=\frac{x(x+p)}{bm(x+p)}=\frac{x}{bm}$; parimente giacchè dividendo a^2-x^2 per $a+x$ si trova un quoziente esatto, sarà $a+x$ il massimo comun divisor di $\frac{a+x}{a^2-x^2}=\frac{1}{a-x}$. Per altro non sempre si conoscon sì presto gli elementi o fattori delle quantità algebriche, nè sempre è loro applicabile il nudo metodo del massimo comun divisore.

135. In generale (379) per avere i fattori delle quantità x^4-z^4 ed $x^5-z^2x^3$, 1°. pongo $x^4-z^4=0$, onde $x^4=z^4$ ed $x^2=\pm z^2$: dunque i fattori di x^4-z^4 sono x^2+z^2 ed $x^2-z^2=(x+z)(x-z)$: 2°. pongo $x^5-z^2x^3=0$, cioè riducendo, $x^2-z^2=0=(x+z)(x-z)$. Dal che si ha $\frac{x^4-z^4}{x^5-z^2x^3}=\frac{(x^2+z^2)(x+z)(x-z)}{x^3(x+z)(x-z)}=\frac{x^2+z^2}{x^3}$. Lo stesso metodo darà $\frac{12x^2-15xy+3y^2}{6x^3-6x^2y+2xy^2-2y^3}=\frac{12x-3y}{6x^2+2y^2}$.

136. Parimente per aver (56) il massimo comun divisore, avverto che delle due quantità proposte posso dividere o moltiplicar l'una per qualunque quantità che non abbia alcun divisor comune coll'altra: ciò non altera il divisor

cercato, che per ipotesi deve esser comune ad ambedue. Ripiglio il rotto $\frac{(A)\ 12x^2 - 15xy + 3y^2}{(B)\ 6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3}$ ed osservo 1°. che A può dividersi per 3 ma non B, e B per 2 ma non A; divido dunque, e viene $\frac{(C)\ 4x^2 - 5xy + y^2}{(D)\ 3x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3}$: 2°. che per poter dividere D per C giusta il metodo (56), bisognerebbe moltiplicar D per 4. e ciò può farsi giacchè 4 non ha alcun divisor comune con C; moltiplico dunque, e poi dividendo D per C, resta (E) $19xy^2 - 19y^3$: 3°. che E può dividersi per $19y^2$ ma non C; divido dunque, ed E diventa (F) $x - y$ per cui dividendo C, nulla avanza; dunque F è il massimo comun divisore di A, B da cui si ha $\frac{12x - 3y}{6x^2 + 2y^2}$.

Formazione delle Potenze.

137. Il prodotto d'una quantità per se stessa dicesi *Potenza*, e gli esponenti ne distinguono i gradi: così a^2 è la *seconda potenza* di a, la *terza* è a^3, e in generale la potenza m^{sima} di a è a^m, qualunque sia m; onde anche a^0, ed a^1 posson dirsi la potenza *zero* e la potenza *prima* di a. La quantità a è la *Radice* di queste diverse potenze, e il nome di essa dipende dalle potenze corrispondenti. Si vedrà nella Geometrìa perchè la prima potenza di una quantità b si chiama anche *Potenza Lineare* di essa, la seconda b^2 *Quadrato*, la terza b^3 *Cubo*: le potenze superiori b^4, b^5 ec. diconsi la *quarta*, *quinta* ec. potenza di b.

138. Reciprocamente la *Radice seconda* o *quadra* di c^2 è c, la *terza* o *cuba* di a^3 è a, la *quarta* di x^4 è x ec. Ora poichè la prima potenza di a è $a = a^1$, la seconda è $a^2 = a.a$, la terza è $a^3 = a.a.a$ ec., si ha questa regola generale:

139. *Per elevare una quantità a una potenza data, bisogna moltiplicarla per se stessa tante vol-*

tè meno una, quante unità contiene l' esponente della potenza: così per elevar 9 alla terza potenza si dice: $9.9.9=729$: così il quadrato di $\frac{1}{3}$ è $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, il suo cubo è $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$ ec.; il quadrato di $\frac{1}{10}$ è $\frac{1}{100}$, il suo cubo è $\frac{1}{1000}$ ec.: onde il valor d' un rotto diminuisce alzandolo a più sublimi potenze, e la diminuzione cresce a misura che il denominatore è più grande del numeratore.

140. Quanto all' epressioni algebriche, I°. ad ogni lettera d' un monomio si dà l' esponente della potenza proposta: così la quinta potenza di abc è $a^5b^5c^5$: la potenza m di $\frac{ab}{cd}$ è $\frac{a^mb^m}{c^md^m}$; e se il monomio ha un coefficiente, si alza anche questo alla potenza data: il cubo di $\frac{2ab}{5fg}$ è $\frac{8a^3b^3}{125f^3g^3}$: II°. se son già nel monomio altri esponenti, si moltiplican tutti per quello della potenza proposta: così la quarta potenza di a^3b^2 è $a^{12}b^8$; e in generale la potenza m di $\frac{a^3b^n}{cd^r}$ è $\frac{a^{3m}b^{mn}}{c^md^{mr}}$ (139). III°. per un polimonio, basta talora indicar la potenza a cui vuole alzarsi chiudendolo tra due parentesi: così $(a+b)^m$ indica la potenza m^{sima} del binomio $a+b$.

141. Dunque 1°. se $m=2$, il binomio $a+b$ che rappresenta tutti i binomj possibili, dee moltiplicarsi una volta in se stesso, e si trova $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$; dunque *il quadrato di un binomio contiene il quadrato* a^2 *del primo termine, il doppio prodotto* 2ab *del primo nel secondo, e il quadrato* b^2 *del secondo*. Questa regola non ha eccezione; così l' Algebra dà risultati affatto generali, mentre l' Aritmetica vi

giunge per analogìa. I segni del quadrato son tutti positivi quando i termini del binomio hanno lo stesso segno: se lo hanno diverso, il doppio prodotto è negativo: così $(3mn-4m^2)^2 = 9m^2n^2 - 24m^3n + 16m^4$.

Alzando a quadrato il trinomio $a+b+c$, si ha $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$, ove è il quadrato di ciascun termine coi doppj prodotti dei termini a 2 a 2. Perciò $(b+2c-y)^2 = b^2+4bc+4c^2-2by-4cy+y^2$.

142. Osservate che per compire il quadrato di un binomio, quando se ne hanno già i due primi termini, basta aggiungergli il quadrato della metà del *Coefficiente totale* del secondo (chiamo così tutto ciò che o in cifre o in lettere va unito in questo secondo alla lettera per cui è ordinata la quantità): così per compire il quadrato x^2+2ax prendo a, metà di $2a$ coefficiente totale del secondo termine $2ax$, e aggiungo il suo quadrato a^2 ai due dati termini x^2+2ax, il che mi dà il quadrato perfetto $x^2+2ax+a^2$: così il quadrato completo di x^2+ax è $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. Questa osservazione verrà spesso a bisogno.

In generale sieno m ovvero $m+n$ ec. i termini ignoti del binomio, trinomio ec. di cui vuol compirsi il quadrato, e si debba compire x^2+ax: fatta $x+m$ la sua radice, sarà $2xm = ax$ ed $m = \frac{a}{2}$, onde l'intero quadrato $(x+\frac{a}{2})^2 = x^2+ax+\frac{a^2}{4}$ come sopra. Debba compirsi $\frac{f^2}{x^2}+\frac{b}{x}+c$; posta $\frac{f}{x}+m+n$ la sua radice, sarà $\frac{2fm}{x} = \frac{b}{x}$ e $\frac{2fn}{x} = c$, onde $m = \frac{b}{2f}$ ed $n = \frac{cx}{2f}$: perciò l'intero quadrato $(\frac{f}{x}+\frac{b}{2f}+\frac{cx}{2f})^2 = \frac{f^2}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{b^2}{4f^2}+c+\frac{bcx}{2f^2}+\frac{c^2x^2}{4f^2}$. Facendo $2mn = c$, si avrebbe un diverso quadrato.

Con questo metodo può anche eliminarsi un dato termine d' un quadrato, salva la sua integrità. Aggiungo $\pm r$ (preso il segno contrario a quello del termine da eliminarsi) alla radice di sopra $\frac{f}{x}+\frac{b}{2f}+\frac{cx}{2f}$, e pongo $\frac{2fr}{x}=$ al termine da eliminarsi, come $\frac{b^2}{4f^2}$: sarà dunque $\frac{2fr}{x}=\frac{b^2}{4f^2}$ ed $r=\frac{b^2x}{8f^3}$; onde $(\frac{f}{x}+\frac{b}{2f}+\frac{cx}{2f}-\frac{b^2x}{8f^3})^2=\frac{f^2}{x^2}+\frac{b}{x}+c+\frac{bcx}{2f^2}+\frac{c^2x^2}{4f^2}-\frac{b^3x}{8f^4}-\frac{b^2cx^2}{8f^4}+\frac{b^4x^2}{64f^6}$, quadrato in cui più non è il termine $\frac{b^2}{4f^2}$.

143. Dunque 2°. se $m=3$ (140), il binomio $a+b$ dovrà moltiplicarsi due volte per se stesso, o il suo quadrato per la prima potenza, e si trova $(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; dunque *il cubo d' un binomio contiene i cubi de' suoi due termini e il triplo prodotto del quadrato di ciascun di essi per l' altro*. I segni son tutti positivi o negativi quando lo son quelli del binomio; così $(-m-2n)^3$ ovvero $-(m+2n)^3=-(m^3+6nm^2+12n^2m+8n^3)$ ove il segno $-$ precedente la parentesi, mostra che debbon cangiarsi tutti i segni compresi in essa: ma se un de' termini del binomio è negativo, quelli del cubo lo sono nelle potenze impari del termine negativo: così $(-p+q)^3=-p^3+3p^2q-3pq^2+q^3$.

144. Se bisogni compire un cubo $y^3\pm py$, posto m il termine ignoto della sua radice, sarà essa $y\pm m$; dunque $3y^2m=py$, $m=\frac{p}{3y}$, ed $(y\pm\frac{p}{3y})^3=y^3\pm py+\frac{p^2}{3y}\pm\frac{p^3}{27y^3}$. Perciò se sia $y\pm\frac{p}{3y}=x$, verrà $(y\pm\frac{p}{3y})^3\mp p(y\mp\frac{p}{3y})=y^3\pm\frac{p^3}{27y^3}=x^3\mp px$.

145. Dunque 3°. se $m=4$ (140), si avrà $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$: e così dell' altre potenze, che hanno tutte tanti termini più uno, quante sono unità nei loro esponenti. Ma il passar per le potenze intermedie prima di giungere alla cercata, rende il calcolo assai lungo e sem-

pre indiretto. Perciò i Geometri del passato secolo vollero un metodo che direttamente gli guidasse allo scopo. Il metodo fu trovato, e Newton ebbe la gloria di generalizzarlo. Ecco la formula che trovò e che dal suo nome è detta la *Formula del Binomio di Newton*:

$$(a \pm b)^m = \begin{cases} a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \times \\ a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \pm \text{ec.}, \\ \text{e così di seguito (poichè la legge con} \\ \text{cui procedono i termini è manifestissi-} \\ \text{ma) fino al termine ultimo che sarà} \\ \frac{m(m-1)(m-2) \ldots\ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m} b^m = b^m. \end{cases}$$

146. Infatti alzare il binomio $a \pm b$ alla potenza m è un moltiplicarlo $m-1$ volte per se medesimo, onde questa potenza è il prodotto di un numero m di fattori eguali; dunque se sia $a \pm b = 0$, ciò che si sa d'un' equazione del grado m (370) avrà luogo per la potenza m di $a \pm b$. Quindi il primo termine sarà a^m (366). Il secondo sarà a^{m-1} con un coefficiente eguale alla somma delle radici $\mp b$ prese m volte con segni contrarj (370), cioè sarà $\pm m a^{m-1} b$. Il terzo sarà a^{m-2} con un coefficiente eguale alla somma dei prodotti b^2 delle radici $\mp b$ prese a 2 a 2 coi loro segni (370), cioè sarà $\frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2$ (337). Il quarto sarà a^{m-3} con un coefficiente eguale alla somma dei prodotti $\mp b^3$ delle radici $\mp b$ prese a 3 a 3 con segni contrarj (370), cioè sarà $\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$ (337) ec. E' facile di vedere (12.999, 5°.) che la formula è la stessa quando pur l'esponente razionale m divenisse irrazionale o trascendente.

147. Risulta da questa formula che per trovare il coefficiente d'un termine basta moltiplicar quello del termine che precede per l'esponente ivi dato ad a, e dividere il prodotto per il numero dei termini precedenti: così fatto $m = 7$, il primo termine di $(a+b)^7$ sarà $a^m = a^7$; il secon-

do $ma^{m-1}b = \frac{1.7}{1} a^6 b = 7a^6 b$; il terzo $\frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2$ $= \frac{7.6}{2} a^5 b^2 = 21 a^5 b^2$; il quarto $\frac{m(m-1)(m-2)}{2. \quad 3} a^{m-3} b^3$ $= \frac{21.5}{3} a^4 b^3 = 35 a^4 b^3$, dopo il qual termine che è l' $\frac{m+1}{2}$ ^{simo} e perciò uno dei due *medj* o *massimi* della potenza (se la potenza fosse pari il *medio* o *massimo* sarebbe il solo $\frac{m+2}{2}$ ^{simo}) non vi è bisogno di calcolare i coefficienti dei termini che seguono, poichè tornano con ordine inverso i già trovati, e sono $+35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$. Si vede che il numero intero m nella formula va sempre scemando, giacchè successivamente diviene $m-1$, $m-2$, $m-3$ ec., onde infine si riduce a zero e allora la potenza è compita. Non così quando m è rotto.

148. Del resto, se in luogo d'un binomio si abbia un polinomio $n+p+q$, fatto $p+q=b$, si alzerà alla richiesta potenza il binomio $n+b$, e quindi vi si sostituirà il valor di b.

149. La formula può anche esprimersi in un modo più semplice; poichè essendo $(P+PQ)^m = P^m + mP^m Q + \frac{m(m-1)}{2} P^m Q^2 +$ ec., se si rappresenti con A il primo termine P^m, con B il secondo ec., si avrà $(P+PQ)^m = P^m + mQA + \frac{m-1}{2} QB + \frac{m-2}{3} QC +$ ec.: e se l'esponente della potenza cercata si supponga $\frac{m}{n}$, si avrà più generalmente $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} QA + \frac{m-n}{2n} QB +$

$\frac{m-2n}{3n}$ QC + ec. Così se si voglia $(2a+3z)^4$, sarà $m=4$, $n=1$, $P=2a$, $PQ=3z$ onde $Q=\frac{3z}{2a}$, e avremo $P^{\frac{m}{n}}=16a^4$, $\frac{m}{n}QA=4.16a^4.\frac{3z}{2a}=96a^3z$, $\frac{m-n}{2n}\times QB=\frac{3}{2}.96a^3z.\frac{3z}{2a}=216a^2z^2$, $\frac{m-2n}{3n}QC=\frac{2}{3}.216a^2z^2.\frac{3z}{2a}=216az^3$, $\frac{m-3n}{4n}QD=\frac{1}{4}.216az^3.\frac{3z}{2a}=81z^4$.

150. Si sa (370) che nell' equazione $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2}$ — ec. $=0$ la somma delle radici è A, quella dei lor prodotti a 2 a 2 è B, ec.; dunque se S^2 sia la somma dei quadrati di ciascuna radice, sarà (141) $S^2+2B=A^2$ ed $S^2=A^2-2B$, o (se la data equazione manchi del secondo termine) $S^2=-2B$. La somma dei cubi, delle quarte potenze ec. si avrà con un simile raziocinio.

Modo di esprimere e di calcolare ogni sorta di Potenze per mezzo dei loro Esponenti.

La *Teorìa degli Esponenti* è una delle più importanti dell' Algebra elementare: ma 1°. ella ha luogo per le sole potenze che hanno le stesse lettere: 2°. non riguarda la somma e la sottrazione, e solo comincia dalla moltiplicazione. Ora si è veduto altrove (124, 129) come si trattano gli esponenti d'una lettera che dee moltiplicarsi o dividersi per se stessa; così $a^2\times a^6 = a^{2+6}=a^8$ e generalmente $c^m\times c^n=c^{m+n}$; del pari $a^8 : a^2=a^{8-2}=a^6$ e generalmente $c^m : c^n = c^{m-n}$.

151. Posto ciò, si scriverà secondo la regola precedente, $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$ *potenza negativa*: ma $a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2}$; dunque $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$.

152. Sostituendo $n, n+m$ in luogo degli esponenti 3, 5, si avrà $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, espression ge-

nerale di tutte le potenze negative di qualsisia quantità; dunque (e questa regola è di grand' uso) *ogni quantità con esponente negativo equivale all' unità divisa per questa medesima quantità coll' esponente stesso ma positivo.*

153. Quindi mutati i segni agli esponenti, si fan passar nel numeratore le quantità del denominatore e reciprocamente, salvo il valor del rotto: così $\frac{1}{a}=a^{-1}$, $\frac{c}{f}=cf^{-1}=\frac{f^{-1}}{c^{-1}}$, $\frac{mn}{p^2q^3}=mnp^{-2}q^{-3}$ $=\frac{p^{-2}q^{-3}}{(mn)^{-1}}$.

154. Sia ora la quantità a^{m-n}. Se $m>n$, l' esponente è positivo, il che non ha difficoltà: se $m<n$, l'esponente è negativo, il cui significato già si spiegò. Ma se $m=n$, viene $m-n=0$: or la potenza 0 di a non è 0 ma 1, poichè $a^0=a^{m-m}=\frac{a^m}{a^m}=1$.

155. Dunque *una quantità alzata alla potenza* 0 *eguaglia sempre l'unità*: così $a^0=b^0=(cd)^0=(\frac{\omega}{\varphi})^0=(p+q)^0=0^0=1$.

156. Infine se $m-n$ è un rotto, si rifletta (140) che per alzare a qualche potenza una quantità, bisogna moltiplicarne l' esponente per quello della potenza data: così per alzar b alla potenza 2, si fa $b^{1.2}=b^2$, e per alzar φ^3 alla potenza 4, si fa $\varphi^{3.4}=\varphi^{12}$.

157. Dunque all' opposto *per estrar qualche radice da una quantità, converrà dividerne l' esponente per quello della radice*; onde l' esponente rotto indica estrazion di radice: perciò la radice quadra di b^2 è $b^{\frac{2}{2}}=b$, la radice quarta di φ^{12} è $\varphi^{\frac{12}{4}}=\varphi^3$, e la radice m^{sima} di c^{2m} è $c^{\frac{2m}{m}}=c^2$.

158. In questi esempj si hanno radici esatte perchè la divisione riesce esatta: ma se vi sia un resto, bisogna contentarsi della semplice indicazione, e ciò ha introdotti nel calcolo gli esponenti rotti. Così la radice quadra di b è $b^{\frac{1}{2}}$, ed $\frac{1}{2}$ è irriducibile; onde *la potenza* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ec. *d'una quantità è la sua radice quadra, cuba ec.*

159. In generale *il grado della radice da estrarsi è sempre eguale al denominator del rotto*: così $a^{\frac{1}{n}}$, $b^{\frac{m}{n}}$ son le radici n^{sime} di a e di b^m.

160. Anche la lettera iniziale r della parola *radice* indica un'estrazion di radice: ma per distinguer meglio questo *Segno Radicale*, se n'è alterata la forma e si scrive $\surd$; cosicchè $\sqrt[2]{c}$, $\sqrt[3]{c}$ ec. è la radice *quadra*, *cuba* ec. di c; dunque $\sqrt[2]{c}=c^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{c}=c^{\frac{1}{3}}$ ec., scrivendo sul segno radicale la cifra che mostra il grado della radice, eccettuato il radicale quadrato che per convenzione non ha cifra alcuna: anzi alla sola radice quadra si dà il semplice nome di *radice*, e all'altre si aggiungono i nomi di *terza*, *quarta* ec. che le distinguono.

161. *Si trasforma* dunque *un radicale in potenza rotta dividendo per l'esponente del radicale quello della quantità sotto il segno* $\surd$: così $\sqrt{(c^2g^4)}=c^{\frac{2}{2}}\,g^{\frac{4}{2}}=cg^2 \ldots \sqrt[3]{(b^6q^9)}=b^{\frac{6}{3}}\,q^{\frac{9}{3}}=b^2q^3$ $\ldots \sqrt[5]{(ab^2q^3)}=a^{\frac{1}{5}}\,b^{\frac{2}{5}}\,q^{\frac{3}{5}}$, ec.

162. Ne'due primi esempj la divisione è senza resto, e la radice esatta che ne nasce, dicesi *razionale* o *commensurabile*. Ma nel terzo esempio la divisione non riesce, e la radice,

che può solo ottenersi per approssimazione, chiamasi *irrazionale*, *incommensurabile*, e anche *sorda*.

163. Per trasformare all' incontro potenze rotte in radicali, si dà per esponente al radicale il denominator del rotto, e si mette sotto il segno la data quantità col numeratore per esponente: così $(3a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3a} \ldots (x^2 - y^2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(x^2 - y^2)} \ldots$ $c^{\frac{4}{5}} p^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{c^4 p}$. Anche una potenza intera si trasforma in radicale d' un dato esponente riducendo a rotto l' intero (51): così per trasformare ab^2 in un radicale quadratico, cubico ec., si farà $ab^2 = a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{4}{2}} = \sqrt{a^2 b^4}$, $ab^2 = a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{a^3 b^6}$ ec., e perciò ancora $2\sqrt{3} = 2^{\frac{2}{2}} \sqrt{3} = \sqrt{2^2 . 3} = \sqrt{12}$, $5\sqrt[3]{2} = 5^{\frac{3}{3}} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 . 5^3} = \sqrt[3]{250}$ ec.

Spesso accade che le quantità delle quali si vuol la radice, sono affette da coefficienti numerici; allora bisogna sapere come si estragga dai numeri qualunque radice.

Estrazione della Radice quadra.

164. E' facile di aver la radice delle quantità algebriche commensurabili, e se ne è dato il metodo per i monomj; resta a darlo per i polinomj.

165. Sia $a^2 - 2ax + x^2$ di cui si cerca la radice quadra. Se questa quantità è un quadrato perfetto, la sua radice sarà un binomio (141), il primo termine sarà il quadrato della prima parte del binomio, e la troverò prendendo la radice quadra di a^2. Ora $\sqrt{a^2} = a$; scrivo dunque a in radice. Sottratto il suo quadrato a^2

dalla quantità proposta, mi resta $-2ax+x^2$. Or poichè $2ax$ dee essere il doppio prodotto della prima parte a della radice nella seconda (141), conoscerò questa seconda dividendo $2ax$ per il doppio di a cioè per $2a$ (35); il quoziente è $-x$ che

$$\begin{array}{l|l} & \text{Rad. } a-x \\ \text{Quad. } & a^2-2ax+x^2 \\ & -a^2 \\ & 0-2ax+x^2 \\ 2a-x & +2ax-x^2 \\ & 0 \end{array}$$

scrivo in radice, e accanto al divisor $2a$: e se $-x$ è la seconda parte della radice, moltiplicando $-x$ per tutta la quantità $2a-x$ e sottraendo il prodotto dal primo avanzo $-2ax+x^2$, non dee esservi resto. Infatti così avviene, onde $a-x$ è la radice cercata: ma potrebbe esser anche $-a+x$, perchè anche $(-a+x)(-a+x)=a^2-2ax+x^2$.

166. E questa (sia detto di passaggio) è l'origine dell'*ambiguità del radicale quadrato*, il quale, come si vede, è suscettibile e del segno $+$, e del segno $-$ cioè del doppio segno $\pm$, che si pronunzia *più o meno*, e che sempre è sottinteso quando non si scrive: così $\sqrt{c^2}$ equivale a $\pm\sqrt{c^2}$, cioè vale egualmente $+c$ e $-c$, senza che possa prendersi l'un valore piuttosto che l'altro, seppur lo stato della questione non escluda l'uno dei due; e lo escluderà infatti, se si sappia che il quadrato c^2 è nato da $+\times+$, o da $-\times-$, poichè in tal caso la radice sarà solamente $+c$ o $-c$.

167. Quando le quantità son semplici come $a^2-2ax+x^2$, un'occhiata fa vedere se hanno una radice esatta o no: in altro caso si ordini la quantità e si osservi *se abbia termini incompatibili con un quadrato perfetto*; non è difficile a conoscerli dai coefficienti, dagli esponenti,

dai segni ec. (141): così $2a^2+2ab+b^2 \ldots c^4-2c^2d^2-d^4 \ldots nm^3-m^2n^2+1$, non son quadrati ed è superfluo cercarne la radice esatta.

168. Osservata almeno la possibilità dell'estrazione richiesta, si procederà come sopra (165) ripetendo le medesime operazioni quante volte bisognerà. Ecco per disteso due altri esempj.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Radice} & |\; 2p^3+4q^2 \\
\text{Quadrato} & 4p^6+16p^3q^2+16q^4 \\
 & -4p^6 \\
 & \quad 0+16p^3q^2+16q^4 \\
\text{Divisore } 4p^3+4q^2 & \quad -16p^3q^2-16q^4 \\
 & \quad\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Radice} & |\; a^2-b^2-c^3 \\
\text{Quadrato} & a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2c^3+2b^2c^3+c^6 \\
 & -a^4 \\
 & \quad 0-2a^2b^2+b^4 \\
 & \quad +2a^2b^2-b^4 \\
\text{I. Div. } 2a^2-b^2 & \quad\quad 0 \qquad 0-2a^2c^3+2b^2c^3+c^6 \\
 & \qquad\qquad +2a^2c^3-2b^2c^3-c^6 \\
\text{II. Div. } 2a^2-2b^2-c^3 & \qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

169. Fatto ora $a=20, b=6$, sarà $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = (20+6)^2 = 400+240+36 = 676 = 26\times26$; dunque i quadrati e delle quantità algebriche e dei numeri contengon le stesse parti, e però son soggetti alle stesse regole d'estrazione.

170. Le differenze accidentali tra le lettere e i numeri nascon dalla confusione che soffron le cifre $400+240+36$ quando si riuniscono in un sol numero 676, con che i quadrati delle

parti e i loro doppj prodotti non posson più riconoscersi. Perciò *il numero di cui si vuol la radice, si divide in membra di due cifre cominciando da destra, cosicchè se le cifre sono in numero impari, l'ultimo membro a sinistra è d'una sola cifra*.

171. Infatti moltiplicando per se stesso un numero terminato in uno, due, tre zeri ec., si ha un prodotto che termina in due, quattro, sei zeri ec. (29), e però uno zero occupa fino alle diecine del prodotto, due zeri fino alle migliaja ec.; dunque a più forte ragione moltiplicando per se stesso un numero terminato in *cifre significative*, la prima di queste occuperà almeno le unità col suo quadrato e le diecine co' suoi doppj prodotti (141), la seconda occuperà almeno le centinaja e le migliaja ec. ec.: la sola ultima cifra non occuperà che un solo luogo quando il quadrato di essa che è l'ultimo a formarsi, non supererà la diecina anche con le unità che vi si portano. Di quì la divisione del quadrato in membri di due cifre, l'ultimo dei quali può essere di una sola.

172. Ma perchè una cifra della radice può occupar talora più di due luoghi del quadrato, *bisogna cominciar l'estrazione a sinistra*, con che gli eccessi delle cifre si riportano ai loro luoghi come nella divisione (40). In queste due sole avvertenze l'estrazione numerica differisce dall'algebrica.

173. Vogliasi la radice quadra di 7873636. Diviso in membra (170) il dato numero, 1°. prendo la radice del maggior quadrato contenuto nel primo membro a sinistra (165. 172); ella è 2 che pongo in radice, e sottratto il suo quadrato da 7 (165), resta 3: 2°. unisco a questo re-

sto il secondo membro 87 onde ho 387, e come in 8 ovvero (computato il resto 3) in 38 dee contenersi il doppio prodotto della prima nella seconda parte della radice, così nel 7 dee trovarsi il quadrato della seconda (171); raddoppio dunque la prima parte 2 (165) e fatto un punto sotto il 7 per escluderlo dalla divisione che son per fare, divido 38 per 4; il quoziente sarebbe 9 che dovrei scrivere e in radice e accanto al divisor 4 (165): ma poichè $9 \times 49 > 387$ onde non potrei far la sottrazione, scemo al solito il quoziente d'un'unità, e scrivo 8 e in radice e accanto al divisor 4; tolto 8×48 da 387 (165), resta 3: 3°. unisco a questo resto il terzo membro 36 e fatto un punto sotto 6, raddoppio la radice 28, e per 56 dovrei partir 33; ma la divisione non è possibile, onde scrivo 0 in radice e abbasso l'ultimo membro 36 accanto al resto 336: 4°. fatto un punto sotto l'ultimo 6, raddoppio la radice 280 e per 560 divido 3363; il quoziente è 6 che scrivo e in radice e accanto a 560, e poichè tolto 6×5606 da 33636, nulla resta, la radice esatta del dato numero è 2806, che si verifica togliendo il 9 da 2806, 2806, fattori del quadrato, e da 7873636 che dee esserne il prodotto (30).

Rad.	2806
Quadrato	7.87.36.36
I. Div. 48/	387
II. Div. 56/	33636
III. Div. 5606/	0 00 00

174. Se il dato numero non è quadrato perfetto, si indica l'estrazione col segno radicale e si estrae quella parte di radice che si può (163): così la radice di 108 è $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$; la radice di 360 è $\sqrt{360} = \sqrt{6^2 \cdot 10} =$

$6\sqrt{10}$ ec. Quando poi non occorre molta esattezza, si fa l'estrazione al solito e si trascura il resto: che se questo voglia pur valutarsi, si aggiungono successivamente due zeri ad ogni resto, ed estraendo la radice, si ha in decimali l'approssimazione che più si vuole (93). Per esempio, trovo che 624 è la radice prossima di 389489 col resto 113. Aggiungo due zeri al dato numero e duplico al solito 624; indi per 1248 divido 1130 e ho per quoziente 0, che scrivo nel primo luogo dei decimali; aggiungo due altri zeri, duplico 6240, e dividendo per 12480 ho per quoziente 9 ec.

R. | 624,09 ec.
Q. 38,94,89(00,00 ec.
113 00 00
1248 67 19 ec.
124809

175. Osserv. Riflettendo sui quadrati che con altre Potenze si danno in una Tavola al fin di quest'Opera si vedrà 1°. che essi terminan sempre in 1,4,5,6,9,0; 2°. che la penultima cifra dei terminati in 1,4,9 è un numero pari, dei terminati in 6 è un numero impari, dei terminati in 5 è sempre 2, e dei terminati in 0 è sempre 0; 3°. che la terzultima cifra dei terminati in 5 è 0,2,6. Quando dunque tra molti numeri dovrà scegliersi un quadrato, potranno escludersi come inabili tutti quelli che mancano di queste proprietà.

176. Si estrae la radice da un rotto estraendola da ciascun de' suoi termini: così $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, poichè $\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. Ma se i termini del rotto non son numeri quadrati, si indica l'estrazione col segno radicale, o si riduce il rotto in decimali (94). Per estrar da questi la radice quadra bisogna render pari, se non lo è, il loro numero

con degli zeri, che già non ne alterano il valore (84); quindi si estrae la radice al solito, e fatta l'operazione, si separa a destra della radice un numero di cifre che sia la metà del numero dei decimali della quantità data: così la radice di 21,935, volendo tre decimali, si ha con estrar la radice da 21,935000, ed è 4,683: la radice di 0,0054, pur con tre decimali, è 0,073.

177. Si vede da tutto ciò che l'estrazion delle radici dipende dalla divisione, come la formazion delle potenze dalla moltiplicazione (170).

Estrazione della Radice Cuba.

178. Vogliasi la radice cuba di $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. E' chiaro che ella dee aver due termini (143) il primo dei quali cioè la radice cuba di a^3, è a, che scrivo: ne formo il cubo, lo sottraggo da a^3 e mi resta $6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. Quindi dico: in questo resto dee contenersi il triplo prodotto del quadrato del primo termine a trovato, per il secondo che cerco: alzo dunque a al quadrato a^2, lo triplico ed ho $3a^2$ per cui divido il resto, dicendo: $\frac{6a^2b}{3a^2} = 2b$; ma se $+2b$ è il secondo termine della radice, la somma del suo prodotto per $3a^2$, del prodotto del suo quadrato per $3a$, e del suo cubo, dee eguagliare il resto della quantità, come appunto avviene; dunque $a + 2b$ è la radice cuba cercata.

179. Per i numeri, ecco i cubi delle cifre semplici:

Rad. Cub.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,

sui quali ragionando come sui quadrati (171), si trova che bisogna dividere il dato cubo in membra di tre cifre.

Vogliasi la radice cuba di 74088. Lo divido in membra, ed è chiaro che la radice dovrà aver due cifre. Dico dunque: la più vicina radice cuba del primo membro 74 è 4, che scrivo in radice: sottraggo da 74 il cubo di 4 e ho il resto 10, a cui unisco la prima cifra 0 del secondo membro per aver 100 che divido per 48, triplo del quadrato di 4; il quoziente è 2, che però non scrivo in radice se prima non trovo in lui le qualità necessarie per esservi, cioè sottratto 2.48 da 100, abbasso allato al resto 4 la seconda cifra 8 del secondo membro, e ho 48 da cui sottraggo 48, triplo prodotto del quadrato del quoziente 2 per la prima cifra 4; accanto al resto (che quì è 0)

abbasso l' ultima cifra 8 del secondo membro ed ho 8; e poichè il cubo del quoziente 2 si può sottrarre da 8 nè lascia resto, 2 è la seconda cifra della radice.

```
Rad.    | 42
        ------
Cubo    74,088
        100
48 /    =48
         =8
```

Altro esempio che facilmente si intenderà dal precedente

```
Rad.     | 174
         -------
Cubo     5,305,472
  3 /    43
         220 . . . . . . . . . . . sottro 3. 1. 49
          735 . . . . . . . . . . sottro 7. 7. 7
          3924
867 /      4567 . . . . . . . . sottro 3. 17.16
           37512 . . . . . . . sottro 4. 4. 4
         ( 37448 )
```

Volendo aver riguardo all' avanzo bisognerebbe cercar dei decimali per radice, e questi si trovano aggiungendo al dato numero tre zeri tante volte quanti decimali si vogliono, e continuando l' estrazione nel modo stesso.

La radice cuba d' un rotto si ha con estrarla da ciascun dei suoi termini: così $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$ poichè $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$. Ma se i due termini del rotto non son cubi, si indica l' estrazione col segno radicale estraendo quella parte di radice che si può (174), o si riduce il rotto in decimali. Per cavar da questi la radice cuba, si riduce il dato numero ad avere 3, 6, 9 ec. decimali col mezzo degli zeri: quindi se ne estrae la radice come se non vi fosse virgola, e fatta l' operazione, si separa con la virgola a destra della radice un numero di cifre che sia il terzo del numero dei decimali della quantità data: così per cavar la radice cuba da 6,54 volendo tre decimali, cavo la radice cuba da 6540000000 che è 1870; ne separo tre cifre, poichè si hanno 9 decimali nel cubo, ed ho 1,87 per radice cuba di 6,54: così troverei che quella di 0,0006, volendo due decimali, è 0,08.

Due metodi per estrarre per approssimazione le Radici di qualunque grado.

180. Se si cercasse la radice quadra di c^2-x^2, è chiaro (167) che non potrebbe mai aversi rigorosamente. Allora si ricorre ai metodi d' approssimazione, che sono applicazioni più o meno dirette della *Formula del Binomio* (145). Vogliasi pertanto la radice prossima di $c^2 \pm x^2$: paragono questa quantità col binomio (P+

$PQ)^{\frac{m}{n}}$ (149), e fatto $m=1$, $n=2$, $P=c^2$, $PQ=$ $\pm x^2$ onde $Q=\pm\frac{x^2}{c^2}$, sostituisco questi valori nella formula $P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}QA+\frac{m-n}{2n}QB+$ ec., ed ho $(c^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}=c\pm\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}\pm\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}\pm\frac{7x^{10}}{256c^9}-$ ec.

181. Si sarebbe trovata la stessa serie, benchè in modo più laborioso, colla semplice regola d'estrazione, quale l'abbiamo data (165), come può vedersi per esercizio.

182. In luogo di scrivere i coefficienti ridotti come ho fatto (180), posso scriverli in disteso, il che fa conoscere la loro legge, e trovo

$$(c^2\pm x^2)^{\frac{1}{2}}=\begin{cases} c\pm\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{2.4c^3}\pm\frac{3x^6}{2.4.6c^5}-\frac{3.5x^8}{2.4.6.8c^7}\pm \\ \frac{3.5.7x^{10}}{2.4.6.8.10c^9}-\frac{3.5.7.9x^{12}}{2.4.6.8.10.12c^{11}}\pm \text{ec.}\end{cases}$$

ove si vede che cominciando dal secondo termine, i numeri pari entrano nella composizione dei denominatori, e gl'impari, cominciando dal quarto termine, formano i numeratori. E' dunque facile il proseguir l'approssimazione a piacere.

183. Con queste formule si hanno le radici approssimate de' numeri che non ne hanno delle esatte. Si voglia la radice quadra di 5; divido 5 in due parti 4+1 (ciò si fa per aver c^2 quadrato perfetto) e sarà $c^2=4$, $x^2=1$, e $\sqrt{5}=$ $(4+1)^{\frac{1}{2}}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+$ ec. Fermandosi a' due primi termini, si avrebbe $\frac{9}{4}$ per $\sqrt{5}$, che non è molto esatta; fermandosi ai tre primi, si avrebbe $\frac{143}{64}$, più esatta dell'altra. Calcolando più termini si avrebbe una maggiore esattezza senza però poter mai giungere al vero valore di $\sqrt{5}$, perchè è incommensurabile, cioè niun numero intero o rotto moltiplicato in se stesso può pro-

dur 5. Ciò è chiaro negli interi; cercatene la ragione riguardo ai rotti.

184. L'estrazione delle radici cube e anche delle quarte, quinte ec. si fa con lo stesso metodo: la sola differenza è nelle sostituzioni dell' esponente. Quindi si troverà $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = a \pm \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} \pm \frac{5x^3}{81a^8} - \text{ec.}$, e la radice cuba, quarta, quinta ec. d'un numero, si avrà con l' opportune sostituzioni.

Qual'è la radice cuba di 100? Pongo $100 = 125 - 25$, onde $125 = a^3$, $25 = x$; calcolando i due primi termini della formula, si avrà $\sqrt[3]{100} = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$; calcolando i primi tre, viene $\sqrt[3]{100} = 5 - \frac{16}{45} = \frac{209}{45}$ ec. Del resto l'approssimazioni sono assai più pronte coi logaritmi.

185. *Secondo Metodo*. Sia proposto generalmente di estrarre per approssimazione la radice m d'una quantità qualunque $a^m \pm b$. Posso supporre questa radice rappresentata da $a + d$, esprimendo a un numero intero e d i decimali da aggiungersi a questo numero per aver la radice cercata. Si avrà dunque $a + d = \sqrt[m]{a^m \pm b}$, onde $(a + d)^m = a^m \pm b$: dunque $a^m + ma^{m-1}d + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}d^2 + \ldots \text{ec.} = a^m \pm b$, e trascurati i termini ove d è a una potenza superiore al quadrato, scancellata ne' due membri a^m, e diviso il resto per m, si avrà $a^{m-1}d + \frac{m-1}{2} a^{m-2}d^2 = \pm \frac{b}{m}$. Risolvendo quest' equazione del secondo grado, verrà $d = \frac{-a}{m-1} + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)a^{m-2}}}$; onde si avrà generalmente per l' estrazion d'una radice approssimata qualunque, $a + d = \sqrt[m]{a^m \pm b} = \frac{m-2}{m-1}a + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)a^{m-2}}}$, formula generale che dà le seguenti particolari:

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \frac{2a}{3} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{9} \pm \frac{b}{6a^2}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \frac{3a}{4} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{16} \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

ec. ec. ec.

Facciamone un' applicazione e troviamo la radice quinta di 161900 con 12 decimali. Presane dai logaritmi la radice prossima 11,012, faccio $11,012 = a$, onde $a^5 = 161931,37873202072 8832$ che supera 161900 di 31,37873202072 8832. Pongo questo eccesso $= b$, ed ho $a^5 - b = 161900$, e perciò $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{3a}{4} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{16} - \frac{b}{10a^3}\right)}$ $= 8,259 + \sqrt{\left(7,579009 - \frac{31,37873202072 8832}{13353,60753728}\right)} = 8,259 + \sqrt{(7,579009 - 0,00234983182882431593271 1)} = 8,259 + \ldots$ $\sqrt{(7,576659168171175684067289)} = 8,259 + \ldots\ldots\ldots$ $2,752573190339 = 11,011573190339$, radice cercata: d' onde si vede che si hanno di quì delle approssimazioni che non si otterrebbero dalle maggiori Tavole dei Logaritmi.

APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA

ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

---

186. Come un *Teorema* è una verità necessaria da dimostrarsi, così un *Problema* è un Quesito da sciogliersi o una specie di enigma da indovinare. Ora non è possibile di sciogliere l'enigma senza qualche cognizione a lui relativa, e senza dei rapporti tra ciò che si sa e ciò che si cerca. La soluzione dei problemi Matematici, detta propriamente *Analisi*, è fondata su questi rapporti che chiamansi *Condizioni del Problema*. Si tratta solo di esprimere queste condizioni in modo da dedurne la notizia di ciò che non si sapeva, il che si ottiene col paragone delle quantità note ed ignote. Le prime diconsi *le Date del Problema*, e si usa di esprimerle con le prime lettere a, b, c ec., α, β, γ ec. L'altre si chiamano le *Incognite*, e si notano con l'ultime lettere x, y, z, φ, ω ec. Ogni formula che esprime l'eguaglianza di due o più

quantità, si chiama *Equazione*. Il segno d'egualità divide l'equazione in due *membra*, e il sinistro è il *primo*, il destro è il *secondo*.

187. La più alta potenza dell'incognite determina il *Grado* d'un'equazione, che dicesi *pura* se l'incognita è solamente al grado m, o *affetta* se l'incognita è anche ad altri gradi inferiori $m-1$, $m-2$ ec.: così $x=a \ldots z+b=y-c \ldots \beta\varphi-\varepsilon=(c+d)^n$ sono equazioni del *primo grado* che si chiamano anche *lineari*. Quando l'incognite hanno due dimensioni, cioè sono alzate a quadrato o moltiplicate tra loro, l'equazione è del *secondo grado*, come $xy=b$, la pura $x^2=a$, e l'affetta $x^2+px=q$: son poi del *terzo* se hanno l'incognite a tre dimensioni, come $x^3=c \ldots$ $x^3+px^2+qx=b \ldots xyz=f \ldots xy^2=g$. Ma di qualunque grado sieno l'equazioni, lo scopo generale della lor risoluzione è di far conoscere il valor dell'incognite che contengono. Un poco d'abito al calcolo basta per risolver quelle del primo e secondo grado. La risoluzione di quelle del terzo e del quarto ha delle difficoltà: per quelle del quinto, del sesto ec. non vi è metodo esatto e generale.

Equazioni del primo grado.

188. Riunire in un membro dell'equazione tutti i termini noti, e lasciar nell'altro l'incognita *sola*, *positiva*, *senza coefficiente*, *senza divisore e senza esponente*, questo è ciò che si chiama *risolvere un'equazione*; poichè una quantità eguale a quantità note non è più incognita. Ora l'operazioni che guidano all'intento per un'equazione del primo grado, si riducono a tre assiomi.

189. I. *I due membri d' un' equazione restano eguali o vi si aggiungano o se ne tolgano quantità eguali*. Con questo mezzo si ha l'incognita *sola* e *positiva*; poichè se sia $a+2b=4c-3x$, si aggiungerà $3x$ ai due membri e se ne toglierà $a+2b$ onde venga $a+2b+3x-a-2b=4c-3x+3x-a-2b$: riducendo si avrà $3x=4c-a-2b$. Dunque *si trasporta una quantità da un membro scrivendola con opposto segno nell' altro*.

190. II. *I due membri d' un' equazione restano eguali o si moltiplichino o si dividano per quantità eguali*. Con ciò si ha l'incognita *senza coefficiente e senza divisore*; poichè se sia $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{f}+m=px+\frac{cx}{f}+n$, 1°. trasporto (189) $px+\frac{cx}{f}$ nel primo membro ed m nel secondo, e riducendo viene $\frac{ax}{b}-px=n-m$: 2°. molciplico i due membri per il divisore di x ed ho $ax-bpx=bn-bm$, cioè $(a-bp)x=b(n-m)$: 3°. divido i due membri per il coefficiente *totale* di x e ottengo $x=\frac{b(n-m)}{a-bp}$. *Dunque si toglie un coefficiente o un divisore dall' un membro col divider respettivamente o moltiplicar per esso l' altro membro*.

Quì si avverta che da $x(m-n)=b(m-n)$ non può dedursi $x=b$ dividendo i due membri per $m-n$; poichè alla sussistenza dell' equazione $(x-b)(m-n)=0$ basta che l' uno o l' altro dei due fattori $x-b$, $m-n$ sia zero (365): onde se si sappia che l' uno è zero, sarà dubbio se anche l' altro lo sia; e se si sappia che l' uno non lo può essere, l' altro lo sarà necessariamente.

191. III. *I due membri d' un' equazione restano eguali se si alzino a potenze eguali intere o rotte*. Così si ha l' incognita *senza esponente*; poichè se sia $b=a-\sqrt{x}$, si avrà trasportando

(189) $x^{\frac{1}{2}} = a - b$, e alzando i due membri alla potenza 2, verrà $x = (a-b)^2$.

192. Quasi tutte queste operazioni si fanno (per dirlo quì in breve) anche nell'*ineguaglianze*, cioè in quelle formule che hanno tramezzo il segno $>$ o $<$. Infatti è chiaro che *se i due membri d' un' ineguaglianza si sommino, si sottraggano, si moltiplichino o si dividano per quantità eguali, i due membri resteranno ineguali*: onde posto $\frac{a^2x}{p} + mn > ab + ax + mn$, sarà 1°. $\frac{a^2x}{p} - ax > ab$: 2°. $\frac{ax}{p} - x > b$: 3°. $ax - px > bp$: 4°. $x > \frac{bp}{a-p}$.

In due cose differiscon l' ineguaglianze dall'equazioni. In queste supposto $x = a - b$, può anche farsi $a - b = x$, mentre in quelle supposto $m > a - b$, non si può fare $a - b > m$, ma solamente $a - b < m$ ovvero $b - a > -m$. Inoltre in due equazioni $x = a - b$, $y = c + d$ ciascun membro dell' una può sommarsi, sottrarsi, moltiplicarsi o partirsi per ciascun membro dell' altra, salva l' egualità; ma nell' ineguaglianze anche omogenee, cioè ridotte al segno stesso $>$ o $<$, supposto $m > a$, $n > b$, non solo non può combinarsi in alcun modo il primo o secondo membro dell' una col secondo o primo membro dell' altra, salva l' omogeneità dell' ineguaglianza, ma neppur può sottrarsi o dividersi il primo e secondo dell' una per il primo e secondo dell' altra, essendo solamente lecito di sommarli o moltiplicarli: perciò si potrà fare $m + n > a + b$ ovvero $mn > ab$, ma non già $m - n > a - b$ ovvero $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$. E di quì segue 1°. che non è lecita neppur la moltiplicazione quando include una sottrazione (121); così dalle formule $m > a - b$, $n > c - d$ può bene inferirsi $m + b > a$, $n + d > c$ e quindi $(m + b)(n + d) > ac$, ma non già $mn > (a - b)(c - d)$ se pur non si sappia d' altra parte che $a > b$ o $c > d$: 2°. che molto meno è lecito il fare $m - a > -b$, $n - c > -d$ e poi concludere $(m - a)(n - c) > bd$: 3°. che l' inalzamento d' un' ineguaglianza a potenze intere o rotte equivalendo alla moltiplicazione di più ineguaglianze tra loro, non può farsi qualche potenza o estrarsi qualche radice da un' ineguaglianza senza le stesse cautele.

193. Con questo piccol numero di principj si risolve ogni equazione del primo grado: tutta la difficoltà consiste nell'arrivarvi, cioè nell' esaminar le condizioni proposte e nel combinarle in modo che ne risultino due diverse ed eguali espressioni. Ma non vi son precetti per

questo, e solamente il lungo esercizio e gli esempj posson dar quella facilità e quell'avvedutezza che conducono all'equazion d'un problema. Ecco varj di questi esempj.

194. I. Un padre ha il sestuplo dell'età del suo figlio, e la somma delle loro età è 91 anni. Qual'è la loro età?

Mentre l'Aritmetico si perde in tentativi, l'Algebrista dice: sia x l'età del figlio; dunque per la condizione del problema, l'età del padre è $6x$. Ora queste due età fanno 91 anni; dunque $7x=91$, ed ecco il problema *messo in equazione*; dunque (190) $x=\frac{91}{7}=13$; perciò il figlio ha 13 anni e il padre ne ha 78, poichè $13+78=91$. Così è risoluto il problema e verificata la soluzione, poichè ella sodisfà alla condizione proposta.

II. Si cerca un numero tale che il suo prodotto per 4, il suo quoziente per 5, e il suo moltiplicatore facciano $12\frac{1}{2}$.

Chiamo x il numero cercato, ed ho $4x+\frac{1}{5}x+4=12\frac{1}{2}$; dunque (189) $4x+\frac{1}{5}x=8\frac{1}{2}$, quindi (190) $20x+x=42\frac{1}{2}=\frac{85}{2}$, e finalmente $x=\frac{85}{2\cdot 21}=2\frac{1}{42}$: infatti $\frac{85}{42}\times 4+\frac{85}{42\cdot 5}+4=12\frac{1}{2}$, condizion del problema. Quanti calcoli per indovinar coll'Aritmetica questo numero!

III. Un terremoto abbattè in un giorno la metà delle case di una Città, nel giorno dopo un terzo, e un duodecimo negli altri giorni, dimodochè restano in piedi 63 Case. Quante ne avea la Città?

Sia x il numero che si cerca; $\frac{1}{2}x$ saranno le Case cadute nel primo giorno, $\frac{1}{3}x$ e $\frac{1}{12}x$ le cadute negli altri giorni: e poichè la Città era composta delle Case cadute e delle restate, si

avrà per equazion del problema $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}x+63=x$. La moltiplico per 12 (190) e sarà $6x+4x+x+756=12x$ e riducendo, $11x+756=12x$, cioè (189) $x=756$ Case.

IV. Tre amici, che chiamo B, C, D, giocarono al Lotto. Il gioco di B e C fa 21 lira; quello di B e D ne fa 24; e quello di C e D 27. Quanto ha messo ciascuno?

Suppongo $a=21$, $c=24$, $f=27$ ed x il denaro di B, dunque $a-x$ è quello di C, e $c-x$ quello di D che sommati debbon far 27 lire. Dunque $a-x+c-x=f$, e (189.190) $x=\frac{1}{2}(a+c-f)=9$, il che dà 12, e 15 lire per C e D.

195. Al primo aspetto le tre quantità del denaro posto parevano tante incognite differenti: ma osservando meglio, si vede che determinata una di esse, restan determinate anche l' altre. Perciò il numero delle incognite non dipende dal numero delle questioni particolari del Problema, ma bensì dalla relazione che è tralle condizioni di esso. Pur si avrebbe la soluzione introducendo più incognite: ma in generale bisogna sempre cercar le soluzioni più semplici.

V. Un padre lascia al figlio maggiore 1000 scudi e $\frac{1}{6}$ di ciò che resta; al secondo, 2000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto; al terzo, 3000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto, e così fino all'ultimo. Fatte le parti, si trova che i figli hanno ereditato per egual porzione. Si cerca 1°. l'asse paterno; 2°. il numero dei figli; 3°. la parte di ciascuno.

Queste tre questioni parrebbero tre incognite del Problema: eppure conosciuto l'asse paterno, si conosce tutto. In fatti tolti da esso i 1000 scudi $+\frac{1}{6}$ del resto, che vanno al maggiore, l'asse diviso per questa parte farà conosce-

re il numero delle parti eguali e perciò de' figli. Chiamo dunque l'asse paterno x, e per brevità pongo $a=1000$; poi dico: quando il maggiore ha presi 1000 scudi, l'asse resta $x-a$; ma di questo resto dee avere $\frac{1}{6}$; dunque la sua parte è $a+\frac{1}{6}(x-a)=\frac{1}{6}(5a+x)$ (51). Or questa eguaglia quella dei fratelli; dunque trovata la parte del secondo, si avrà l'equazione. L'asse, detratta la parte del maggiore, resta $x-\frac{1}{6}(5a+x)=\frac{1}{6}(5x-5a)$, di cui il secondo dee avere $2000=2a$, e rimarrà $\frac{1}{6}(5x-5a)-2a=\frac{1}{6}(5x-17a)$, il cui sesto è $\frac{1}{36}(5x-17a)$: onde la parte del secondo è $2a+\frac{1}{36}(5x-17a)=\frac{1}{36}(55a+5x)$: dunque $\frac{1}{6}(5a+x)=\frac{1}{36}(55a+5x)$. Moltiplicando i due membri per 36, si ha (190) $30a+6x=55a+5x$; e (189) $x=25a=25000$; dunque la parte del maggiore è 5000 scudi, e sono cinque fratelli.

VI. *A* e *B* postisi al gioco con egual somma, han perduto. La perdita di *A* è $12'$, quella di *B* è $57'$, e *B* ha solamente il quarto del denaro che resta ad *A*. Quanto aveano in principio?

Aveano x'; e poichè *A* perdè 12, gli resta $x-12$, mentre a *B* che perdè 57, resta $x-57$: dunque quadruplicando il resto di *B*, $x-12=4(x-57)$ ed $x=72$ (189.190).

VII. Qual è il numero di cui il terzo e il quinto differiscono di 8?

Sia x questo numero; sia $a=8$, $\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$; dunque $\frac{x}{m}-\frac{x}{n}=a$, onde $x=\frac{amn}{n-m}=60$, il cui terzo è 20, il quinto è 12, e $20-12=8$.

VIII. Diviso un numero x per 6 si è avuto un tal quoziente che sommato col divisore e col dividendo, dà 69. Qual è questo numero?

Sia $a=6, b=69$, e si avrà $\frac{x}{a}+a+x=b$; dunque $x=\frac{(b-a)a}{a+1}=54$.

IX. Trovar due quantità di cui è data la somma e la differenza.

Sia a la somma, b la differenza, x la quantità maggiore, y la minore; dunque $x+y=a$ ed $x-y=b$. Sommate e poi sottratte quest'equazioni (189), si ha $2x=a+b$ e $2y=a-b$, onde $x=\frac{1}{2}(a+b)$ ed $y=\frac{1}{2}(a-b)$.

196. Dunque *data la somma e la differenza di due quantità, la maggiore è la metà della somma e della differenza, e la minore è la metà della somma meno la metà della differenza.*

Applicazioni. Una Casa di due piani ha 35 piedi di altezza, e il primo piano è 4 piedi più alto del secondo: qual'è l'altezza de' due piani? sarà $a=35, b=4$; dunque $x=19\frac{1}{2}$, e $y=15\frac{1}{2}$.

Due pietre pesano libbre 2878, e l'una è libbre 156 meno dell'altra: quanto pesa ciascuna? $a=2878, b=156$; dunque $x=1517, y=1361$.

197. Le due equazioni $x+y=a$, $x-y=b$ possono anche risolversi prendendo da ciascuna il valor di x, il che dà $x=a-y, x=b+y$; e poichè $x=x$, sarà anche $a-y=b+y$, onde $2y=a-b$ ed $y=\frac{1}{2}(a-b)$, valore che posto nell'equazione $x=a-y$, la riduce ad $x=a-\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(a+b)$. Ma per *eliminare* un' incognita onde si conosca l'altra, è preferibile il compendio di sopra, che con un piccolo artifizio avrà sempre luogo. Infatti sieno le tre equazioni I. $2y+4x-3z=a$, II. $5y-7x+4z=b$, III. $6x-3y+5z=c$ e si voglia eliminare y. Moltiplico ciascuna equazione (190) per il prodotto dei coefficienti di y nell'

altre due e mi viene IV. $30y + 60x - 45z = 15a$, V. $30y - 42x + 24z = 6b$, VI. $60x - 30y + 50z = 10c$: dalla IV. tolgo la V. e poi sommo la IV. e VI., il che dà le ridotte VII. $34x - 23z = 5a - 2b$, VIII. $24x + z = 3a + 2c$, e così è eliminato y. Per eliminare z moltiplico l' VIII. per il coefficiente 23 di z nella VII. e sommando queste due, ho finalmente $x = \frac{37a + 23c - b}{293}$, valore che posto nell' VIII. fa conoscere z, e quindi si ha y dalla I.

Quasi con lo stesso artifizio si eliminano l' incognite di gradi più alti. Sieno le due equazioni generali I. $My^4 + Ny^3 + Py^2 + Qy + R = 0$, II. $my^4 + ny^3 + py^2 + qy + r = 0$, ove $M, m, N, n, P, p, Q, q, R, r$ sono espressioni o *funzioni* qualunque di x, e voglia eliminarsi y. Moltiplico la I per m, la II. per M e sottratta l' una dall' altra, viene III. $(Nm - Mn)y^3 + (Pm - Mp)y^2 + (Qm - Mq)y + Rm - Mr = 0$: moltiplico nuovamente la I. per r, la II. per R, e sottratta l' una dall' altra, viene IV. $(Mr - Rm)y^3 + (Nr - Rn)y^2 + (Pr - Rp)y + Qr - Rq = 0$. In tal guisa y è abbassato d' un grado nella III e IV: onde se queste si trattino come le due primitive, y si abbasserà d' un altro grado ec., finchè sparirà interamente. Questo metodo però conduce alle volte ad equazioni più alte di quel che il problema esigerebbe.

198. L' incognite non posson dunque eliminarsi se non si abbia un egual numero d' equazioni, nel qual caso il problema si chiama *determinato*. Poichè se vogliansi due quantità x, y, di cui è data la somma a, l' unica condizion del problema espressa dall' equazione $x + y = a$, insegna solo che l' incognita x eguaglia una quantità parimente incognita $a - y$. Questi problemi, ove sono più incógnite che equazioni, si chiamano *indeterminati* dei quali parleremo in appresso. Diconsi all' incontro *più che determinati* se hanno più equazioni che incognite, o se un' equazione apparentemente diversa, è contenuta nell' altre. Vogliansi tre numeri x, y, z che sottratti a due a due facciano i numeri dati a, b, c. L'

equazioni saranno I. $x-y=a$, II. $x-z=b$, III. $y-z=c$: ma poichè la seconda è la somma dell' altre due, il problema è più che determinato ed anche impossibile, se pur non sia $b=a+c$, nel qual caso diventa indeterminato.

X. Avendo dei gettoni nelle mani, ne passo uno dalla destra alla sinistra, e con ciò ne ho un egual numero in ambedue: ma se ne passassi due dalla sinistra alla destra, questa ne avrebbe il doppio dell'altra. Quanti gettoni erano da principio in ciascuna mano?

Sieno x quelli della destra, y quelli della sinistra: si avrà per la prima condizione $x-1=y+1$, e per la seconda $x+2=2(y-2)$. Sottratta la prima dalla seconda, si ha $y=8$, onde $x=10$.

XI. Un Orefice vende 3 oncie d'oro e 5 d'argento per 318 lire, e 5 oncie d'oro e 7 d' argento per 522 lire: quanto costa l'oncia d' oro e d'argento?

Posti x e y i valori cercati, $b=522$, $a=318$, si avrà $3x+5y=a$ .... $5x+7y=b$, le quali, operando secondo la regola (197), divengono $15x+25y=5a$ .... $15x+21y=3b$ da cui si ha $4y=5a-3b$; dunque $y=6$, valore che sostituito in una dell'equazioni primitive, dà $x=96$.

Per generalizzar simili problemi risolviamo le due equazioni I. $px+qy=a$, II. $mx+ny=b$. Moltiplicando la I. per m e la II. per p, avremo III. $mpx+mqy=am$, IV. $mpx+npy=bp$, e sottraendo la IV. dalla III., verrà $mqy-npy=am-bp$; perciò $y(mq-np)=am-bp$, e finalmente $y=\frac{am-bp}{mq-np}$. Sostituito questo valore nella I o II, si troverà $x=\frac{bq-an}{mq-np}$. Se ora le lettere m,n,p,q abbiano i respettivi valori del problema ultimo, x ed y sa-

ranno respettivamente 96 e 6 come sopra; e variando i valori delle quantità date, le semplici sostituzioni nelle formule di x e d'y risolveranno tutti i problemi analoghi a questo. Perciò le soluzioni generali son preferibili per tutti i riguardi alle particolari.

XII. Comprai tre cavalli: il primo colla metà del prezzo degli altri due, vale 25 zecchini; l'altro con un terzo del prezzo degli altri due, 26; l'ultimo colla metà del prezzo degli altri due, 29. Qual è il prezzo di ciascuno?

Chiamando x, y, z i tre prezzi cercati, l'equazioni del problema saranno $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=25 \ldots y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=26 \ldots z+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=29$, le quali, fatti sparire i rotti (190), divengono I. $2x+y+z=50$, II. $3y+x+z=78$, III. $2z+x+y=58$. Tolgo la I. dalla II. e viene IV. $2y-x=28$; moltiplico la II. per 2 e ne tolgo la III., il che mi dà V. $5y+x=98$: infine sommo la IV. e V. e trovo $y=18$, valore che sostituito nella IV. dà $x=8$, onde posti nella III. i valori di x, y, si ha $z=16$.

199. I problemi sono *impossibili* quando conducono ad un risultato assurdo; per esempio: *trovare un numero* x *eguale alla sua decima parte*: ridotto il problema in equazione, si ha $x=\frac{x}{10}$ cioè $10=1$, risultato assurdo che dimostra impossibile il proposto problema. I problemi poi sono in realtà *teoremi* quando l'equazion finale è *identica* e perciò si riduce a $0=0$; per esempio: *trovar tre numeri* $x, x+d, x+2d$ *in continua proporzione aritmetica onde il prodotto degli estremi col quadrato* d^2 *della differenza eguagli il quadrato dell'intermedio*: ridotto il problema in equazione, si ha $x^2+2dx+d^2=x^2+2dx+d^2$ cioè $0=0$, risultato vero, da cui essendo svanito x, si impara che il problema è un teorema, e che comunque si prenda x, la proprietà ricercata avrà sempre luogo. Così l'Algebra risponde a tutte le dimande: scioglie i problemi se son possibili, e fa conoscere se sono impossibili o se degenerano in teoremi.

Equazioni del secondo grado.

200. Ogni equazione del secondo grado può rappresentarsi con la formula $x^2+px=q$ in cui p e q son quantità note. Trovata dunque la risoluzion di questa, saran risolute generalmente tutte l'equazioni del secondo grado. Ora è evidente 1°. che per avere in tal caso il valor di x, bisogna estrar la radice quadra dall'equazione $x^2+px=q$; 2°. che se $p=0$, quest'equazione diventa $x^2=q$, onde (191) $x=\pm\sqrt{q}$, e sostituendo il valor di q, si avrà per x un numero intero, o un rotto approssimato quanto si vuole (176). Il radicale è affetto dal doppio segno a cagion del doppio valor dell'incognita (166).

201. Ma se p è quantità reale bisogna *compire il quadrato* del primo membro (142), e aggiungere al secondo la stessa quantità (189); dunque $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=q+\frac{1}{4}p^2$, e perciò (191) $x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$: ed $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$.

202. I due valori di x indicati dal segno $\pm$, chiamansi *radici*; onde *ogni equazione del secondo grado ha due radici*, cioè $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$; ed $x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$.

203. Quando q è positivo lo è anche il radicale, poichè $\frac{1}{4}p^2$ è positivo (121): onde o il valor di $q+\frac{1}{4}p^2$ forma un quadrato (nel qual caso il radicale è commensurabile) o non lo forma, e il radicale è sordo ma *reale* e può aversi per approssimazione.

204. Ma se q è negativo, posson darsi tre casi; 1°. $q<\frac{1}{4}p^2$; allora il positivo supera il negativo, e il resto è reale: 2°. $q=\frac{1}{4}p^2$; allora il radicale sparisce, e il doppio valor di x si ri-

duce a $-\frac{1}{2}p$, cioè le due radici dell'equazione $x^2+px=q$ sono egnali: 3°. $q > \frac{1}{4}p^2$; allora il negativo superando il positivo, il resto è negativo, ed il radicale contiene una quantità negativa. Or la radice quadra d'una quantità negativa è *immaginaria*, cioè non può trovarsi una quantità che moltiplicata in se stessa dia un prodotto negativo. Infatti o la quantità sia positiva o negativa, il suo quadrato è sempre positivo (121). Onde $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-b^2}$, $A+B\sqrt{-1}$ ec. son quantità chimeriche o immaginarie.

205. Riguardo agl' *immaginarj* si noti 1°. che se si abbia $a+b\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}$ (a, A, b, B son quantità reali) sarà $a=A$ e $b=B$, poichè se fosse $a=A\pm m$, verrebbe $A\pm m+b\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}$ e $\pm m=(B-b)\sqrt{-1}$, cioè il reale eguale all'immaginario, il che è assurdo: 2°. che perciò se una quantità composta di reali e d'immaginarj sia zero, tutti i reali da se, e tutti gl'immaginarj da se saranno zero: 3°. che *qualunque quantità immaginaria può ridursi alla forma* $A+B\sqrt{-1}$; poichè se si abbia $a+b\sqrt{-1}\pm c\pm g\sqrt{-1}$, basterà fare $a\pm c=A$, $b\pm g=B$; e si sa che quanto si avvera della somma e sottrazione, dee generalmente aver luogo nelle varie combinazioni di queste due operazioni fondamentali (13); infatti dimostrano gli Algebristi il teorema per tutti i casi particolari della moltiplicazione, divisione ec., sul che non possiamo noi trattenerci: 4°. che in conseguenza anche *le radici immaginarie d' un' equazione si riducono alla forma* $A+B\sqrt{-1}$; così nel supposto caso di $q > \frac{1}{4}p^2$, fatto $q-\frac{1}{4}p^2=m^2$, verrà $x=-\frac{1}{2}p\pm m\sqrt{-1}$.

206. Probl. I. Trovare un numero tale che il suo settuplo col suo quadrato dia 144. Chiamo x questo numero; dunque il suo quadrato è x^2, e si ha l'equazione $x^2+7x=144$. Compiendo il quadrato, avrò $x^2+7x+\frac{49}{4}=144+\frac{49}{4}$, ed estraendo la radice e trasponendo, verrà $x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{(144+\frac{49}{4})}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{625}{4}}$: ma $\sqrt{\frac{625}{4}}=\frac{25}{2}$; dunque $x=-\frac{7}{2}\pm\frac{25}{2}$. Il segno + dà $x=-\frac{7}{2}+\frac{25}{2}=9$, il segno − dà $x=-\frac{7}{2}-\frac{25}{2}=-16$. Infatti il quadrato di 9 (=81) con sette volte 9 (=63), co-

me pure il quadrato di $-16(=256)$ con sette volte $-16(=-112)$ dà 144. Ecco un esempio della doppia soluzione di cui l'equazioni del secondo grado son suscettibili.

207. Si può anche paragonar l'equazione $x^2+7x=144$ con l'equazion generale (200) $x^2+px=q$, e si ha $p=7$, $q=144$; onde sostituiti questi valori nelle formule (202) $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$, viene $x=9$ ed $x=-16$.

II. Trovare un numero tale che sottraendo 2 dal suo quadrato, il resto sia 1. Chiamo x il numero, e avremo $x^2-2=1$; trasponendo, $x^2=3$; estraendo la radice, $x=\pm\sqrt{3}$: dunque la radice di 3 presa o in + o in −, soddisfà al problema: ma essendo ella inassegnabile, bisogna contentarsi d'un'approssimazione.

III. Dividere il numero 10 in due parti tali che il lor prodotto sia 100. Fatto $a=10$, $b=100$, ed x una delle parti cercate, l'altra sarà $a-x$, e il loro prodotto $ax-x^2$; onde l'equazione è $ax-x^2=b$. Trasponendo i due membri per render positivo x^2, si avrà $x^2-ax=-b$. La formula (200) dà $p=-a$, $q=-b$, onde $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(-b+\frac{1}{4}a^2)}=5\pm\sqrt{(-100+\frac{100}{4})}=5\pm\sqrt{-75}$. Ora la radice d'una quantità negativa è immaginaria (205); dunque il problema è assurdo, nè si può divider 10 in due parti che moltiplicate faccian 100.

IV. Un numero x di persone debbon pagare per egual porzione la somma di $342'$. Tre non pagando, suppliscon l'altre, il che importa a ciascuna $19'$ di più. Qual è il numero x? Si dirà: la parte di ciascuno se tutti avessero pagato, sarebbe $\frac{342'}{x}$; tre non pagando, la parte

dei rimanenti è $\frac{342}{x-3}$: ma questa supera l'altra di $19'$; dunque $\frac{342}{x-3}-\frac{342}{x}=19$. Fatte le operazioni, si trova $x^2-3x=54$, e paragonando con la formula, si ha $p=-3$, $q=54$, onde $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(54+\frac{9}{4})}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{225}{4})}=\frac{3}{2}\pm\frac{15}{2}=9$ ovvero -6. La prima soluzione è quella che si cerca; la seconda è relativa a un'altra esposizion del problema. Eran dunque 9 i Viaggiatori, 6 dei quali pagando $57'$ per uno, hanno formata la somma di $342'$.

La radice negativa -6 serve al problema inverso, cioè: Un numero x di persone debbon pagare per egual porzione la somma di $342'$: sopraggiungon tre altri che pagando la loro parte, diminuiscon di $19'$ la porzione dei primi. Qual è il numero x? Risolvendo il problema, si trovan le radici $+6$ e -9.

V. Un Generale vorrebbe disporre una Truppa in battaglion quadrato; ma nella sua prima disposizione avanzano 124 uomini, e aggiungendo un uomo ad ogni fila, ne mancano 129. Quanta è la Truppa? Pongo $a=124$, $b=129$, x il numero dei Soldati che formano una fila nella prima disposizione; sarà $x+1$ il loro numero nella seconda: e poichè la doppia disposizione fu fatta con lo stesso numero di Truppe, questo numero sarà espresso in due maniere, dalle quali risulterà l'equazione $x^2+a=x^2+2x+1-b$. Sembra questo un problema del secondo grado: ma trasponendo (189), resta $x=\frac{a+b-1}{2}=126$, onde $x^2=15876$, e per conseguenza x^2+a o sia $15876+124=16000$, Truppa cercata.

VI. Si cercano due numeri tali, che il doppio della lor somma sia triplo del loro prodotto, supponendo che questo triplo eguagli la differenza de' lor quadrati. Sia x il più grande de' due numeri, y il minore. Per la prima condizione, $2(x+y)=3xy$; per la seconda, $3xy=x^2-y^2$, onde $2(x+y)=$

$x^2 - y^2$. Da questa equazione si deduce $x = y + 2$; il che cangia la precedente in $4y + 4 = 3y^2 + 6y$, d' onde viene (201) $y = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$, ed $x = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$.

VII. Il numero degli scudi di A, B è tale che la lor somma sottratta dai lor quadrati fa 78, ma unita al lor prodotto fa 39. Quali son questi numeri? Gli chiamo x, y e operando nei modi soliti, il problema che è del secondo grado, comparisce del quarto. In tali casi potrà farsi così. Sia $2x$ la somma dei due numeri, $2y$ la lor differenza; dunque (196) il maggiore sarà $x + y$, il minore $x - y$. Si avrà perciò I^a^. $(x + y)^2 + (x - y)^2 - 2x = 78$, cioè $39 = x^2 + y^2 - x$; II^a^. $(x + y)(x - y) + 2x = 39 = x^2 - y^2 + 2x$. Sommando le due equazioni, verrà $2x^2 + x = 78$, che risoluta dà $x = -\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = 6$, onde $y^2 = 39 + x - x^2 = 9$, $y = 3$, e i numeri cercati $x + y = 9$, $x - y = 3$.

208. Dee quì osservarsi per ultimo che l' equazioni di questa forma $x^{2m} + px^m = q$ si risolvono come quelle del secondo grado; poichè fatta $x^m = y$, si riducono ad $y^2 + py = q$ onde

$$y = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} \text{ che dà } x = \pm \sqrt[m]{[-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}]}.$$

RAGIONI E PROPORZIONI.

209. DATE due quantità, si può sottrar l' una dall' altra per trovarne la differenza, e si può divider l' una per l' altra per averne il quoziente. La differenza delle due quantità, si chiama il loro *Rapporto* o *Ragione Aritmetica*: il quoziente d' una di esse divisa per l' altra, si chiama il loro *Rapporto* o *Ragion Geometrica* (denominazioni poco felici, ma consacrate da un uso antico). Paragonando pertanto 39 e 13 per averne la differenza, scrivo $39 - 13 = 26$, e la ragione aritmetica di 39 a 13 è 26: ma paragonando 39 e 13 per averne il quoziente, scrivo $\frac{39}{13} = 3$, e la ragion geometrica di 39 a 13 è 3. Se si fosse diviso 13 per 39, il quoziente sarebbe stato $\frac{1}{3}$ (54): ma si avverta una volta per sempre, che valuteremo i rapporti geometrici dividendo la maggior

quantità per la minore: la maggiore si chiamerà *Antecedente*, la minore *Conseguente*.

210. Quando due quantità hanno la differenza stessa di due altre, i quattro termini sono in *proporzione aritmetica*. I numeri 7 e 4 per esempio, differiscon di 3 come i numeri 8 e 5; dunque questi numeri sono in proporzione, e per indicarlo si è convenuto di scrivere 7:4.·.8:5, il che significa: 7 *sta aritmeticamente a* 4 *come* 8 *a* 5. Perciò *due ragioni aritmetiche eguali formano una proporzione aritmetica*: così 24:12.·.60:48.... 1002:1000.·.2:0.

211. Quando due quantità hanno il quoziente medesimo di due altre, queste quattro quantità sono in *proporzione geometrica*. Se si divide 12 per 6 e 18 per 9, il quoziente è 2; dunque i numeri 6, 12, 9, 18 formano una proporzion geometrica che si nota così...6:12:: 9:18, oppure 6:12=9:18, e si pronunzia: 6 *sta a* 12 *come* 9 *a* 18. Perciò *due ragioni geometriche eguali formano una proporzion geometrica*: così 2:6::5 15...7:63::1:9.

212. Un'altra specie di proporzione poco usata dai Matematici, si chiama *armonica*, e consiste in quattro termini, il primo dei quali sta all'ultimo come la differenza tra il primo ed il secondo alla differenza tra il terzo ed il quarto: così 6, 8, 14, 21 sono in proporzione armonica, perchè 6:21::8−6:21−14::2:7.

213 Il primo e l'ultimo termine di una proporzione si chiamano *estremi*, il secondo e terzo *intermedj*: e finchè il primo antecedente sta al suo conseguente come il secondo antecedente al suo, i due ultimi termini diconsi *in ragion diretta* de'due primi: ma se il primo an-

antecedente stia al suo conseguente come il secondo conseguente al suo antecedente, i due ultimi termini sono in *ragione inversa* de' due primi; come 13 : 26 .... 14 : 7

214. Si chiamano *proporzioni continue* quelle, ove il conseguente della prima ragione serve d' antecedente alla seconda: così nelle aritmetiche 10 : 18 ∴ 18 : 26, e si scrive più in breve ÷ 10 : 18 : 26 e nelle geometriche 6 : 24 :: 24 : 96, e si scrive più in breve ∺ 6 : 24 : 96. Il secondo termine si chiama il *medio proporzionale* o *aritmetico* o *geometrico*, secondo la qualità della proporzione.

215. Da più ragioni eguali si ha un numero di quantità proporzionali, e se le proporzioni sieno continue, la serie di queste ragioni eguali forma una *Progressione*, la cui specie si determina dalla natura delle ragioni che la compongono. Ecco una progressione aritmetica 1 : 3 ∴ 3 : 5 ∴ 5 : 7 ∴ 7 : 9 ec. Si scrive ÷ 1 : 3 : 5 : 7 : 9, ec. Ecco una progression geometrica 1 : 2 :: 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: ec. Si scrive ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : ec.

Proporzioni Aritmetiche.

216. Trovata una formula generale della proporzione aritmetica, cioè l' espression generale di due ragioni aritmetiche eguali (210), le proprietà di essa si stenderanno a tutti i casi particolari.

217. Sia $a:b$ la ragione, d la differenza; dunque $a-b=\pm d$, secondo che a sarà maggiore o minor di b; dunque $b=a\mp d$, e posto nella ragione il valor di b, ella diverrà $a:a\mp d$. Sia $c:f$ un' altra ragione e la differenza stessa d; si avrà come prima $f=c\mp d$, e la ragione diverrà $c:c\mp d$; dunque le due ragioni $a:a\mp d$ e $c:c\mp d$, aven-

do la differenza stessa d, sono eguali, e perciò la formula cercata per tutte le proporzioni aritmetiche è $a:a \mp d \cdot\!\cdot\!\cdot c:c \mp d$.

218. Dunque 1°. in qualunque ragione aritmetica l'antecedente diminuito o accresciuto della differenza, eguaglia il conseguente.

219. Dunque 2°. *in ogni proporzione aritmetica la somma degli estremi eguaglia la somma dei medj*; poichè gli estremi della formula precedente sono $a+c \mp d$, e tali son pure i medj. Questa è la più utile proprietà delle proporzioni aritmetiche: onde ogni volta che si avrà $a:b \cdot\!\cdot\!\cdot c:d$, se ne inferirà $a+d=b+c$.

220. Dunque 3°. in una proporzione aritmetica si troverà subito il valore d'un termine ignoto: così volendo il quarto termine della proporzione $17:29 \cdot\!\cdot\!\cdot 13:x$, si ha (219) $17+x=29+13$, onde $x=29+13-17=25$.

221. Dunque 4°. in ogni proporzione aritmetica continua, la somma degli estremi è doppia del medio, poichè allora $a:b \cdot\!\cdot\!\cdot c:d$ si cangia in $a:b \cdot\!\cdot\!\cdot b:d$, onde $a+d=2b$.

222. Dunque 5°. per trovare il medio proporzionale aritmetico x tra due termini a, b, si scriverà $a:x \cdot\!\cdot\!\cdot x:b$; onde $\frac{1}{2}(a+b)=x$, cioè *il medio proporzionale aritmetico tra due quantità date, eguaglia la metà della somma di esse.*

223. Dunque 6°. la progressione aritmetica si esprimerà con la formula seguente, ove ogni termine differisce egualmente da quello che lo precede (215) $\div a:a \mp d:a \mp 2d:a \mp 3d:a \mp 4d:a \mp 5d$, ec.; il segno $-$ è per le *Progressioni decrescenti*, il $+$ per le *crescenti*.

224. Dunque 7°. nella progressione aritmetica la somma dei termini egualmente distanti

dagli estremi è sempre costante, cioè eguaglia la somma degli estremi o la somma dei medj o il doppio del medio, se il numero de' termini è impari: così il secondo termine $a \mp d$ e il penultimo $a \mp 4d$ sommati, danno $2a \mp 5d$, somma evidentemente eguale a quella degli estremi $a + a \mp 5d$. I medj sono $a \mp 2d$ e $a \mp 3d$, la cui somma è parimente $2a \mp 5d$. Si verifichino questi risultati nella progressione $\div 7:12:17:22:27:32:37:42:47$.

225. Dunque 8°. un termine qualunque ω d' una progressione eguaglia la somma del primo a e del prodotto della differenza comune d nel numero dei termini $n-1$ che lo precedono: si avrà dunque $\omega = a \mp d(n-1)$.

226. Dunque 9°. poichè la somma degli estremi è $a + \omega$ e di queste somme ve ne è in una progressione un numero eguale alla metà del numero n dei termini (224) cioè un numero $\frac{n}{2}$, chiamata s la somma dei termini, si avrà $s = (a + \omega)\frac{n}{2}$.

227. Dopo ciò non si troverà difficoltà nel risolvere i due seguenti Problemi.

I. Dati due termini a ed ω, inserir fra loro un numero m di medj proporzionali onde ne risulti una progressione aritmetica. Da a, ω ed $n (= m + 2)$ si ha (225) $\omega - a = d(m + 1)$; dunque $\frac{\omega - a}{m+1} = d$, differenza della progressione cercata.

228. Esempj. Per intercalar sei termini fra 4 e 32 fate $a = 4$, $\omega = 32$, $m = 6$, ed avrete $\frac{\omega - a}{m+1} = \frac{28}{7} = 4 = d$: dunque la progressione cercata è $\div 4 \cdot 8:12:16:20:24:28:32$. Per inserir quattro termini fra 13 e 7, faccio $\omega = 13$, $a = 7$, $m = 4$,

ed ho $d=\frac{13-7}{5}=\frac{6}{5}$, ma poichè la progressione è decrescente, sottraggo da ciascun termine la differenza comune, e la progressione è $\div 13:11\frac{4}{5}: 10\frac{3}{5}:9\frac{2}{5}:8\frac{1}{5}:7$.

229. II. Sia a il primo termine d'una progressione aritmetica, l'ultimo ω, la differenza d, il numero de' termini n, e la loro somma s: trovar delle formule che faccian conoscere il valor di due qualunque di queste quantità, date l'altre tre. Dall'equazione $\omega=a+d(n-1)$ (225) si ottiene I^a. $a=\omega-d(n-1)$; dall' altra $s=(a+\omega)\frac{n}{2}$ (226) si ha II^a. $a=\frac{2s}{n}-\omega$, e se i valori di n,ω presi dall'una si sostituiranno nell' altra, troveremo III^a. $a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{((\omega+\frac{1}{2}d)^2-2ds)}$, IV^a. $a=\frac{s}{n}-\frac{d(n-1)}{2}$: infine due qualunque di queste quattro danno la V^a. $\omega-\frac{d(n-1)}{2}=\frac{s}{n}$. Or ciascuna delle cinque formule ha quattro lettere; presi dunque i lor valori, avremo venti formule che sciolgono il problema e posson disporsi così:

	Date	Si ha	FORMULE
230.	ω, d, n		$a=\omega-d(n-1)$.
231.	ω, n, s	a	$a=\frac{2s}{n}-\omega$.
232.	ω, d, s		$a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{((\omega+\frac{d}{2})^2-2ds)}$.
233.	d, n, s		$a=\frac{s}{n}-\frac{d(n-1)}{2}$.
234.	a, d, n		$\omega=a+d(n-1)$.
235.	a, n, s	ω	$\omega=\frac{2s}{n}-a$.
236.	a, d, s		$\omega=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{(2ds+(a-\frac{d}{2})^2)}$.
237.	d, n, s		$\omega=\frac{s}{n}+\frac{d(n-1)}{2}$.

	Date	Si ha	FORMULE
238.	a, ω, n	d	$d=\frac{\omega-a}{n-1}$.
239.	a, n, s		$d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$
240.	a, ω, s		$d=\frac{\omega^2-a^2}{2s-a-\omega}$.
241.	ω, n, s		$d=\frac{2(\omega n-s)}{n(n-1)}$.
242.	a, ω, d	n	$n=1+\frac{\omega-a}{d}$.
243.	a, ω, s		$n=\frac{2s}{a+\omega}$.
244.	a, d, s		$n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\pm\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+\left(\frac{a}{d}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}$.
245.	ω, d, s		$n=\frac{1}{2}+\frac{\omega}{d}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{\omega}{d}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2s}{d}\right)}$.
246.	a, ω, n	s	$s=\frac{n}{2}(a+\omega)$.
247.	a, d, n		$s=n\left(a+d\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$.
248.	a, d, ω		$s=\left(\frac{\omega+a}{2}\right)\left(1+\frac{\omega-a}{d}\right)$.
249.	ω, d, n		$s=n\left(\omega-d\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$.

Applicazioni. I. Si sa dopo Galileo che cadendo un corpo per solo impulso di gravità, scorre nel primo minuto-secondo 15 piedi in circa, 45 nel minuto″ che segue, e così successivamente in progressione aritmetica: quanto spazio ha scorso dopo 6 secondi? Basta trovar la somma d' una progressione il cui primo termine $a=15$, la differenza $d=30$ e il numero dei termini $n=6$: dunque (247) $s=n\left(a+\frac{d(n-1)}{2}\right)$ $=6\left(15+\frac{30 \cdot 5}{2}\right)=540$, piedi scorsi in 6″.

II. Un Viaggiatore per arrivare in 4 giorni al suo destino accelera ogni giorno di 3 leghe, e nell' ultimo giorno fa leghe $29\frac{1}{2}$: quante ne fe-

ce nel primo? Quì si ha $\omega=29\frac{1}{2}$, $d=3$, $n=4$, e però (230) $a=\omega-d(n-1)=20\frac{1}{2}$, leghe del primo giorno. Si troverebbe anche (249) che tutto il viaggio dei 4 giorni è di leghe $100=s$. Ma se si cerchi in quanti giorni il Viaggiatore farà le 100 leghe, facendone $20\frac{1}{2}$ nel primo e 3 di più ogni giorno, la formula che dà n quando son note a, d, s, fa trovare $n=4$ (244).

III. Uno multato per più mesi ha pagate $6'$ nel primo mese e $102'$ nell'ultimo; ogni mese la multa cresceva di $12'$: per quanti mesi pagò? Quì $a=6$, $\omega=102$, $d=12$ e si cerca (242) $n=1+\frac{\omega-a}{d}=1+\frac{102-6}{12}=9$, mesi di multa.

IV. In una massa di palle da cannone disposte in progressione aritmetica crescente, sono 18 ordini, ciascun de' quali ha 2 palle più del vicino, e sono in tutto 360 palle: quante ne son nell'ultimo ordine? Dalle date d, n, s si ha (237) $\omega=\frac{s}{n}+\frac{d(n-1)}{2}=20+17=37$. Ma quante palle son nel prim'ordine? $a=\frac{s}{n}-\frac{d(n-1)}{2}=20-17=3$ (233).

250. Succede talvolta che cercando n, il risultato è un rotto o un intero unito a rotto; esamineremo questo caso distesamente dopo le applicazioni alle progressioni geometriche.

Proporzioni Geometriche.

251. Sia $a:b$ una ragion geometrica, q il quoziente; dunque $\frac{b}{a}=q$, onde $b=aq$; dunque posto nella ragione il valor di b, ella diverrà $a:aq$. Sia $c:f$ un'altra ragione e il quoziente stesso q; si avrà come prima $f=cq$, e la ragione diverrà $c:cq$;

dunque le due ragioni $a:aq$ e $c:cq$, avendo lo stesso quoziente q, sono eguali; e perciò la formula per tutte le proporzioni geometriche è $a:aq::c:cq$.

252. Dunque 1°. *in ogni proporzion geometrica il prodotto degli estremi eguaglia quello de' medj:* poichè nella formula precedente il prodotto degli estremi, come quello dei medj, è acq.

253. Dunque 2°. dati tre termini d'una proporzione è facile di trovar l'altro x; poichè se $a:b::c:x$, si avrà $ax=bc$, onde $x=\frac{bc}{a}$; e se $a:x::c:d$, si avrà $ad=cx$, onde $x=\frac{ad}{c}$.

254. Ma se la ragione di $a:b$ sia inversa a quella di $c:x$, avremo (213) $a:b::x:c$, ovvero $a:b::\frac{1}{c}:\frac{1}{x}$, onde $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$, ed $x=\frac{ac}{b}$.

255. Dunque 3°. ogni proporzion geometrica $a:b::c:d$, dà un'equazione $ad=bc$.

256. E reciprocamente *un'equazion qualunque dà una proporzione:* così $mn=pq$ dà $m:p::q:n$; $a^2-x^2=b^2-y^2$ dà (134) $a+x:b+y::b-y:a-x$; e $xy=1$ dà $x:1::1:y$, proporzion continua (214).

257. In tutte le proporzioni di questa specie *il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del medio*; poichè se nella proporzion generale $a:b::c:d$ si suppone $b=c$, si ha la proporzion continua $a:b::b:d$, ed $ad=b^2$: onde *per inserire un medio proporzional geometrico* x *tra due quantità date* a, d, *bisogna estrar la radice quadra dal loro prodotto:* così per trovare il medio proporzionale tra 3 e 12, si fa $\div 3:x:12$, onde $x^2=36$, ed $x=6$.

258. Dunque 4°. in quattro grandezze pro-

porzionali posson mettersi gli esrremi in luogo de' medj (inversione che si esprime da alcuni con la parola *invertendo*); si può mettere un medio o un estremo in luogo dell'altro (e ciò si dice *alternando*); e in generale tutte le mutazioni che non distruggono l'eguaglianza del prodotto degli estremi e de' medj, lasciano intatta la proporzione. Se per esempio si ha $a:b::c:d$, niuna delle seguenti mutazioni turba la proporzione:

$$b:a::d:c \quad b:d::a:c \quad d:b::c:a$$
$$a:c::b:d \quad c:a::d:b \quad c:d::a:b$$

perchè si ha in tutte $ad=bc$: anzi può farsene un' infinità d'altre sommando, sottraendo, moltiplicando, dividendo ec., purchè si salvi l'eguaglianza de' due prodotti; così se $a:b::c:d$, sarà

$$a\pm b:b::c\pm d:d \qquad a:a\pm b::c:c\pm d$$
$$a\pm b:a\mp b::c\pm d:c\mp d \qquad na:b::nc:d$$

ed anche $a^m:b^m::c^m:d^m \ldots a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}::c^{\frac{1}{n}}:d^{\frac{1}{n}}$, poichè $ad=cb$ dà $(ad)^m=(cb)^m$ ed $(ad)^{\frac{1}{n}}=(cb)^{\frac{1}{n}}$

259. In generale *le potenze omogenee delle quantità proporzionali son proporzionali*.

260. Dunque 5°. date due proporzioni $a:aq::c:cq$ e $g:gp::h:hp$, i lor prodotti e i lor quozienti a termine per termine, son proporzionali: così $ag:agpq::ch:chpq$.

261. Dunque 6°. *in una serie di ragioni geometriche eguali, la somma degli antecedenti è a quella de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente, o come un qualunque numero d'antecedenti al numero stesso dei lor conseguenti*. Poichè nella serie dei termini proporzionali $a:aq::c:cq::e:eq::g:gq$ regna un quoziente stesso q tra la somma degli antecedenti $a+c+e+g$ e la somma dei conseguenti $(a+c+e+g)q$, come

tra un antecedente qualunque a e il suo conseguente aq, o tra un qualunque numero d'antecedenti e il numero stesso di conseguenti.

262. Quì osserveremo 1°. che data una ragion geometrica, si può col moltiplicare o dividere i suoi due termini per una stessa quantità formarne una serie d'altre che le sieno perfettamente eguali; poichè sia $a:aq$ la ragion data ed m il moltiplicator de'suoi due termini: si avranno i prodotti am, amq che visibilmente hanno tra loro il rapporto stesso q de'due a e aq: dividendo per n questi due termini, i quozienti $\frac{a}{n}$, $\frac{aq}{n}$ hanno similmente lo stesso rapporto q; onde *una ragion geometrica non cangia valore o si moltiplichino o si dividano i suoi due termini per una stessa quantità*: e poichè ogni rotto è una ragion geometrica, resta nuovamente dimostrato ciò che già insegnammo (49). Onde *due quantità hanno tra loro lo stesso rapporto che le loro metà, i loro terzi* ec. *e tutte le lor parti simili*: così si ha sempre $a:b::\frac{a}{p}:\frac{b}{p}::\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}b$.

263. Osserveremo 2°. che si chiama *ragion composta* il rapporto de prodotti di due o più ragioni geometriche moltiplicate antecedente per antecedente e conseguente per conseguente; così $mnp:qrs$ è una ragion composta di tre *ragioni semplici*, $m:q$, $n:r$, $p:s$, che possono mettersi anche sotto questa forma $\frac{m}{q}$, $\frac{n}{r}$, $\frac{p}{s}$. Una ragion composta di due ragioni eguali dicesi *ragion duplicata*; così la ragione di $ab:abqq$ è ragion duplicata delle ragioni eguali $a:aq$ e $b:bq$. Quando vi son tre ragioni eguali, il rapporto dei prodotti respettivi chiamasi *ragion triplicata* ec.

264. Ora la ragion duplicata, triplicata ec. di due altre, di tre ec. è eguale a quella del quadrato, del cubo ec. di quelle ragioni. In fatti nelle due ragioni eguali $a:aq$ e $b:bq$ la ragion duplicata $ab:abq^2$ è espressa dal quoziente q^2 come quella del quadrato $a^2:a^2q^2$ della prima, o $b^2:b^2q^2$ della seconda.

265. Prima di passare alle progressioni geometriche facciamo quì qualche riflessione sull' *Infinito*, il cui carattere o segno è ∞. Già si vede che supposte m, r, b quantità finite e b maggiore dell'unità, sarà m^r un finito, b^∞ un infinito, ed $\frac{m^r}{b^\infty}$ un *infinitesimo*.

266. Presi ora i due termini ∞, m si avrà (253) $\infty : m :: m : \frac{m^2}{\infty}$: ma il primo termine è per ipotesi infinito riguardo al secondo; dunque lo sarà anche il terzo riguardo al quarto: ma il terzo è realmente finito; dunque il quarto $\frac{m^2}{\infty}$ sarà infinitesimo. Ora m^2 è una quantità qualunque finita; dunque in generale *un rotto il cui numeratore è finito e il denominatore infinito, esprime un infinitesimo*.

Segue da ciò 1°. che $\frac{a}{\infty} \times b = \frac{ab}{\infty}$, cioè *l' infinitesimo moltiplicato per un finito dà un infinitesimo*: 2°. che $\frac{a}{\infty} \times \infty = a$, cioè *l' infinitesimo moltiplicato per l'infinito dà un finito*: 3°. se la proporzione $\infty : m :: m : \frac{m^2}{\infty}$ si innalzi alla potenza r e si divida tutta per b^∞, verrà $\frac{\infty^r}{b^\infty} : \frac{m^r}{b^\infty} :: \frac{m^r}{b^\infty} : \frac{m^{2r}}{\infty^r b^\infty}$. Ora i tre ultimi termini sono infinitesimi (265); dunque lo è anche il primo, cioè *un infinito alzato a potenza finita e diviso per un finito alzato a potenza infinita, esprime l' infinitesimo*.

267. Ora poichè il valor d' un rotto è tanto più piccolo quanto è più grande il suo deno-

minatore (48), se questo divenga infinito, il valor del rotto diverrà nullo e si avrà $\frac{m^2}{\infty}=0$, cioè *l'infinitesimo equivale a zero.*

268. E poichè $\frac{m^2}{\infty}=0$, sarà $m \pm \frac{m^2}{\infty} = m$ cioè *una quantità finita non cresce nè scema aggiungendole o togliendole una quantità infinitesima.*

Essendosi però veduto che il prodotto dell' infinitesimo per l'infinito dà un finito, non dovrà farsi $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=1^{\infty}=1$. Infatti sviluppando il binomio e posto $\infty-1=\infty-2=\infty-3$ ec. $=\infty$, si ha $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+$ ec.

269. Giacchè $\infty : m :: m : \frac{m^2}{\infty}$, sarà (258) $\infty \pm m : m :: m \pm \frac{m^2}{\infty} : \frac{m^2}{\infty}$; ma $m \pm \frac{m^2}{\infty} = m$ (268); dunque $\infty \pm m = \infty$, cioè *l'infinito non cresce nè scema aggiungendogli o togliendogli una quantità finita*. E quì si avverta che non può farsi $a^{\infty \pm m}=a^{\infty}$, perchè la somma differenza degli esponenti esprime moltiplicazione o divisione delle quantità (124. 129).

270. Essendo $\infty : m :: m : \frac{m^2}{\infty} = 0$ (267), sarà $\infty = \frac{m^2}{0}$, cioè *un rotto che ha zero per denominatore, esprime l'infinito.*

Dunque 1°. avendosi $\frac{m}{\infty}=0$ (267), sarà $\frac{\infty}{m}=\frac{1}{0}=\infty$, e per la stessa ragione $\frac{b^{\infty}}{m^r}=\infty$, cioè *l'infinito diviso per un finito esprime l'infinito*: 2°. supposto $c > b$ ovvero $c = b + m$, sara $c^{\infty} = (b+m)^{\infty} = b^{\infty} + \infty b^{\infty-1} m + \frac{\infty^2 b^{\infty-2} m^2}{2} +$ ec., e perciò $c^{\infty} > \infty b^{\infty-1}$; dunque $c^{\infty} b > \infty b^{\infty}$, e $\frac{b}{\infty} > \frac{b^{\infty}}{c^{\infty}}$, cioè *un rotto proprio alzato a potenza infinita esprime l'infinitesimo.*

271. Sarà parimente $\frac{m}{\infty}=\frac{0}{m}$: ma $\frac{m}{\infty}=0$ (267);

dunque $\frac{0}{m}=0$, cioè *un rotto che ha zero per numeratore, esprime zero.*

272. Moltiplico ora i due primi termini della proporzione $\infty : m :: m : \frac{m^2}{\infty}$ per ∞^{r-1} e viene $\infty^r : m\infty^{r-1} :: m : \frac{m^2}{\infty}$ ed $\infty^r \pm \infty^{r-1} : \infty^{r-1} :: m \pm \frac{m}{\infty} : \frac{m}{\infty}$: ma $m \pm \frac{m}{\infty} = m$ (268); dunque $\infty^r \pm \infty^{r-1} = \infty^r$, cioè *un infinito d'ordine inferiore svanisce in confronto dell' infinito d'ordine superiore.*

273. Divido infine i due primi termini della proporzione stessa per ∞^{r+1} e viene $\frac{1}{\infty^r} : \frac{m}{\infty^{r+1}} :: m : \frac{m^2}{\infty}$; dunque per la ragione stessa di sopra, $\frac{1}{\infty^r} \pm \frac{m}{\infty^{r+1}} = \frac{1}{\infty^r}$, cioè *un rotto che ha per denominatore un infinito d'ordine superiore, svanisce in confronto di quello che per denominatore ne ha uno d'ordine inferiore.*

274. Cerchiamo ora le proprietà della progression geometrica. Ella si esprimerà con la seguente formula, ove ogni termine diviso per quello che lo precede, dà lo stesso quoziente (215) $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : \ldots aq^n$.

275. Quì gli esponenti di q sono in progressione aritmetica, poichè a cagione di $q^0=1$ (154), si può scrivere $\div aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : \ldots . aq^n$. Facendo $a=1$, quest' ultima formula diventa $\div q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots . q^n$ ed esprime la serie della potenze intere d'una quantità qualunque q; onde le potenze successive e intere d'una stessa quantità forman sempre una progression geometrica. Non così le potenze

successive e frazionarie, perchè i loro esponenti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ec. non sono in progressione aritmetica: onde se *gli esponenti di diverse potenze d'una medesima quantità sono in progressione aritmetica, quelle potenze sono in progressione geometrica*: così si avrà $\div\div q^2 : q^5 : q^8 : q^{11}$ ec. $\div\div b^1 : b^3 : b^5 : b^7 :$ ec. in generale $\div\div aq^m : aq^{m+d} : aq^{m+2d} : aq^{m+3d} :$ ec.

276. Nella formula generale $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$ ec. il prodotto di due termini egualmente lontani dagli estremi è sempre eguale a quello di essi estremi, che similmente è eguale al prodotto degl'intermedj se il numero de' termini è pari, o al quadrato del medio, se è impari. In fatti $aq \times aq^3 = a . aq^4 = aq^2 \times aq^2$.

277. Di più il primo termine della formula sta al terzo come il quadrato del primo al quadrato del secondo; poichè si ha $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$; parimente $a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$ ec. In generale due termini qualunque stanno fra loro come il primo al secondo alzati alla potenza indicata dall'intervallo che separa i due termini.

278. Si vede anche dalla stessa formula che qualunque termine è eguale al prodotto del primo per il quoziente elevato a una potenza indicata dal numero dei termini precedenti; il sesto termine per esempio, aq^5, è il prodotto del primo a per il quoziente q elevato alla quinta potenza. Chiamando dunque ω un termine, ed n il numero dei termini fino ad ω, si avrà generalmente $\omega = aq^{n-1}$.

279. In fine sia s la somma dei termini d'una progression geometrica qualunque di cui conoscasi il primo termine a, l'ultimo ω, e il quoziente q; ed essendo tutti i termini d'una

progressione, a riserva dell'ultimo, antecedenti, si può rappresentar la somma degli antecedenti per $s-\omega$; essendo similmente tutti i termini della progression medesima, a riserva del primo, conseguenti, la somma de' conseguenti si potrà esprimere per $s-a$; dunque (261) $s-\omega:s-a::a:aq$; d'onde si deduce $s=\frac{\omega q-a}{q-1}$, formula che con la precedente risolve un problema analogo a quello già risoluto (229) nelle progressioni aritmetiche. Noi ne diamo quì la soluzione; ma per ben intenderne tutti i risultati bisogna aver letta la Teoria dei logaritmi, e quella dell' equazioni dei gradi superiori.

280. Date in una progression geometrica tre delle quantità seguenti, a primo termine, ω ultimo, n numero dei termini, s loro somma, q loro quoziente, trovar l'altre due. Già si hanno (278.279) l'equazioni I^a. $\omega=aq^{n-1}$, II^a. $\omega=s-\left(\frac{s-a}{q}\right)$, e se i valori di a,q presi dall'una si sostituiranno nell'altra, troveremo III^a. $\omega=\frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$, IV^a. $(s-\omega)\omega^{\frac{1}{n-1}}=(s-a)a^{\frac{1}{n-1}}$; e poichè due qualunque di queste quattro danno la V^a. $aq^{n-1}=s-\left(\frac{s-a}{q}\right)$, avremo al solito (229) venti formule così disposte:

	Date	Si ha	FORMULE
281.	ω, s, n		$(s-a)a^{\frac{1}{n-1}}=(s-\omega)\omega^{\frac{1}{n-1}}$
282.	ω, q, n	a	$a=\frac{\omega}{q^{n-1}}$
283.	ω, q, s		$a=\omega q-sq+s$
284.	q, n, s		$a=s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$

	Date	Si ha	F O R M U L E
285.	a, q, n		$\omega = aq^{n-1}$
286.	a, s, n		$(s-\omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}}$
287.	a, q, s	ω	$\omega = s - \frac{(s-a)}{q}$
288.	q, n, s		$\omega = sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$
289.	a, ω, n		$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$
290.	a, n, s		$q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0$
291.	a, ω, s	q	$q = \frac{s-a}{s-\omega}$.
292.	n, ω, s		$q^n - \frac{s}{s-\omega}\,q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$
293.	a, ω, q		$n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}$.
294.	a, ω, s		$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}$
295.	a, q, s	n	$n = \frac{L(sq - s + a) - La}{Lq}$
296.	ω, q, s		$n = 1 + \frac{L\omega - L(\omega q - sq + s)}{Lq}$
297.	a, ω, n		$s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
298.	a, q, n	s	$s = a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$
299.	a, ω, q		$s = \frac{\omega q - a}{q-1}$
300.	ω, n, q		$s = \frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$

Applicazioni. I. Si prese in 5 volte del vino in progression geometrica crescente il cui ultimo termine è 243 fiaschi ed il quoziente è 3: quanti fiaschi si presero la prima volta? Si ha $\omega = 243$, $q = 3$,

$n=5$, onde (282) $a=\frac{\omega}{q^{n-1}}=\frac{243}{3^4}=\frac{243}{81}=3$, fiaschi presi la prima volta.

II. Uno giocando raddoppia sempre la sua posta e perde dieci volte; la prima volta giocò 3: quanto perde dopo la decima? Si ha $a=3$, $q=2$, $n=10$; dunque (285) $\omega=aq^{n-1}=3.2^9=3.512=1536$.

III. La popolazione d'un Paese ben costumato, libero ed abbondante, è cresciuta uniformemente ogn'anno di tanto, che 10000 anime son giunte a 14641 dopo 4 anni: con qual progressione si è fatto l'aumento? Dunque $a=10000$, $\omega=14641$, $n=5$ (perchè al principiar dei 4 anni già si ha il primo termine 10000), e (289) $q=\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}=\sqrt[4]{\frac{14641}{10000}}=\frac{11}{10}$, quoziente della progressione, onde le 10000 anime divennero sul fine del prim'anno 11000, e perciò l'aumento annuale fu di $\frac{1}{10}$.

IV. Un litigante ha spese in varie liti 121000'. La prima gli costa 1000', l'ultima 81000' e le spese dell'altre liti sono in progressione tra questi due estremi: quante liti ha perdute? $a=1000$, $\omega=81000$, $s=121000$; dunque (294) $n=1+\frac{L\omega-La}{L(s-a)-L(s-\omega)}=1+\frac{L81000-L1000}{L120000-L40000}=1+\frac{L81}{L3}=1+\frac{4L3}{L3}=5$.

V. Un Dissipatore consumò in 5 mesi il suo asse, quadruplicando in ogni mese la spesa che nel primo fu di 300 zecchini: cerco il suo asse. $a=300$, $q=4$, $n=5$, onde (298) $s=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=300\left(\frac{4^5-1}{3}\right)=100.1023=102300^z$.

301. VI. Inserire un numero m di medj geo-

metrici tra a, ω. Da a, ω ed $n(=m+2)$ si ha (289) $q=\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}=\sqrt[m+1]{\frac{\omega}{a}}$; dunque la progressione è $\div a:\sqrt[m+1]{a^m\omega}:\sqrt[m+1]{a^{m-1}\omega^2}:\sqrt[m+1]{a^{m-2}\omega^3}\ldots:\omega$. Così per inserir 4 medj proporzionali tra a e ω, basta fare $m=4$ e viene $\div a:\sqrt[5]{a^4\omega}:\sqrt[5]{a^3\omega^2}:\sqrt[5]{a^2\omega^3}:\sqrt[5]{a\omega^4}:\omega$.

302. VII. Tra i termini consecutivi d'una progression gometrica inserire un numero p di medj proporzionali. Sia la progressione $\div aq^0:aq^1:aq^2:aq^3:aq^4$ ec.: se inserirò tra gli esponenti consecutivi de' suoi termini un numero p di medj proporzionali aritmetici, i termini che avranno per esponenti questi medj aritmetici, saranno i medj geometrici cercati (275): onde se $p=5$, verrà $\div aq^0:aq^{\frac{1}{6}}:aq^{\frac{2}{6}}:aq^{\frac{3}{6}}:aq^{\frac{4}{6}}:aq^{\frac{5}{6}}:aq:aq^{\frac{7}{6}}:aq^{\frac{8}{6}}$ ec., specie d'interpolazione che servì probabilmente ai primi Calcolatori de' logaritmi.

Finiremo con la soluzione di due problemi relativi alle due specie di progressioni spiegate finora, e parleremo del caso di n numero rotto, o intero unito a rotto (250).

303. I. Un Vascello insegue una Nave; questa fa nel primo giorno 13 leghe, nel secondo 15 ec., quello nel primo giorno fa 6 leghe, nel secondo 11 ec., ambedue in progressione o aritmetica o geometrica: cerco se i due Legni si raggiungeranno e quando e dove. E' chiaro che andando i Legni in progressione, non potranno raggiungersi se ciascuno non faccia in egual tempo un egual viaggio; dunque le leghe fatte dai Legni o le somme s, s' delle progressioni, e i giorni impiegativi o i numeri n, n' dei loro termini dovranno essere eguali. Posto ciò

1°. Sia $13=a$, $6=a'$ primi termini delle progressioni aritmetiche; sia $2=d$, $5=d'$ loro differenze, e si avrà (247) $s=n\left(a+\frac{d(n-1)}{2}\right)$, $s'=n'\left(a'+\frac{d'(n'-1)}{2}\right)$, e poichè $s=s'$ ed $n=n'$, sarà $a+\frac{d(n-1)}{2}=a'+\frac{d'(n-1)}{2}$, onde $n=\ldots\frac{2a+d'-2a'-d}{d'-d}=5\frac{2}{3}$, valore che sostituito nell'una o nell'

altra equazione di sopra, dà $s = s' = 100\frac{1}{9}$; dunque il Vascello raggiunge la Nave ne' $\frac{2}{3}$ del sesto giorno in distanza di leghe $100\frac{1}{9}$ dal porto.

2°. Sia ora $a = 13$, $a' = 6$, $q = \frac{15}{13}$, $q' = \frac{11}{6}$, quozienti delle progressioni geometriche, e si troverà (298) $a\frac{(q^n - 1)}{q - 1} = a'\frac{(q'^n - 1)}{q' - 1}$ cioè $\frac{a(q' - 1)}{a'(q - 1)} = \frac{q'^n - 1}{q^n - 1}$, equazione che bisogna risolvere con la doppia falsa posizione; e perciò fatto $n = 3$, $n = 4$, ottengo la prima approssimazione $n = 3{,}57$ da cui vien la seconda $n = 3{,}61$ e quindi la terza $n = 3{,}616$, onde $s = 57{,}251$; dunque il Vascello raggiunge la Nave a $14^{or.}, 47'$ del quarto giorno in distanza di leghe 57,251 dal porto.

304. II. Un Vascello e una Nave partono nel tempo stesso da due luoghi opposti in distanza di leghe $136\frac{1}{2}$; questa nel primo giorno fa 4 leghe, nel secondo 6 ec., quello nel primo giorno fa 6 leghe, nel secondo 8 ec., ambedue in progressione o aritmetica o geometrica: cerco quando i due Legni s' incontreranno e dove. E' chiaro che andando i Legni in progressione, s'incontreranno dopo un viaggio in cui ciascuno avrà spesa un' egual quantità di giorni, e nell' istante dell' incontro avranno scorsa tra tutti e due la distanza de' due luoghi opposti; dunque le leghe fatte dai Legni o la somma $s + s'$ dovrà eguagliar la distanza de' due luoghi, e i giorni impiegativi o i numeri n, n' dei termini dovranno essere eguali. Posto ciò

1°. Sia $4 = a$, $6 = a'$ primi termini delle progressioni aritmetiche; sia $2 = d$, $2 = d'$ lor differenze; e le leghe $136\frac{1}{2} = b$. Essendo $s + s' = b$ ed $n = n'$, si avrà (247) $n\left(a + d\frac{(n-1)}{2}\right) + n'\left(a' + d'\frac{(n'-1)}{2}\right) = b$, e risolvendo si ottiene $n = -\frac{(2a + 2a' - d - d')}{2d + 2d'} + \sqrt{\left[\left(\frac{2a + 2a' - d - d'}{2d + 2d'}\right)^2 + \frac{2b}{d + d'}\right]} = 6\frac{1}{2}$, valore che sostituito, ci dà $s = n\left(a + d\frac{(n-1)}{2}\right) = 61\frac{3}{4}$, $s' = n'\left(a' + d'\frac{(n'-1)}{2}\right) = 74\frac{3}{4}$, ed $s + s' = b = 136\frac{1}{2}$; dunque i due Legni s' incontrano nella metà del settimo giorno quando la Nave ha fatte leghe $61\frac{3}{4}$ e il Vascello leghe $74\frac{3}{4}$.

2°. Sia ora $a = 4$, $a' = 6$, $q = \frac{3}{2}$, $q' = \frac{4}{3}$ e $b = 136\frac{1}{2}$. Avremo $s + s' = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{a'(q'^n - 1)}{q' - 1} = b$ cioè $b(q - 1)(q' - 1) = a(q' - 1)(q^n - 1) + a'(q - 1)(q'^n - 1)$, in cui posta $n = 5$, $n = 6$, si ha la prima approssimazione $n = 5{,}47$ e di quì la seconda $n = 5{,}513$, onde $s = 66{,}796$, $s' = b - s = 69{,}704$; dunque i Legni s' incontrano a $12^{or.}, 19'$ del sesto giorno quando la Nave ha fatte leghe 66,796 e il Vascello 69,704.

305. Ma come trovare una progressione di n termini quando

si ha per esempio $n = g + \frac{h}{m}$? nulla di più facile, supposto il seguente teorema che presto può dimostrarsi: *se i termini d' una data progressione che ha* d *per differenza o* q *per quoziente, si sommino a due a due, a tre a tre o in generale ad* m *ad* m, *ne nascerà una nuova progressione omogenea che avrà* dm² *per differenza o* qᵐ *per quoziente*. Osservo dunque che i g termini interi della nostra progressione debbono essere in progressione col rotto $\frac{h}{m}$, e ciò non può avvenire se ciascuno degli interi non si divida in m parti tali, che con le parti h dell' intero seguente formino una progressione continuata; cioè con la progressione di $g + \frac{h}{m}$ termini, si tratta di formare una nuova progressione di $gm + h$ termini, eguale alla data. Poste dunque d, d'' o q, q'' le differenze o i quozienti della data e della cercata, essendo ogni termine della data la somma di m termini della cercata, sarà per l' esposto teorema, $d''m^2$ la sua differenza o q''^m il suo quoziente; ma questi erano anche d, q; dunque $d''m^2 = d$, $q''^m = q$, e perciò $d'' = \frac{d}{m^2}$ differenza della progressione cercata se è aritmetica, $q'' = \sqrt[m]{q}$ suo quoziente se è geometrica; e perchè si ha inoltre la somma $s = a$, e il numero dei termini $n = m$, come si è detto, si avrà subito il primo termine $a'' = \frac{2am + d - dm}{2m^2}$ per l' aritmetica, ed $a'' = \frac{a\sqrt[m]{q} - a}{q - 1}$ per la geometrica.

Esempj. 1°. Sia la progressione $\div 3, 5$ ec., ove $a = 3$, $d = 2$, e sia $n = 3\frac{2}{3}$, onde $s = 20\frac{7}{9}$, $m = 3$; sarà $d'' = \frac{2}{9}$, $a'' = \frac{7}{9}$ e si avrà $\div \frac{7}{9}, 1, 1\frac{2}{9} \mid 1\frac{4}{9}, 1\frac{6}{9}, 1\frac{8}{9} \mid 2\frac{1}{9}, 2\frac{3}{9}, 2\frac{5}{9} \mid 2\frac{7}{9}, 3 = 20\frac{7}{9} = s$.

2°. Sia la progressione $\dot{\dot{\div}}\, 3, 21$ ec., ove $a = 3$, $q = 7$, e sia $n = 1\frac{2}{3}$, onde $s = \frac{7\sqrt[3]{7^2} - 1}{2}$, $m = 3$; sarà $q'' = \sqrt[3]{7}$, $a'' = \frac{\sqrt[3]{7} - 1}{2}$ e si avrà . . . .

$$\dot{\dot{\div}}\, \frac{\sqrt[3]{7} - 1}{2}, \frac{\sqrt[3]{7^2} - \sqrt[3]{7}}{2}, \frac{7 - \sqrt[3]{7^2}}{2} \Bigg| \frac{7\sqrt[3]{7} - 7}{2}, \frac{7\sqrt[3]{7^2} - 7\sqrt[3]{7}}{2} = \frac{7\sqrt[3]{7^2} - 1}{2}$$

$= s$; e nei due esempj si vede che i primi tre termini delle nuove progressioni eguagliano il primo della data e così di seguito, e i due ultimi sono i $\frac{2}{3}$ del termine che nella data non è compito.

REGOLE DEL TRE

di Falsa Posizione e d' Interesse.

306. DATI tre termini, si ha spesso bisogno di conoscerne un quarto che sia loro proporzional-geometrico, e si sa (253) che è facile di trovarlo. La regola or *diretta* ed ora *inversa* (254) che si adopra, si chiama *Regola del Tre*, semplice applicazione della proprietà fondamentale delle proporzioni geometriche (252).

307. Dei tre dati termini, due sono *omogenei* o della medesima specie, l' altro è *solitario* o di specie diversa a cui poi viene omogeneo il quarto cercato; e dei due omogenei l'uno è con interrogazione, l'altro è senza. Or per fissare un metodo costante *i tre termini si dispongon sempre in modo che l' omogeneo senza interrogazione occupi il primo luogo a sinistra, quindi segua il solitario, e in fine l' altro omogeneo*: avvertendo che *se la regola sia inversa, il solitario e il suo omogeneo cercato dovranno esser denominatori dell' unità* (254.258). Dopo ciò, si opera al solito (253).

Esempj. Quanto costano *lib.* 25 d'argento supposto che *lib.* 1 costi $52'$? Quì il termine solitario è $52'$, l'omogeneo con interrogazione è *lib.* 25, l'altro è *lib.* 1; dunque $1:52::25:x=\frac{25 \cdot 52}{1}=1300'$. Volendo il prezzo di *lib.* 70 supposto che *lib.* 14 costino $714'$, si farebbe $14:714::70:x=\frac{714 \cdot 70}{14}=3570'$. Ma se si proponesse questo quesito... 57 artefici fanno una cert'opera in 5 giorni, in quanti la faranno 19 artefici? la regola sarebbe *inversa*, perchè quan-

to è *minore* il numero dei lavoranti, tanto è *maggiore* il tempo necessario a terminare un lavoro; dunque $57 : \frac{1}{5} :: 19 : \frac{1}{x}$ ed $x = \frac{5 \cdot 57}{19} = 15$ giorni.

308. Osservate I°. che se il primo dei tre termini abbia un fattor comune con uno o con ambedue gli altri, si può render più semplice il calcolo sopprimendo il comun fattore (262): così invece di calcolar $66 : 14 :: 121 : x$, divisi per 2 i primi due termini e per 11 il primo e il terzo, si calcola $3 : 7 :: 11 : x = \frac{77}{3}$. II°. che le Regole del Tre sono inverse allorchè paragonando insieme i *termini omogenei* si trova che quanto gli uni son *maggiori* tanto gli altri debbono esser *minori* o reciprocamente.

309. Diamo altri esempj di queste regole. I°. 6 squadroni hanno consumato un magazzino in 54 giorni; in quanti giorni l'avrebbero consumato 9 squadroni? Quanto è *maggiore* il numero degli squadroni, tanto *minor* tempo ci vuole per il consumo medesimo. La regola è dunque inversa (308); perciò $6 : \frac{1}{54} :: 9 : \frac{1}{x}$; dunque $x = \frac{54 \cdot 6}{9} = 36^{g}$.

II°. Sono state date 36^{l} per distribuirsi a 32 poveri; quante ce ne vorrebbero per 72 poveri a cui si volesse dar la stessa elemosina? Si ha $32 : 36 :: 72 : x$ che ridotta diviene $8 : 9 :: 72 : x$, e quindi $1 : 9 :: 9 : x = 81$.

III°. Sapendosi che la lunghezza del Braccio Fiorentino è a quella del Piede Parigino :: 2580,454 : 1440, si cerca a quanti piedi x corrispondono br^{a}. 25 e 11 soldi $= 25,55$. Quanto è *minore* il numero delle parti eguali contenute nella misura Francese, tanto è *maggiore* il numero dei Piedi in cui si cangia la Fiorentina;

dunque 2580, $454 : \frac{1}{25,55} :: 1440 : \frac{1}{x}$, ed $x = 45,79$. Tale è la regola per ridur le misure.

310. Si proponga ora questo quesito: 20 uomini hanno fatte 160 tese di lavoro in 15 giorni, quante ne farebbero in 12 giorni 30 uomini? Questa si chiama *Regola del Tre composta*, perchè i termini omogenei son ragioni composte. Infatti il lavoro risulta e dalla ragione 20:30 degli uomini, e dall'altra 15:12 dei giorni. Perciò componendo le ragioni (263), i termini omogenei sono 20×15 e 30×12, e si ha $20 \times 15 : 160 :: 30 \times 12 : x = 192$.

311. Ma sia proposto quest'altro quesito: 20 uomini scavando un Canale debbono asciugar giornalmente 6 piedi d'acqua per fare in un certo tempo 160 tese di lavoro: quanto ne faranno nel tempo stesso 30 uomini asciugando giornalmente 8 piedi d'acqua? Ad un *maggior* numero di Lavoranti corrisponde un *maggior* lavoro, e la regola per questa parte è diretta: ma ad un *maggiore* impedimento, qual è asciugar l'acqua, corrisponde un lavoro *minore*, e la regola per l'altra parte è inversa (308). Quindi i due lavori sono in ragion diretta 20:30 degli uomini, e in ragione inversa $\frac{1}{6} : \frac{1}{8}$ dei piedi d'acqua; componendo dunque le ragioni, si ha $\frac{20}{6} : 160 :: \frac{30}{8} : x = 180$.

La regola del Tre semplice e composta è di grandissimo uso in tutte le parti delle Matematiche: è facile applicarla alle Regole di *Compagnia* e d'*Alligazione*, sopra le quali proporremo qualche problema per esercizio al fine dell'Algebra. Qui parleremo piuttosto delle Regole di falsa posizione e d'interesse.

312. La *Regola di falsa posizione* fa trovare un numero incognito per mezzo d' un numero supposto. Vogliasi per esempio, I°. un numero x di cui la metà, il quarto e il quinto facciano 456. Suppongo 20 il numero cercato: ma $\frac{20}{2}+\frac{20}{4}+\frac{20}{5}=19$; dunque la supposizione è falsa. Per altro giacchè $20:x::\frac{20}{2}:\frac{1}{2}x::\frac{20}{4}:\frac{1}{4}x::\frac{20}{5}:\frac{1}{5}x$ (262), sarà (261) $\frac{20}{2}+\frac{20}{4}+\frac{20}{5}(=19):\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x\ (=456)::20:x=480$, valore che si sarebbe anche avuto risolvendo l'equazione $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x=456$.

II. Tre Negozianti hanno perdute in società 2400' da ripartirsi a proporzion dei capitali; quello del primo eguaglia i due altri, e quello del secondo è doppio di quello del terzo: cerco la perdita di ciascuno. Suppongo 3' il capitale del terzo; dunque quello del secondo è 6', e quello del primo 9', e però

$$18:2400 \text{ ovvero } 3:400::\begin{cases}3:x=400\\6:x=800\\9:x=1200\end{cases}$$

ed altri infiniti numeri formati come 18, avrebbero dato lo stesso risultato.

III. Quanto tempo vi vorrà a riempire una vasca aprendo a un tempo stesso quattro orifizj, il primo dei quali la riempie da se solo in 2 ore, il secondo in 3, il terzo in 5, il quarto in 6? suppongo che vi voglia 1 ora; dunque il primo orifizio ne empirebbe in questo tempo $\frac{1}{2}$, il secondo $\frac{1}{3}$, il terzo $\frac{1}{5}$, e il quarto $\frac{1}{6}$; ora $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6}{5}$ e perciò $\frac{6}{5}:1::1:x=\frac{5}{6}=50'$.

313. Ma certi problemi esigono due supposizioni, e di quì la *Regola di doppia falsa posizione*.

Esempio. Si prometton 3 lire il giorno ad un Artefice, con che perda del suo 24 soldi il giorno se non lavora: dopo 15 giorni riceve 24ˡ: quanti giorni lavorò? Suppongo 6 giorni: ma in tal caso avrebbe ricevute 7ˡ.4ˢ, mentre ha ricevute 24ˡ; dunque io sono in errore di 16ˡ.16ˢ, o di 16,8ˡ in meno; onde l'Artefice lavorò più che 6 giorni. Suppongo dunque 12 giorni: ma allora avrebbe ricevute 32ˡ.8ˢ, mentre ha ricevute 24ˡ; dunque l'errore è di 8ˡ.8ˢ o di 8,4ˡ in più. Dispongo così i numeri supposti e i corrispondenti errori

Pos. I.	6ᵍ	Pos. II.	12ᵍ
Er.	− 16, 8	Er.	+ 8, 4

e moltiplico la prima posizione per il secondo errore, la seconda per il primo. Sommo i prodotti 50,4 e 201,6, divido la somma 252 per la somma degli errori 25,2 (i segni +,− non si attendono) e ho 10, numero cercato. Se i numeri supposti avessero dati due errori con lo stesso segno, avrei divisa la differenza dei prodotti per quella degli errori: così supposti non più 12 giorni ma 9, l'errore in meno sarà di 4,2ˡ; dunque $9 \times 16,8 = 151,2$ e $6 \times 4,2 = 25,2$; e poi $151,2 - 25,2 = 126$.... $16,8 - 4,2 = 12,6$, ed infine $\frac{126}{12,6} = 10$, come sopra.

314. Dunque la regola consiste nel supporre un numero in cui si sperimentano le condizioni del problema, e se vi soddisfà, il problema è risoluto. Ma se non vi soddisfà, si nota l'errore o positivo o negativo, e si suppone un altro numero di cui pur si nota, con l'ordine stesso di prima, l'errore. Quindi si moltiplica la prima posizione per il secondo errore, e la seconda per il primo: se i segni son diversi,

la somma de' prodotti si divide per quella degli errori; se i segni son gli stessi, si divide la differenza de' prodotti per quella degli errori: il quoziente è il numero cercato.

Altro Esempio. Un Giocatore scommette 12 contro 8 ad ogni partita. Dopo averne fatte dieci, l'altro gli paga 20; quante partite ha vinte? Sieno 6; l'altro dunque ne ha guadagnate 4, e sarebbero pari: il primo errore è perciò -20. Ma sieno 8; l'altro dunque gli sarebbe debitor di 40, e il secondo errore sarà $+20$ Dal che si vede senza calcolo che ne ha vinte 7. Infatti la somma dei prodotti è 280, quella degli errori è 40, e $\frac{280}{40}=7$.

315. Si può applicar questa Regola a molti di quei problemi che abbiamo già risoluti (194): alcuni credono anche di abbreviarla con un preteso *compendio* che per nostro avviso non merita questo nome, onde non ne parliamo.

316. La Regola di doppia falsa posizione consiste dunque nell'andar tentando; ma questo tentare è prezioso, ed è qualche volta necessario ricorrervi nell'equazioni della Geometria sublime, nei calcoli Astronomici ec. Per dimostrarla basta scioglier questo problema: *date le condizioni per trovare un certo numero, dati due numeri o posizioni che non le adempiono, e dati gli errori risultanti dalle posizioni, trovare il numero.*

Sia x questo numero, $gx=c$ l'equazione esprimente le condizioni per trovarlo, a,b le due posizioni, ed m,n i due errori con diverso segno; dunque $gx=c$ si cangierà in $ga=c\pm m$, $gb=c\mp n$, equazioni che moltiplicate l'una per n, l'altra per m e sommate, divengono $g(an+bm)=c(n+m)$, onde $\frac{c}{g}=x=\frac{an+bm}{n+m}$, come pre-

scrive la regola (314). Se gli errori abbiano il segno stesso, l'equazioni saranno $ag=c\pm m$, $gb=c\pm n$, che moltiplicate l'una per n, l'altra per m e sottratte, danno $g(an-bm)=c(n-m)$; onde $\frac{c}{g}=x=\frac{an-bm}{n-m}$, come pur prescrive la regola (314).

317. Del resto ella può estendersi ai problemi di un grado qualunque r quando almeno le lor condizioni son riducibili a un'equazione pura $gx^r=c$; ma non suole usarsi oltre i problemi del primo grado, e questi ancora se contengano più di due condizioni, riescon sì fastidiosi a risolversi per suo mezzo, che gli stessi Aritmetici vi han rinunziato. Convien dunque mostrare come ciò si accordi con quanto si è detto or ora (316) sull'uso di questa regola nell' equazioni di Geometrìa sublime ec.

L'equazione $x^2+15=10x$ si sa risolvere (201) e presto si trova che una sua radice è prossimamente $x=1,8377$: serva dunque essa di modello per la risoluzion di tant'altre che senza la nostra regola sarebbero affatto intrattabili. Poste in un membro le quantità note, e nell' altro l'incognite, onde si abbia $15=x(10-x)$, suppongo $x=1$, $x=2$, e sostituendo, trovo gli errori -6, $+1$: opero al solito (314) e viene la prima approssimazione $x=1,857$ da cui deduco che x sarà forse tra 1,8 e 1,9. Stabilisco perciò due altre posizioni $x=1,8$, $x=1,9$ e sostituendo come prima, ottengo gli errori $-0,24$, $+0,39$ e la seconda approssimazione $x=1,838$, onde x può stimarsi tra 1,83 e 1,84. Da queste due nuove posizioni ho gli errori $-0,0489$, $+0,0144$ e la terza approssimazione $x=1,837725$, onde

x può stimarsi tra 1,837 e 1,838. Infatti quest' altre due posizioni danno gli errori $-0,004569$, $+0,001756$ e la quarta approssimazione $x=1,8377225$ che avendo le stesse quattro o cinque prime decimali della passata, dà sicuramente $x=1,8377$.

Questa maniera di applicar la regola è la più breve di quante ne sono in uso, e laddove con l'altre non si sa nè si conosce il valore esatto dell'incognita se mai vi sia, questa ha il vantaggio di farvi imbattere il Calcolatore come può vedersi nell'equazione $16=x(10-x)$, prese per esempio, le posizioni $x=3$, $x=4$ o l' altre $x=9$, $x=10$. Ma si avverta che la regola suppone possibili le condizioni per trovar x, e perciò guiderebbe ad assurdo in caso di x immaginario: così avviene nell' equazione $10=x(4-x)$, prese per esempio, le posizioni $x=1$, $x=4$.

318. La *Regola d' Interesse* o *Frutto* fissa la somma dovuta per il denaro impiegato con certe condizioni. Essa può variarsi all'infinito, il che rende in molti casi il calcolo complicato assai. Noi ci limiteremo ai più comuni.

1°. Un Usurajo ha date 15600ˡ a 8 per 100 l'anno: qual somma gli si deve in 5 anni per rimborsarlo e pagarli il frutto? Sia $p=15600$ che si chiama *Principale*, *Sorte*, *Fondo* o *Capitale*; sia $t=5$ anni, tempo in cui corre il frutto; sia r il frutto di 1ˡ in un anno o nel tempo che 100ˡ ne fruttano 8 (si trova r dicendo: se 100ˡ danno 8, che darà 1ˡ? $100:8::1:r=0,08$); sia finalmente s la somma dovuta per fondo e interessi. Or se 1 lira in 1 anno frutta r, p lire in t anni frutteranno prt (310) che col capitale p fanno la somma $s=p+prt$; d'onde si ricava

$p=\frac{s}{rt+1}\ldots r=\frac{s-p}{pt}\ldots t=\frac{s-p}{pr}$. Sostituiti i valori, viene $s=15600+15600\times0{,}08\times5=21840^l$. Proponendo la questione così: in capo a 5 anni è stata pagata per sorte e frutti a 8 per cento la somma di 21840^l; qual era il fondo? bisogna sostituir questi valori nella formula $p=\frac{s}{rt+1}$ che dà 15600^l: così trovasi il tempo o il frutto, date le altre tre cose.

319. 2°. Un negoziante dee pagar 1000 lire l'anno; ma per bisogno di denaro chiede di ritenerle per pagar poi gli arretrati coi frutti a 5 per 100: che dovrà dopo 8 anni? Sia a la *Rendita*, *Annuità* o *Pensione* da pagarsi ogni anno; sia r il frutto d'una lira in un anno, t il tempo dopo cui saran pagati i frutti e gli arretrati, s la loro somma, e dico: la rendita si paga al fin dell'anno, onde il Negoziante per il prim'anno non deve alcun frutto. Ma al fine del second'anno dovrà ar, al fin del terzo $2ar$, e così di seguito sino al fin dell'ultimo, in cui dovrà $ar\,(t-1)$. Or questi frutti formano una progressione aritmetica il cui primo termine è zero, l'ultimo è $ar(t-1)$ e il numero de' termini è t. La loro somma sarà dunque (246) $\frac{1}{2}(art(t-1))$, che unita alla rendita at, dee formar la somma degli arretrati e de' frutti; dunque $s=\frac{1}{2}at\,(2+r(t-1))$; d'onde si hanno a, r, t. Sostituendo i valori, si trova $s=4000(2+0{,}35)=9400$.

320. Questi quesiti appartengono alla Regola d'interesse *semplice*. I due seguenti esigon quella d'interesse *composto*: si chiama così il frutto del capitale e dei frutti di esso.

3°. Si impiegano 20000^l al 5 per 100, e

dopo un anno questa somma è resa col frutto pattuito: ma trovatone subito l'impiego allo stesso frutto, si forma un nuovo capitale delle 20000^l e del frutto d'un anno: così sono impiegati al fin del terz'anno il fondo e i frutti del secondo, e così per 6 anni: qual'è la somma di tutto? Sia $p=20000^l$, $t=6$ anni, $s=$ alla somma cercata, $r=0{,}05$ frutto semplice d'una lira, $q=1^l+r=$ ad una lira col suo frutto e perciò $q=1{,}05$ (318). Or se 1^l sorte produce q sorte e frutto in un anno, q sorte produrrà q^2 sorte e frutto nel secondo, poichè $1:q::q.q^2$; onde la somma dovuta per 1^l e per il suo frutto in 2 anni sarà q^2; così sarà q^3 per 3 anni, e q^t per t anni. Ma poichè 1^l produce q^t in un tempo t, anche p^l produrranno pq^t nel tempo medesimo; e perciò $s=pq^t=20000\times1{,}05^6=20000\times 1{,}3401=26802^l$ meno quattro o cinque soldi.

La formula $s=pq^t$ dà $p=\frac{s}{q^t}$, $q=\sqrt[t]{\frac{s}{p}}$ o $Lq=\frac{Ls-Lp}{t}$, $t=\frac{Ls-Lp}{Lq}$. I logaritmi abbrevian questi calcoli.

321. 4°. Un Banchiere riscuote nel 1776 una rendita di 2400^l che impiega a 4 per 100 nel 1777, onde al fin di quest'anno riceve 2400^l della rendita e 96^l del frutto; e così impiega ogn'anno fino al 1784 la rendita dell'anno precedente coi frutti degli altri anni: quanto riscuoterà al fin del 1783? Sia $a=2400$, $t=8$ anni, $r=0{,}04$, frutto annuo di 1^l, $q=1+r=1{,}04$. Sarà a il credito del Banchiere nel 1776, $2a+ar(=a+aq)$ il suo credito nel 1777, $a+a+aq+ar+arq(=a+aq+aq^2)$ il suo credito nel 1778, e così successivamente fino al suo credito dopo t anni, espresso da $a+aq+aq^2\ldots+aq^{t-1}$.

Or la somma di questa progressione è (298) $s = \frac{a(q^t - 1)}{r}$, credito dopo un numero t d'anni che dà qui $s = \frac{(1,04)^8 - 1}{0,04} \times 2400 = 22114'$ con piccolissimo errore.

Ella dà ancora $a = \frac{rs}{q^t - 1}$, $t = \frac{L\left(\frac{rs}{a} + 1\right)}{Lq}$, $q^t - \frac{sq}{a} + \frac{s - a}{a} = 0$ sostituendo $q - 1$ in luogo di r, e quest' equazione darà almeno un valore approssimato per q, se non ha divisor commensurabile: si potrà dunque dedurne il valor di r.

ALCUNE NOZIONI SULLE SERIE.

322. Dicesi *Serie* un aggregato di termini che crescono o scemano con certa legge come le progressioni aritmetiche e geometriche: è *finita* quando ha un numero finito di termini, ed *infinita* quando si suppone continuata all' infinito: è *divergente* o *convergente* secondo che i suoi termini crescono o scemano di valore; e diverge o converge tanto più rapidamente quanto più il valore di ciascun termine cresce o scema riguardo a quello che lo precede.

Diconsi *prime differenze* d' una serie i residui della sottrazione di due contigui termini di essa; *seconde differenze* i residui della sottrazione di due contigui termini delle prime ec.

Sia la serie 21, 34, 55, 89, 144 ec.
13, 21, 34, 55 prime differenze
8, 13, 21 seconde differenze
5, 8 terze differenze ec. ec.

Serie algebriche del prim' ordine son quelle in

cui tutti i termini son costanti; del *secondo*, *terzo* e in generale dell' m^{sime} *ordine* son quelle che hanno costanti le prime o le seconde o le $(m-1)^{sime}$ differenze: tali sono le serie d, d, d ec., $a, a+d, a+2d$ ec.; $a^2, (a+d)^2, (a+2d)^2$ ec. e in generale $a^m, (a+d)^m, (a+2d)^m$ ec.

323. Le serie algebriche sono dei numeri *figurati*, o dei numeri *poligoni* o delle *potenze* dei numeri.

I. Le serie dei numeri figurati comincian così

Numeri							
Costanti	1,	1,	1,	1,	1,	1	ec.
Naturali	1,	2,	3,	4,	5,	6	ec.
Triangolari	1,	3,	6,	10,	15,	21	ec.
Piramidali	1,	4,	10,	20,	35,	56	ec.

E' legge di queste serie che ciascuno dei loro termini sia la somma dei termini corrispondenti della serie precedente: così la seconda è formata dalla continua somma dell' unità, la terza dalla somma continua dei termini della seconda, poichè $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ ec.: onde queste serie hanno costanti successivamente i termini, le prime differenze, le seconde ec.

II. Le serie dei numeri poligoni son la somma dei termini consecutivi di una progressione aritmetica che comincia da 1; e questi numeri diconsi *triangolari*, *quadrati*, *pentagoni* ec. secondo che la differenza delle progressioni è 1, 2, 3 ec. onde queste serie hanno costanti le seconde differenze:

Progr. Arit.		Num. Polig.	
1, 2, 3, 4, 5 ec.	Diff. 1	1, 3, 6, 10, 15 ec.	Triangolari
1, 3, 5, 7, 9 ec.	Diff. 2	1, 4, 9, 16, 25 ec.	Quadrati
1, 4, 7, 10, 13 ec.	Diff. 3	1, 5, 12, 22, 35 ec.	Pentagoni
1, 5, 9, 13, 17 ec.	Diff. 4	1, 6, 15, 28, 45 ec.	Esagoni

Si chiaman Poligoni perchè esprimono i diversi numeri le cui unità posson disporsi in triangolo, in quadrato o in qualche altro poligono: così può darsi una forma triangolare alle unità 1, 3, 6 ec: quadrata alle unità 1, 4, 9 ec., come può vedersi nella fig. 69.

III. Le serie delle potenze nascono dalle diverse potenze dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5 ec.: onde queste, come quelle dei numeri figurati, hanno successivamente costanti i termini, le prime differenze, le seconde ec.

324. La principale operazione su queste tre specie di serie consiste nel sommarle, e vedremo tra poco come ciò si faccia. Osserviamo intanto un metodo assai noto ai Geometri, il *Metodo dei Coefficienti Indeterminati*, per mezzo del quale non solo si ha la serie in cui può risolversi un'espressione qualunque, ma si calcolano anche le serie algebriche, di cui abbiam parlato, e un'infinità d'altre. Egli è mirabile per la sua utilità e per lo spirito d'invenzione che vi regna, e *se si usi con una certa avvertenza*, non è men pregevole per la brevità che per la sicurezza. Suppongo dunque che voglia ridursi in serie il rotto $\frac{\varphi}{p+x}$: ciò può farsi con la divisione, con la formula del binomio, e con questo metodo. Sieno A, B, C, D, E ec. delle quantità tali che si abbia l'equazione $\frac{\varphi}{p+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ ec.; tal supposizione è permessa, poichè A, B, C ec. posson ricever qualunque valore esiga il calcolo, ed x è alzata a tutte le sue potenze. Moltiplicando l'equazione per $p+x$ e ordinando, si ha

$$\varphi = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 + \text{ec.} \\ \quad\;\; + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.} \end{cases}$$

e trasponendo φ . . . .

$$o = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 + \text{ec.} \\ (-\varphi + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.} \end{cases}$$

Or poichè il secondo membro è zero, suppongo A, B, C ec. tali che ciascuna colonna sia zero, con che ho tante equazioni quanti sono i coefficienti indeterminati A, B, C ec., che così si determinano: dunque 1°. $Ap - \varphi = o$: 2°. $Bpx + Ax = o$: 3°. $Cpx^2 + Bx^2 = o$; 4°. $Dpx^3 + Cx^3 = o$: 5°. $Epx^4 + Dx^4 = o$ ec. La prima equazione dà $A = \frac{\varphi}{p}$, valore che posto nella seconda, dà $B = -\frac{\varphi}{p^2}$; posto il valor di B nella terza, si trova $C = \frac{\varphi}{p^3}$ ec.; onde mettendo per A, B, C ec. i lor valori nell' equazion primitiva, si ottiene $\frac{\varphi}{p+x} = \frac{\varphi}{p} - \frac{\varphi x}{p^2} + \frac{\varphi x^2}{p^3} -$ ec., e la legge della serie è manifesta. Dunque $\frac{\varphi}{x^n(p+x)} = \frac{\varphi}{px^n} - \frac{\varphi}{p^2 x^{n-1}} +$ ec., il che si avverta per sempre.

Debba ridursi in serie $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$; posto... $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2 +$ ec., si avrà $a^2 = (a^2 + 2ax - x^2)(A + Bx + Cx^2 + \text{ec.})$, ovvero moltiplicando attualmente e trasponendo a^2,

$$o = \begin{cases} a^2 A + a^2 Bx + a^2 Cx^2 + a^2 Dx^3 + \text{ec.} \\ -a^2 + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + \text{ec.} \\ \qquad\qquad - Ax^2 - Bx^3 - \text{ec.} \end{cases}$$

onde $A = 1$, $B = -\frac{2}{a}$, $C = \frac{5}{a^2}$, $D = -\frac{12}{a^3}$ ec. dal che viene $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{12x^3}{a^3} +$ ec.

Voglia ridursi in serie $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$. Supposto $1 + 2x = (1 - x - x^2)(A + Bx + Cx^2 + \text{ec.})$, fatta la

moltiplicazione e trasposto il primo membro, si troverà $A=1$, $B=3$ ec., onde $\frac{1+2x}{1-x-x^2}=1+3x+4x^2+7x^3+11x^4$ ec., serie che dicesi *Ricorrente*, perchè per formare il coefficiente di ciascun termine convien *ricorrere* alla somma dei due che lo precedono.

325. Con questo metodo può estrarsi la radice quadra di a^2-x^2 già trovata di sopra (180). Pongo $\sqrt{(a^2-x^2)}=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6$ ec., il che dà

$$0=\begin{cases} A^2+2ABx^2+\ B^2x^4\ +2ADx^6+\text{ec.} \\ -a^2+\ x^2\ \ +2ACx^4+2BCx^6+\text{ec.}\end{cases}$$

onde $A=a$, $B=-\frac{1}{2a}$, $C=-\frac{1}{8a^3}$, $D=-\frac{1}{16a^5}$ ec.; cosicchè si ha $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}$ ec. Da questo esempio può raccogliersi l'*avvertenza* con cui convien far uso del metodo. Si osservi dunque che mentre di sopra si è preso sempre $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ ec., quì si è preso $A+Bx^2+Cx^4+Dx^6$ ec.: ciò vuol dire che *giova talora, e talora è necessario di aver prima compresa la legge o forma dominatrice della serie*; ne vedremo in seguito degli esempj: il valersi del metodo senza tal cautela, è un esporsi ad errori gravissimi.

Somma delle Serie.

326. Si posson far sulle Serie tutte le operazioni dell' Aritmetica: ma la più utile e più difficile è di sommare o ridurre in una sola espressione alcuni o tutti i loro termini. Da questa somma dipende ordinariamente la soluzion dei Problemi in cui entran le serie.

Il *Termine generale* della serie è un' espressione algebrica che dà ciascun termine di questa

serie sol che al numero n dei termini si sostituiscano in quella espressione i numeri naturali 1, 2, 3 ec.: così il termine generale della serie 1, 6, 21, 52 ec. è $n^3 - n^2 + n$, perchè fatta $n = 1$, $= 2$, $= 3$ ec., si hanno subito i termini 1, 6, 21, ec. La *Somma generale* o *Termine sommatorio* è l' espressione da cui è data generalmente la somma di un numero qualunque di termini: così $\frac{aq^n - a}{q - 1}$ è il termine sommatorio d' ogni progression geometrica che ha per primo termine a, per quoziente q e per numero dei termini n (298).

327. Data la somma generale S d' una serie, è facile di trovarne il termine generale T: poichè se in questa somma si sostituisce $n - 1$ ad n, si avrà la somma s di $n - 1$ termini della serie; dunque se questa somma s si tolga dalla somma S, si avrà un termine della serie espresso generalmente, cioè il termine generale $T = S - s$: per esempio, se $S = \frac{n^2 + n}{2}$, posto $n - 1$ per n, si avrà $T = n$, e se sia $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, si troverà $T = aq^{n-1}$. Vedremo in breve come dato il termine generale, si trovi la somma generale di tutte le serie algebriche.

328. Dati i termini $m + 2$ della serie algebrica $g, k, p \ldots\ldots r$, in cui son costanti o gli stessi termini o le loro differenze m^{sime}, per averne il termine generale T osservo che le serie $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, ec. $1^1, 2^1, 3^1$ ec.; $1^2, 2^2, 3^2$ ec. e in generale 1^m, $2^m, 3^m$ ec. hanno evidentemente per termini generali $n^\circ, n^1, n^2 \ldots n^m$, cioè le varie potenze di n relative al numero m che esprime le differenze, e che necessariamente è intero e positivo. Questa osservazione guida a suppor generalmente $T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3} \ldots + \omega n^\circ$, ove a,

b, c ec. son coefficienti che si determinano così:

329. Sia in primo luogo $m=0$, cioè nulle le differenze dei termini, o costanti ed eguali i termini stessi, onde la serie sia g, g, g, g ec.: dunque $T=an^0$, e per determinare a vi vuole un'equazione. Fatta $n=1$, si avrà il primo termine della serie (326), e però $a1^0=g$, cioè $a=g$ onde $T=g$, come visibilmente dee essere.

330. Sia $m=1$; dunque $T=an^1+bn^0=an+b$, e si determinano a, b con due equazioni. Fatta $n=1$, si ha $a+b=g$; fatta $n=2$, sarà $2a+b=k$: sottratta la prima dalla seconda, si ottiene $a=k-g$, e però $b=2g-k$, onde $T=(k-g)n+2g-k=g+(n-1)(k-g)$.

331. Sia $m=2$; dunque $T=an^2+bn+c$, e si determinano a, b, c con tre equazioni. Fatta $n=1, =2, =3$ avremo I. $a+b+c=g$, II. $4a+2b+c=k$, III. $9a+3b+c=p$; sottratta la I. dalla II. e la II. dalla III. nascono le due $3a+b=k-g$, $5a+b=p-k$, che nuovamente sottratte danno $a=\frac{g-2k+p}{2}$, $b=\frac{8k-5g-3p}{2}$, $c=3g-3k+p$, e quindi $T=\frac{(g-2k+p)}{2}n^2+\frac{(8k-5g-3p)}{2}n+3g-3k+p=g+(n-1)(k-g)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(p-2k+g)$.

332. Sia $m=3$; dunque $T=an^3+bn^2+cn+d$. Fatta $n=1, =2, =3, =4$, si hanno l'equazioni $a+b+c+d=g$, $8a+4b+2c+d=k$, $27a+9b+3c+d=p$, $64a+16b+4c+d=r$; dalla solita sottrazione nascono le tre $7a+3b+c=k-g$, $19a+5b+c=p-k$, $37a+7b+c=r-p$, che sottratte, danno le due $12a+2b=p-2k+g$, $18a+2b=r-2p+k$, in cui rinnovata la sottrazione, si trova $a=\frac{3k-g-3p+r}{6}$, $b=\frac{3g-8k+7p-2r}{2}$, $c=\frac{57k-26g-42p+11r}{6}$,

$d = 4g - 6k + 4p - r$, e $T = \frac{(3k - g - 3p + r)}{6} n^3 + \frac{(3g - 8k + 7p - 2r)}{2} n^2 + \frac{(57k - 26g - 42p + 11r)}{6} n + 4g - 6k + 4p - r = g + (n-1)(k-g) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(p - 2k + g) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}(r - 3p + 3k - g)$. Dopo ciò è facile di veder la legge con cui procede il termine generale che sarà $T = g + (n-1)(k-g) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(p - 2k + g) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}(r - 3p + 3k - g) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4}(s - 4r + 6p - 4k + g)$ ec.

333. Supposto $T = 0$, il termine generale diviene un' equazione del grado m la cui incognita è n; dunque all' incontro ogni espressione ridotta a zero, come $z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} +$ ec. $= 0$ è un termine generale che fatto $z = 0, = 1, = 2$ ec. dà una serie con le differenze m^{sime} costanti, onde determinati i primi $m + 1$ termini di tal serie, si otterranno con poca pena i seguenti. Sia l' equazione $z^3 - 3z^2 + z - 4 = 0$: con le *supposizioni* $z = 0, = 1, = 2, = 3$ vengono i *risultati* come quì di faccia, e ripetuta là differenza costante 6 dell' ultima colonna, si trovano i termini delle superiori dicendo: $6 + 6 = 12$, $+ 5 = 17$, $- 1 = 16$ (nuovo risultato della supposizione 4): $6 + 12 = 18$, $+ 17 = 35$; $6 + 18 = 24$ ec.: e poichè quì i termini dell' ultima colonna son tutti positivi, lo saranno anche quelli delle colonne seguenti, e i risultati non varieranno mai più di segno. Giova questa dottrina allorchè debbon risolversi l' equazioni per approssimazione, come vedremo.

Supp.	0	1	2	3	4	ec.
Ris.	−4	−5	−6	−1	16	ec.
Diff. 1.	−1	−1	5	17	35	ec.
Diff. 2.	0	6	12	18	24	ec.
Diff. 3.	6	6	6	6	6	ec.

334. Or per aver la somma generale delle serie algebriche, tento di scuoprirne la forma (325), ed osservo che in quelle del prim' ordine, essendo $T = g$ (329), si ha evidentemente $S = ng$, e in quelle del second' ordine, cioè nelle progressioni aritmetiche, essendo $T = g + (n-1)(k-g)$ (330), si trova $S = gn + \frac{n(n-1)(k-g)}{2}$ (247)

posto $a=g$ e $d=k-g$. Dunque per aver S basta moltiplicar ciascun termine di T per una certa espressione An, Bn, Cn ec. di n. Posto dunque per compendio $k-g=g'$, $p-2k+g=g''$ ec., $n-1=n'$, $n-2=n''$ ec. e perciò $T=g+n'g'+\frac{n'n''g''}{2}+\frac{n'n''n'''g'''}{2\cdot3}+$ ec., dovrà essere $S=nAg+nn'Bg'+\frac{nn'n''Cg''}{2}+\frac{nn'n''n'''Dg'''}{2\cdot3}+$ec.; onde se in questa espressione si ponga $n-1$ in luogo di n per aver s (327), verrà

$$S=nAg+nn'Bg'+\frac{nn'n''Cg''}{2}+\frac{nn'n''n'''Dg'''}{2\cdot3}+\text{ec.}$$

$$s=n'Ag+n'n''Bg'+\frac{n'n''n'''Cg''}{2}+\frac{n'n''n'''n^{\text{iv}}Dg'''}{2\cdot3}+\text{ec.}$$

e poichè $S-s=T$ ovvero $S-s-T=0$, sarà

$$0=\begin{cases}gA+2n'Bg'+\frac{3n'n''Cg''}{2}+\frac{4n'n''n'''Dg'''}{2\cdot3}+\text{ec.}\\ -g-\ n'g'\ \ -\frac{n'n''g''}{2}-\frac{n'n''n'''g'''}{2\cdot3}-\text{ec.}\end{cases}$$

paragonati i termini corrispondenti (324), ho $A=1$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{3}$, $D=\frac{1}{4}$ ec., e perciò la somma generale di tutte le serie algebriche è

$$S=\frac{ng}{1}+\frac{n(n-1)(k-g)}{1\cdot2}+\frac{n(n-1)(n-2)(p-2k+g)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(r-3p+3k-g)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\text{ec.}$$

335. Esempj. I. Sia la serie 1,6,21,52,105 ec. che ha costanti le terze differenze; dunque $g=1$, $k=6$, $p=21$, $r=52$, onde $S=n+\frac{5n(n-1)}{2}+\frac{5n(n-1)(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$. Se $n=5$, sarà $S=185$.

336. II. Sia la serie $1^m, 2^m, 3^m$ ec., onde $g=1^m$, $k=2^m$ ec. e si supponga $n=\infty=n-1=n-2$ ec. (268): se sia $m=0$, verrà $S=\frac{n^1}{1}=\frac{n^{m+1}}{m+1}$: se $m=1$, sarà $S=n+\frac{n(n-1)}{2}=n+\frac{n^2}{2}=\frac{n^{m+1}}{m+1}$ (272):

se $m=2$, avremo $S=n+\frac{3n^2}{2}+\frac{n^3}{3}=\frac{n^{m+1}}{m+1}$ ec. ec.: cosicchè nel caso di $n=\infty$, si trova sempre $S=\frac{n^{m+1}}{m+1}$.

337. III. Sia un numero r di lettere a, b, c, d, f, ec. di cui si vogliano tutti i prodotti prendendole a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4 ec. E' evidente 1°. che i prodotti delle lettere a 2 a 2 saranno $a(b+c+d+f+\text{ec.})+b(c+d+f+\text{ec.})+c(d+f+\text{ec.})+d(f+\text{ec.})$ serie dei numeri naturali 4, 3, 2, 1, i termini della quale son 4 se $r=5$, e sono $r-1$ se r è indeterminata: 2°. che i prodotti delle lettere a 3 a 3 saranno $a(bc+bd+bf+cd+cf+df+\text{ec})+b(cd+cf+df+\text{ec.})+c(df+\text{ec.})$, serie dei numeri triangolari 6, 3, 1, i termini della quale son 3 se $r=5$, e sono $r-2$ se r è indeterminata: 3°. che i prodotti delle lettere a 4 a 4 saranno $a(bcd+bcf+bdf+cdf+\text{ec.})+b(cdf+\text{ec.})$, serie dei numeri piramidali 4, 1, i termini della quale son 2 se $r=5$, e sono $r-3$ se r è indeterminata ec. Dunque i cercati prodotti appartengono alle serie dei numeri figurati, e la somma della prima 1, 2, 3 ec. si trova (334) $S=n+\frac{n(n-1)}{2}=r-1+\frac{(r-1)(r-2)}{2}=\frac{r(r-1)}{2}$. numero dei prodotti delle lettere a 2 a 2. La seconda 1, 3, 6, ec. dà $S=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}=r-2+(r-2)(r-3)+\frac{(r-2)(r-3)(r-4)}{2\cdot3}=\frac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot3}$, numero dei prodotti delle lettere a 3 a 3: La terza 1, 4, 10 ec. dà $S=n+\frac{3n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot3\cdot4}=\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2\cdot3\cdot4}$, numero dei prodotti delle lettere a 4 a 4; e così si troverà $\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$ ed $\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$ ec. numero dei prodotti delle lettere a 5 a 5, a 6 a 6 ec.

338. Debba ora sommarsi la serie $\frac{d}{h}, \frac{d}{hq}, \frac{d}{hq^2}$ ec.,

la quale, supposto $q > 1$, è una progression geometrica decrescente. Scrivendo: ec., $\frac{d}{hq^2}, \frac{d}{hq}, \frac{d}{h}$, diverrà crescente, e applicandovi la formula $s = \frac{\omega}{q^{1}-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$ (300) che serve per le crescenti, fatto $\omega = \frac{d}{h}$, si avrà $s = \frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$. Se sia $n = \infty$, sarà $q^n - 1 = q^n$ (269), e si troverà $s = \frac{dq^n}{hq^{n-1}(q-1)} = \frac{dq}{h(q-1)}$.

339. Questa formula dà la somma dei rotti decimali infiniti quando se ne conosce il periodo, che forma appunto la serie $\frac{d}{h}, \frac{d}{hq}$ ec. ove d è eguale al periodo qualunque di m cifre, $h = 10^m$, $hq = 10^{2m}$ ec., e perciò sempre $h = q$: dunque $s = \frac{dq}{h(q-1)} = \frac{d}{10^m - 1}$. Ora $10^m - 1$ è un numero m di 9; dunque *la somma o valore di un rotto decimale interamente periodico si ha dividendone il periodo per tanti 9 quante son cifre nel periodo*: così 0,111 ec. $= \frac{1}{9}$; 0,2424 ec. $= \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$; 0,259259 ec. $= \frac{259}{999} = \frac{7}{27}$. Che se il rotto decimale cominci il suo periodo dopo g cifre, sarà $h = 10^{m+g}$, $hq = 10^{2m+g}$ e perciò $q = 10^m$, onde la somma del rotto non comprese le cifre fuor di periodo, sarà $s = \frac{d}{10^g(10^m-1)}$, cioè *la somma o valor di un rotto non interamente periodico si ha come sopra, purchè alla destra dei 9 si aggiungano tanti zeri quante son le cifre fuor di periodo e si sommi questo rotto col rotto che non entra in periodo*: così 0,1666 ec. $= \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{1}{6}$; 0,803571428571428 ec. $= \frac{803}{1000} + \frac{571428}{999999000} = \frac{45}{56}$ ec.

340. La formula stessa (338) somma anche la serie $\frac{a}{h}, \frac{a+d}{hq}, \frac{a+2d}{hq^2}$ ec., ove i numeratori sono in aritmetica e i denominatori in geometri-

ca progressione. Distribuisco la serie nelle seguenti, la prima delle quali ha n termini, la seconda ne ha $n-1$, la terza $n-2$ ec., onde nella formula sarà $n=n-1$ per la seconda, $n=n-2$ per la terza ec.

$$\frac{a}{h}, \frac{a}{hq}, \frac{a}{hq^2} \text{ ec.} = \frac{a}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$
$$\frac{d}{hq}, \frac{d}{hq^2} \text{ ec.} = \frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$
$$\frac{d}{hq^2} \text{ ec.} = \frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^{n-2}-1}{q-1}\right)$$

Or toltane la prima somma, tutte l'altre fino al termine n^{mo}, sono $\frac{d}{hq^{n-1}(q-1)}(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+$ ec......$-n+1)$, e $q^{n-1}, q^{n-2}, q^{n-3}$ ec. è una progression geometrica decrescente, in cui n diviene $n-1$: onde facendo nella formula (300) $\omega=q^{n-1}$, $n=n-1$, la somma sarà $s=q\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$: dunque per la somma totale avremo $s=\frac{a}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)+\frac{d}{hq^{n-1}}\left(\frac{1-n}{q-1}\right)+\frac{dq}{hq^{n-1}}\left(\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2}\right)=\frac{(aq+d-a)(q^n-1)-(q-1)dn}{hq^{n-1}(q-1)^2}$. Se $n=\infty$, svanirà tutto ciò che è dopo q^n, onde $s=\frac{(aq+d-a)q^n}{hq^{n-1}(q-1)^2}=\frac{(aq+d-a)q}{h(q-1)^2}$.

341. Bastano le due serie sommate per trovar la somma della serie $\frac{g}{h}+\frac{k}{hq}+$ ec. coi numeratori in serie algebrica, e i denominatori in progression geometrica. Poichè 1°. nella serie $\frac{d}{h}, \frac{d}{hq}$ ec., ove i numeratori son costanti cioè $m=0$, si ha $T=\frac{dn^0}{hq^{n-1}}$ ed $S=\frac{-d\times-(q^n-1)n^0}{hq^{n-1}(q-1)}$: 2° nella serie $\frac{a}{h}, \frac{a+d}{hq}$ ec. ove son costanti le prime differenze dei numeratori cioè $m=1$, si ha $T=\frac{dn+(a-d)n^0}{hq^{n-1}}$ ed $S=\ldots$

$\dfrac{-(q-1)dn-(aq+d-a)\times-(q^n-1)n^0}{hq^{n-1}\cdot(q-1)^2}$. Dunque (325) nella data serie 1°. T ed S debbono avere n al grado medesimo: 2°. il denominator di T dee essere hq^{n-1}, e $hq^{n-1}\times(q-1)^{m+1}$ quello di S: 3°. posto $an^m+bn^{m-1}+cn^{m-2}+$ ec. per numerator di T, il numerator di S sarà $-An^m-Bn^{m-1}-Cn^{m-2}-$ ec.: 4°. l'ultimo termine del numerator di S (quello cioè in cui, secondo il valor di m, si ha $n^{m-m}=n^0$) dee moltiplicarsi costantemente per $-(q^n-1)$. Ridotti dunque T ed S allo stesso denominatore, sia . . . .

$$T=\frac{(an^m+bn^{m-1}+\text{ec.})(q-1)^{m+1}}{hq^{n-1}(q-1)^{m+1}}, \ldots\ldots\ldots$$

$$S=\frac{-An^m-Bn^{m-1}-\text{ec.}-\ldots\ldots\times-(q^n-1)}{hq^{n-1}(q-1)^{m+1}};$$ se in S si ponga $n-1$ in luogo di n, e si moltiplichi tutto il rotto per q, sarà $s=$

$$\left\{\frac{\begin{array}{llll} -Aqn^m+Aqmn^{m-1} & -Aqm.\frac{m-1}{2}.n^{m-2} & +Aqm.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.n^{m-3} & -\text{ec.} \\ \quad -Bq & +Bq.\overline{m-1} & -Bq\overline{m-1}.\frac{m-2}{2} & +\text{ec.} \\ & -Cq & +Cq.\overline{m-2} & -\text{ec.} \\ & & -Dq & +\text{ec.} \end{array}}{hq^{n-1}(q-1)^{m+1}}\right.$$

e poichè $S-s=T$, ovvero $S-s-T=0$, sarà $0=$ . . . . .

$$\left\{\begin{array}{lllll} -An^m & -Bn^{m-1} & -Cn^{m-2} & -Dn^{m-3} & - \\ +Aq & -Aqm & +Aqm.\frac{m-1}{2} & -Aqm.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} & + \\ -a(q-1)^{m+1} & +Bq & -Bq.\overline{m-1} & +Bq.\overline{m-1}.\frac{m-2}{2} & - \\ & -b(q-1)^{m+1} & +Cq & -Cq.\overline{m-2} & + \\ & & -c(q-1)^{m+1} & +Dq & - \\ & & & -d(q-1)^{m+1} & + \end{array}\right. \text{ec.}$$

e trovati al solito i valori di A, B, C ec., sarà . . . . . .

$$S=\frac{-1}{hq^{n-1}(q-1)^2}\Big[\overline{q-1}.an^m+(amq+\overline{q-1}.b)n^{m-1}+(m.\frac{m-1}{2}.aq\frac{q+1}{q-1}$$
$$+\overline{m-1}.bq+\overline{q-1}.c)n^{m-2}+(m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}aq\frac{q^2+4q+1}{(q-1)^2}+$$
$$\frac{m-1}{2}.\overline{m-2}.bq\frac{q+1}{q-1}+\overline{m-2}.cq+\overline{q-1}.d)n^{m-3}+\text{ec.}\ldots\ldots\times-$$
$$(q^n-1)n^{n-m}\Big].$$

Esempio. Sia la serie $\frac{1}{2}, \frac{4}{8}, \frac{10}{32}, \frac{20}{128}$ ec. i cui numeratori hanno costanti le terze differenze: sarà $m=3$, $T=\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+$

$\frac{n}{3}$, e perciò $a=\frac{1}{6}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}$, $d=0$, e poi $h=2, q=4$, e il quarto termine della somma ove $n^{m-3}=n^0$, dovrà moltiplicarsi per $-(q^1-1)$. Fatta la moltiplicazione e sostituiti i valori, si troverà $S=\frac{-1}{2.4^{n-1}3^2}\left[\frac{n^3}{2}+\frac{7n^2}{2}+\frac{25n}{3}-(4^n-1)\frac{64}{9}\right]$. Se $n=1$, si ha $S=\frac{1}{2}$; se $n=2$, $S=1$: se $n=3$, $S=\frac{21}{16}$ ec.: e se $n=\infty$, i termini $\frac{-n^3}{3^2.4^n}-\frac{7n^2}{3^2.4^n}-\frac{50n}{3^3.4^n}-\frac{128}{3^4.4^n}$ diverranno infinitesimi (266) e svaniranno (267), onde $S=\frac{128}{81}$.

342. Osservazioni. I. Col metodo stesso si somma la serie reciproca $\frac{g}{h}+\frac{k}{hq^{-1}}+\frac{p}{hq^{-2}}+\text{ec.}=\frac{g}{h}+\frac{kq}{h}+\frac{pq^2}{h}+\text{ec.}$ Fatti i cangiamenti relativi all'indole di questa serie, si troverà

$$S=\frac{q^{n-1}}{h(q-1)^2}\Big[\overline{q-1}\,.\,aqn^m+(\overline{q-1}\,.\,bq-amq)\,n^{m-1}+(m\times\frac{m-1}{2}\,.\,aq\,\frac{q+1}{q-1}-\overline{m-1}\,.\,bq+\overline{q-1}\,.\,cq)\,n^{m-2}+(\overline{m-1}\times\frac{m-2}{2}\,.\,bq\,\frac{q+1}{q-1}-m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}\,.\,aq\,\frac{q^2+4q+1}{(q-1)^2}-\overline{m-2}\times cq+\overline{q-1}\,.\,dq)\,n^{m-3}+\text{ec.}\;.\,.\,.\,.\,.\times(1-q^{-n})\,n^{m-m}\Big].$$

Combinando queste serie e le loro somme, si avranno altre serie e le loro somme con poca fatica.

343. II. Se non può sommarsi in termini finiti una serie infinita, si procura di renderla più convergente che sia possibile; poichè *se una serie converge velocemente, sommati alcuni de' primi termini posson trascurarsi gli altri senza error sensibile*. Così in $\sqrt{(a^2+x^2)}$ (325) quanto più sarà piccolo il valor di x riguardo ad a, tanto più sarà pronta la convergenza della serie $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\text{ec.}$, divenendo piccolissimi i numeratori in paragon dei denominatori. Sia $a=10$, $x=1$; allora $\sqrt{101}=10+\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{1600000}-\text{ec.}$; il quarto termine è quasi infinitamente piccolo, e perciò i tre primi danno vicinissimamente la radice di 101.

Metodo inverso delle Serie.

344. Data un' equazione di questa forma $x = ay^{m} + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n}$ + ec. ove il secondo membro si suppone una serie convergente, si cerca il valor di y. Il metodo per trovarlo si chiama *Metodo inverso delle Serie* o *Ritorno delle Serie*, perchè il valor cercato si ottiene con una serie inversa delle potenze di x. Liberato y^{m} dal suo coefficiente, e fatto $\frac{x}{a} = u$, sarà $\frac{x}{a} = u = y^{m} + \frac{by^{m+n}}{a} + \frac{cy^{m+2n}}{a} + \frac{dy^{m+3n}}{a}$ ec., e per conoscer la legge con cui procede la nuova serie (325), osservo che l' equazioni simili alla data come $\frac{a}{3} = y^{3} - \frac{y^{3+3}}{a} + \frac{y^{3+2.3}}{3a^{2}} \ldots \frac{a^{4}}{3} = y^{3} - \frac{y^{3+3}}{a^{4}} + \frac{y^{3+2.3}}{3a^{8}} \ldots\ldots \frac{a^{7}}{3} = y^{3} - \frac{y^{3+3}}{a^{7}} + \frac{y^{3+2.3}}{3a^{14}}$ ec. hanno per radici $y^{3} - a$, $y^{3} - a.a^{3}$, $y^{3} - a.a^{2.3}$ ec., il che dà $y = a^{\frac{1}{3}}$, $y = a^{\frac{1+3}{3}}$, $y = a^{\frac{1+2.3}{3}}$ ec., e perciò pongo in generale $y = \mathrm{A}u^{\frac{1}{m}} + \mathrm{B}u^{\frac{1+n}{m}} + \ldots\ldots \mathrm{C}u^{\frac{1+2n}{m}} + \mathrm{D}u^{\frac{1+3n}{m}}$ ec. Ora poichè $o = -u + y^{m} + \frac{by^{m+n}}{a} +$ ec., avremo $o =$

$$\left\{\begin{array}{llll} -u & = -u & & \\ +y^{m} & = \mathrm{A}^{m}u + m\mathrm{A}^{m-1}\mathrm{B}u^{\frac{m+n}{m}} + & m\mathrm{A}^{m-1}\ \mathrm{C}u^{\frac{m+2n}{m}} & + \text{ec.} \\ & & + \frac{m.\overline{m-1}}{2}\ \mathrm{A}^{m-2}\ \mathrm{B}^{2} & + \text{ec.} \\ +\frac{b}{a}y^{m+n} & = \quad +\frac{b}{a}\mathrm{A}^{m+n} & +(m+n)\frac{b}{a}\ \mathrm{A}^{m+n-1}\mathrm{B} & + \text{ec.} \\ +\frac{c}{a}y^{m+2n} & = & + \quad \frac{c}{a}\ \mathrm{A}^{m+2n} & + \text{ec} \end{array}\right.$$

Trovati al solito i valori di A, B, C ec., viene $y = u^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{am}u^{\frac{1+n}{m}} + \frac{(1+m+2n)b^{2} - 2acm}{2a^{2}m^{2}}u^{\frac{1+2n}{m}} - \ldots\ldots$

$\left(\frac{(2m^2+9mn+9n^2+3m+6n+1)b^3}{6a^3m^3} - \frac{(1+m+3n)bc}{a^2m^2} + \frac{d}{am}\right) \times$
$u^{\frac{1+3n}{m}} +$ ec.

Applicazioni. I. Sia $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 +$ ec.; si avrà $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{5}$ec., $m = 2$, $n = 1$, $u = \frac{x}{a} = 2x$, e quindi $y = u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}u + \frac{1}{36}u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{270}u^2$ ec.

II. Sia $x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}y^{\frac{5}{2}} -$ ec.; avremo $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{8}$, $d = -\frac{1}{16}$ ec., $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$, $u = \frac{x}{a} = x$, e perciò $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8}$ ec.

345. Se fosse $m = n = 1$, la formula generale si cangierebbe in $y = u - \frac{b}{a}u^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^2}u^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^3}u^4$ec. $= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 - \frac{5b(b^2 - ac) - a^2d}{a^7}x^4 + \ldots \frac{7b^2(2b^2 - 3ac) + 3a^2(2bd + c^2) - a^3e}{a^9}x^5 -$ ec.

346. E se fosse $m = 1$, $n = 2$, la formula diverrebbe $y = u - \frac{b}{a}u^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^2}u^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^3}u^7$ec. $= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^4}x^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}x^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}x^7$ ec.

DEI LOGARITMI.

I Geometri si dolevano da gran tempo della lunghezza dei calcoli nella moltiplicazione e divisione dei numeri molto grandi, e soprattutto nella formazion delle potenze e nell' estrazion delle radici un poco alte: quando Nepero, uomo di raro genio, ridusse le moltiplicazioni a somme, le divisioni a sottrazioni, le formazioni delle potenze a moltiplicazioni assai corte, e l' estrazioni delle radici a facili divisioni. Ecco i principj di sì utile teorìa.

347. Sia la progression geometrica qualunque
$\div\!\div\, a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8$ ec.;
fatto per esempio $a=2$, sarà
$\div\!\div\, 2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6 : 2^7 : 2^8$ ec., cioè
$\div\!\div\, 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256$ ec.

1°. Vogliasi il prodotto di $2^3 \times 2^4 = 8 . 16$; sommo gli esponenti $3+4=7$, cerco l'esponente 7, e sotto di esso trovo 128; dunque $8 . 16 = 128$: 2°. vogliasi il quoziente di $\frac{2^8}{2^6} = \frac{256}{64}$; sottraggo gli esponenti $8-6=2$, cerco l'esponente 2, e sotto di esso trovo 4; dunque $\frac{256}{64} = 4$: 3°. vogliasi la 2ª potenza di $2^4 = 16$; moltiplico gli esponenti $2.4 = 8$; cerco l'esponente 8, e sotto di esso trovo 256; dunque $2^{4\times 2} = 256$: 4°. vogliasi la radice 3ª di $2^6 = 64$; divido gli esponenti $6:3=2$, cerco l'esponente 2, e sotto di esso trovo 4; dunque $2^{6:3} = 4$. Tale è in sostanza il metodo di Nepero.

348. Gli esponenti di a diconsi *Logaritmi*; onde se $a=10$ e la progressione divenga $\div\!\div\, 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3$ ec. $= 1 : 10 : 100 : 1000$ ec., l'esponente 0 è il logaritmo dell'unità, l'esponente 1 lo è di 10, l'esponente 2 lo è di 100 ec. Ma poichè questi esponenti danno i soli logaritmi de' numeri 1, 10, 100, 1000 ec., e mancano i logaritmi dei numeri intermedj 2, 3, 4 ec., 11, 12, 13 ec. e quelli delle frazioni, si sono aggiunti a ciascun esponente alcuni zeri in forma di decimali, e la progressione è divenuta,
$\div\!\div\, 10^{0,0000000} : 10^{1,0000000} : 10^{2,0000000} : 10^{3,0000000} :$ ec.
Inserendo in questa formula degli esponenti in progressione aritmetica, i valori del 10 elevato alle potenze da essi indicate, saranno numeri in

progression geometrica, ed avranno per logaritmi gli inseriti esponenti. Perciò con inserire 9999999 medj proporzionali aritmetici tra i primi due esponenti della progressione (228), si è trovata una nuova progression geometrica i cui primi termini sono,

$$\div 10^{0,0000000} : 10^{0,0000001} : 10^{0,0000002} : 10^{0,0000003} : \text{ec.}$$

e i valori di questi termini sono interi e rotti compresi tra 1 e 10. Ve ne sarà dunque uno $=2$, un altro $=3$, un altro $=4$ ec. prossimamente. Si è trovato per esempio che può farsi $2 = 10^{0,3010300}$, $3 = 10^{0,4771213}$, $4 = 10^{0,6020600}$, ec., e si son riguardati questi esponenti come i logaritmi di 2, di 3, di 4, ec.

349. Con calcoli stabiliti su questa idea ma d'immensa estensione, furon costruite le Tavole dei logaritmi per tutti i numeri da 1 fino a 100000. In alcune di queste tavole i logaritmi hanno dieci, quindici e venti decimali; ma bastano d'ordinario i primi cinque. Per ben comprenderne gli usi è necessario aver delle Tavole fra le mani.

350. Frattanto senza di esse si può intendere che i logaritmi dei numeri fra 1 e 10 debbon cominciar per 0; quelli dei numeri fra 10 e 100 per 1; dei numeri tra 100 e 1000 per 2 ec. Questa prima cifra dei logaritmi (che è il numero intero dell'esponente) si chiama *Caratteristica* del logaritmo, perchè fa conoscere di quanti caratteri è composto il numero che gli corrisponde, dovendo questo numero avere una cifra di più delle unità che contiene la caratteristica. Così il logaritmo 4,814560 appar-

tiene a un numeso di cinque cifre perchè la sua caratteristica è 4.

Proprietà dei Logaritmi in generale.

351. Sia a un numero maggior dell'unità; sia m l'esponente della potenza a cui bisogna elevare a per avere un numero b, di modo che si abbia $a^m=b$: sarà m il logaritmo di b (347), e si è convenuto di scriverlo così, $m=\mathrm{L}b$. Per la ragione stessa se sia $a^n=c$, avremo $n=\mathrm{L}c$; onde moltiplicando le due equazioni $a^m=b$, $a^n=c$, sarà $a^m\times a^n=a^{m+n}=bc$; e però $m+n=\mathrm{L}bc$: ma sommando l'altre due equazioni $m=\mathrm{L}b, n=\mathrm{L}c$, viene $m+n=\mathrm{L}b+\mathrm{L}c$; dunque $\mathrm{L}bc=\mathrm{L}b+\mathrm{L}c$, cioè *il logaritmo d'un prodotto è la somma dei logaritmi dei suoi fattori* (347).

352. Avremo anche $\mathrm{L}b(=\mathrm{L}\frac{bc}{c})=\mathrm{L}bc-\mathrm{L}c$, cioè *il logaritmo d'un quoziente è la differenza tra i logaritmi del dividendo e del divisore* (347).

353. E se sia $b=c$, avremo $\mathrm{L}b^2=\mathrm{L}b+\mathrm{L}b=2\mathrm{L}b$, e in generale $\mathrm{L}b^m=m\mathrm{L}b$, cioè *il logaritmo d'una potenza* b^m *è il multiplo* m *del logaritmo della sua radice* b (347), *il che vale anche per l'estrazion delle radici che son potenze rotte* (159). Ecco alcuni casi più comuni:

$\mathrm{L}abcd$ ec. $=\mathrm{L}a+\mathrm{L}b+\mathrm{L}c+\mathrm{L}d$ ec.
$\mathrm{L}(a^2-x^2)=\mathrm{L}(a+x)+\mathrm{L}(a-x)$.
$\mathrm{L}\frac{abc}{de}=\mathrm{L}a+\mathrm{L}b+\mathrm{L}c-\mathrm{L}d-\mathrm{L}e$.
$\mathrm{L}\frac{ab+bc}{m+n}=\mathrm{L}b+\mathrm{L}(a+c)-\mathrm{L}(m+n)$.
$\mathrm{L}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=\mathrm{L}(a+x)-\mathrm{L}(a-x)$.
$\mathrm{L}a^m=m\mathrm{L}a$ .... $\mathrm{L}a^{-m}=-m\mathrm{L}a$.

$$\mathrm{L}a^m p^b c^q = m\mathrm{L}a + b\mathrm{L}p + q\mathrm{L}c.$$

$$\mathrm{L}a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\mathrm{L}a \ldots\ldots \mathrm{L}a^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n}\mathrm{L}a.$$

$$\mathrm{L}\frac{ax^n}{r^2} = \mathrm{L}a + n\mathrm{L}x - z\mathrm{L}r.$$

$$\mathrm{L}\sqrt{(a^2 - x^2)} = \tfrac{1}{2}\mathrm{L}(a+x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{L}(a-x).$$

$$\mathrm{L}\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n}\mathrm{L}(a-x) + \frac{m}{n}\mathrm{L}(a^2 + ax + x^2).$$

$$\mathrm{L}\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{(a+x)^2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{L}(a-x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{L}(a+x) - 2\mathrm{L}(a+x)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{L}(a-x) - \tfrac{3}{2}\mathrm{L}(a+x).$$

$$\mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \mathrm{L}1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{L}(1+x^2) = -\mathrm{L}\sqrt{(1+x^2)}.$$

$$\mathrm{L}3a^2 + \mathrm{L}a^4 + 5\mathrm{L}3 = \mathrm{L}3 + 2\mathrm{L}a + 4\mathrm{L}a + 5\mathrm{L}3$$
$$= 6\mathrm{L}3 + 6\mathrm{L}a = 6\mathrm{L}3a = \mathrm{L}(3a)^6.$$

Calcolo de' Logaritmi per mezzo delle Serie.

354. *Dato un numero qualunque* $x + 1$ *, trovarne il logaritmo.* Poichè un logaritmo o ha la forma di rotto o è un rotto (348) che può sempre ridursi a $\frac{\varphi}{p + x}$ qualunque sieno φ, p, la serie che lo esprime procederà al solito (324), e avremo $\mathrm{L}(1+x) = \mathrm{P} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x^3 +$ ec. dunque se x divenga $x(x+2)$, sarà $\mathrm{L}(1+x)^2 = (353)\ 2\mathrm{L}(1+x) = \mathrm{P} + \mathrm{A}x(x+2) + \mathrm{B}x^2(x+2)^2 + \mathrm{C}x^3(x+2)^3 +$ ec. $= 2(\mathrm{P} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x^3 +$ ec.), cioè trasponendo e riducendo

$$0 = \mathrm{P} - \mathrm{A}x^2 - 4\mathrm{B}x^3 - \mathrm{B}x^4 - \text{ec.}$$
$$\quad\; - 2\mathrm{B} \quad - 6\mathrm{C} \quad - 12\mathrm{C}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - 14\mathrm{D}$$

e perciò $\mathrm{P} = 0, \mathrm{B} = -\frac{1}{2}\mathrm{A}$, $\mathrm{C} = \frac{1}{3}\mathrm{A}, \mathrm{D} = -\frac{1}{4}\mathrm{A}$ ec.; dunque $\mathrm{L}(1+x) = \mathrm{A}(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 +$ ec.).

355. Osservate che la quantità A è indeterminata, onde *il numero stesso* $1 + x$ *può avere un' infinità di logaritmi differenti*. Ma il più naturale di tutti i *sistemi* essendo quello di Nepero ove $\mathrm{A} = 1$, i logaritmi calcolati in questa ipotesi si son chiamati *Naturali* e anche *Iperbolici* attesa la lor relazione con l' *Iperbola equilatera*, come a suo luogo diremo. Dunque tutti i possibili sistemi di logaritmi posson ridursi a quello dei naturali; poichè in ogni sistema il logaritmo di $1 + x$ eguaglia il prodotto del suo logaritmo naturale per la quantità costante A che si chiama il *Modulo*. Così se LO sia il logaritmo delle Tavole o *Ordinario* d' un numero qualunque,

e LI il logaritmo iperbolico del numero stesso, si avrà $LO = A.LI$; e se LN sia il logaritmo del medesimo numero in un altro sistema, si avrà del pari $LN = A'.LI$: onde fissato A, A' come insegneremo tra poco, e dati i logaritmi iperbolici, si avranno subito i logaritmi d'ogn' altro sistema.

356. Ripiglio l'equazione $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$ ec.), che supposta $A = 1$, diviene $L(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$ ec., e aggiunto ai due membri La, ottengo $L(a+ax) = La + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$ ec. Sia $ax = \pm z$ ovvero $x = \frac{\pm z}{a}$, e sarà $L(a+z) = La + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} -$ ec., $L(a-z) = La - \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} - \frac{z^3}{3a^3} -$ ec.; dunque $L(a+z) - L(a-z) = \ldots\ldots$ $L\left(\frac{a+z}{a-z}\right) = \frac{2z}{a}\left(1 + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{z^4}{5a^4} + \frac{z^6}{7a^6} + \text{ec.}\right)$, serie sempre convergente, perchè $\frac{a+z}{a-z}$ è quantità positiva e perciò $a > z$.

357. Applichiamo questa serie al calcolo de' logaritmi e supponghiamo $\frac{a+z}{a-z} = \frac{m}{m-1}$: sarà $\frac{z}{a} = \frac{1}{2m-1}$, e $L\left(\frac{m}{m-1}\right)$ ovvero $Lm - L(m-1) = \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \ldots \frac{1}{7(2m-1)^6} + \text{ec.}\right)$; onde $Lm = L(m-1) + \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \text{ec.}\right)$: ma quando si cerca il logaritmo di m si suppone noto quello di $m-1$; dunque si avrà quello di m per mezzo d' una serie convergentissima, specialmente se m sia un numero alquanto grande. Così volendo il logaritmo iperbolico di 2, sarà $m = 2$, onde $L2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^6} \text{ ec.}\right) = 0{,}69314718$ ec. presi nove termini della formula: se vogliasi il logaritmo di 5, sarà $m = 5$, onde $L5 = 2L2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9^2} + \frac{1}{5 \cdot 9^4} + \text{ec.}\right) = 1{,}60943791$. E' dunque facile trovar con questo metodo i logaritmi de' numeri primi da cui si hanno quelli di tutti gli altri numeri; poichè sommati i logaritmi di 2 e di 3, si ha quello di 6 (351); quello di 4 è doppio di quel di 2. quello di 9 di quel di 3 ec.

358. Determiniamo ora il Modulo A per il sistema dei logaritmi ordinarj in cui $a = 10$ e perciò $L\,10 = 1$ (348). Si avrà dunque (355) $LO\,10 = A \times LI\,10$: ma $LO\,10 = 1$ e $LI\,10 =$

$LI2 + LI5$ (351) $= 2{,}30258509$ (357); dunque $A = \frac{1}{2{,}30258509}$ $= 0{,}43429448$ ec., *Modulo delle Tavole*: e però *i logaritmi iperbolici moltiplicati per* 0,4342944819032518276511289189166050822943970058036665661144554, *si riducono a quei delle Tavole*; e reciprocamente *quei delle Tavole moltiplicati per* 2,302585092994045684017991454684364207601101488628772976033328, *si cangiano in iperbolici*.

359. Così si determinerebbe il Modulo A in ogn' altro sistema: ma ci serviamo di quelli soli di cui abbiamo parlato. Quello delle Tavole (chiamato di Briggs perchè Briggs le calcolò il primo) serve alla Trigonometria, quello de' logaritmi iperbolici è di grand' uso nel *Calcolo Integrale*. Il numero a si chiama la *Base Logaritmica* del sistema: così 10 è la base del sistema ordinario; quella del sistema di Nepero è 2,7182818\3, come vedremo. In generale, *la base di un sistema qualunque di logaritmi è il numero il cui logaritmo è* 1.

360. *Dato un logaritmo trovarne il numero*. Se il logaritmo è ordinario si riduca (358) all' iperbolico z, e sia $1 + x$ il numero cercato; si avrà per le cose dette $z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$ ec. Per trovare il valor di x in z, presa la formula (345) $x = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$ ec., si avrà $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$ ec., ed $1 + x = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}z^4 +$ ec. In generale un numero qualunque $n = 1 + Ln + \frac{1}{2}L^2 n + \frac{1}{2\cdot 3}L^3 n +$ ec. onde $n^m = 1 + Ln^m + \frac{1}{2}L^2 n^m$ ec. $= 1 + mLn + \frac{1}{2}Ln^m \times Ln^n$ ec. $= 1 + mLn + \frac{1}{2}m^2 L^2 n$ ec., serie che convergendo in ogni caso, risolvon generalmente il problema.

361. Applichiamole a trovar la base de' logaritmi iperbolici, o il numero e il cui logaritmo iperbolico è 1, cioè $Le = 1$. Quì si ha $e = n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} +$ ec. $= 2{,}718281828459045235360\,28 = (1 + \frac{1}{\infty})^\infty$ (268).

Dunque $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 +$ ec. $= (1 + \frac{x}{\infty})^\infty$ (147.268): onde 1°. $e^\infty = \infty$: 2°. $L\infty = \infty\, Le = \infty$, cioè *il logaritmo d' un numero infinito è l' infinito*: 3°. $\frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty}$, e $L\frac{1}{\infty}$ ($= L0$) $= L1 - \infty\, Le = -\infty$, cioè *il logaritmo di zero è l' infinito negativo*: 4°. se $e^{Lz} = u$, verrà $LzLe = Lu$, cioè $Lz = Lu$, $z = u$, ed $e^{Lz} = z$; dunque se $z = a^y$, sarà $a^y = e^{yLa}$; se $z = \infty$, verrà $e^{L\infty} = \infty$; se $z = \frac{1}{x}$, sarà $xe^{L\frac{1}{x}} = xe^{-Lx} = x.\frac{1}{x} = x.x^{-1} = 1$: ove $x = 0$ dà $0e^{L\frac{1}{0}} = 0e^{-L0} = 0e^{L\infty} = 0e^{\infty} = 1$, ed $x = \infty$ dà $\infty e^{L\frac{1}{\infty}} = \infty e^{-L\infty} = \infty e^{L0} = \infty e^{-\infty} = 1$. Per evitar le

contradizioni che sembran nascere da questi risultati, si avverta che l' infinito è di più ordini (272), e che *l' infinito logaritmico* è infinitamente minore dell' *infinito assoluto* già considerato altrove (265): infatti quello dà $\infty . 0 = m$ (266), e questo dà $-\infty . 0 = 0L0 = L0^{\circ} = L1 = 0$ (348).

Uso dei Logaritmi nella risoluzione di varie Equazioni.

362. Molte equazioni che sfuggon le regole dell' Algebra ordinaria si risolvon facilmente coi logaritmi. Ecco degli esempj.

I. Sia l' equazione $a^x = b$: sarà (353) $La^x = xLa = Lb$, onde $x = \frac{Lb}{Ea}$. Sia $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$; sarà $mxLa + (1-nx)Lb = Lc$, onde $mxLa - nxLb = Lc - Lb$, ed $x = \frac{Lc - Lb}{mLa - nLb} = \frac{Lc : b}{La^m : b^n}$. Sia anche $a^x = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$; sarà $xLa = mxLb - nLb - qxLc$; onde $x = \frac{nLb}{mLb - qLc - La}$. Sia infine $\frac{b^{n - \frac{r}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$; sarà $nLb - \frac{r}{x}Lb - mxLc = xLf - pLf$, onde $(mLc + Lf)x^2 - (nLb + pLf)x = -rLb$, ovvero $x^2 Lc^m f - xLb^n f^p = -Lb^r$, che risoluta, dà $x = \frac{Lb^n f^p}{2Lc^m f} \pm \sqrt{\left(\frac{(Lb^n f^p)^2}{4(Lc^m f)^2} - \frac{Lb^r}{Lc^m f}\right)}$.

363. II. Sieno 100 000 abitanti in una provincia e la popolazione vi aumenti ogn' anno di $\frac{1}{30}$: qual sarà il numero degli abitanti al fine d' un secolo? Sia $n = 100 000$, numero dato degli abitanti, il quale per la condizion del problema sarà dopo un anno $n + \frac{1}{30}n = n(\frac{31}{30})$; al fin del second' anno diventerà $n(\frac{31}{30})^2$; al fin del terzo $n(\frac{31}{30})^3$ ec. fino al termine di un secolo, in cui l' espressione sarà $n(\frac{31}{30})^{100}$. Dunque $100 000 \times (\frac{31}{30})^{100} = x$, numero cercato. Ma troppo ci vorrebbe ad alzar $\frac{31}{30}$ alla centesima potenza senza i logaritmi, che subito danno $L\,100 000 + 100\,L\frac{31}{30} = Lx$; e siccome $L\frac{31}{30} = L31 - L30 = 0,014240439$ (per Tavole con dieci decimali come quelle d' Ulacq.); dunque $100\,L\frac{31}{30} = 1,4240439$; ma $L100 000 = 5$; dunque $Lx = 6,4240439$: e $x = 2654874$. Saranno dunque dopo 100 anni 2654874 abitanti.

Nel ripopolarsi la Terra dai tre figli di Noè e dalle loro tre mogli, in qual proporzione dovea crescere ogni anno la popolazione perchè vi fosse un milione d' uomi-

ni in 200 anni? Sia $\frac{1}{x}$ l'aumento annuo; dunque $6\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200}$ $=1\,000\,000$, ed $\frac{1+x}{x}=\left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$: perciò $L\frac{1+x}{x}=\frac{1}{200}\times L\frac{1\,000\,000}{6}=\frac{1}{200}.5{,}2218487=0{,}0261092$; onde $\frac{1+x}{x}=\frac{1061963}{1\,000\,000}$, ed $x=16$ in circa. Bisognava dunque che il genere umano crescesse ogn' anno d' $\frac{1}{16}$, il che attesa la sanità e lunga vita de' Patriarchi, riesce assai verisimile.

Qual' è la quantità di cui dovrebbe crescere ogn' anno un popolo, per diventare al fin di ciascun secolo più numeroso del doppio? Sia n il numero degli individui e $\frac{1}{x}$ la quantità ricercata; avremo per ogn' epoca secolare, $n\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100}=2n$ che dà $L\frac{1+x}{x}=\frac{1}{100}\,L2=0{,}0030103$; onde $\frac{1+x}{x}=\frac{10069556}{10\,000\,000}$, ed $x=144$, poco méno.

Se un certo numero d' uomini aumenta ogn' anno della centesima parte, quant' anni ci vorranno perchè divenga decuplo? Sia n il dato numero d' uomini, x gli anni cercati, si avrà dopo x anni, $n\left(\frac{101}{100}\right)^{x}=10n$, e $\left(\frac{101}{100}\right)^{x}=10$; e però $x=\frac{L10}{L101-L100}=\frac{10\,000\,000}{43214}=231$. Dunque il numero degli abitanti diverrà decuplo a ciascun' epoca di 231 anni.

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONI

Dei Gradi Superiori.

Supporremo in avvenire ogn' equazione 1°. senza rotti e senza radicali giusta il metodo che presto spiegheremo: 2°. senza coefficiente nell' incognita alla più alta potenza: 3°. con tutti i termini in un membro e con zero nell' altro: 4°. ordinata. Ciò premesso:

364. Le radici reali d' un' equazione possono esser positive e negative, eguali ed ineguali, razionali e sorde: ma l' immaginarie positive o

negative son sempre sorde. Le radici sorde e perciò anche l'immaginarie hanno (almeno a 2 a 2 e sempre in numero pari) le stesse quantità, se non che in ciascuna coppia simile l'una è positiva, e l'altra è negativa: senza ciò non potrebbero distruggersi tra loro e comparirebbero nell'equazione, contro l'ipotesi. Dal che segue che le radici eguali son sempre razionali; poichè se fossero sorde, l'equazione avrebbe necessariamente dei radicali.

365. Se $x^2 - 2ax + a^2 = 0$, il primo membro dell'equazione è il prodotto di $x-a$ per $x-a$; è poichè questo membro si riduce a zero, è necessario che sia $x=a$, o $x-a=0$. Ma perchè questo è un quadrato, non potrà essere zero uno de' suoi fattori, che non lo sia anche l'altro; laddove se si avesse $x^2-(a+b)x+ab=0$, basterebbe che un solo de' suoi fattori $x-a$, $x-b$ fosse zero per ridurre a zero il primo membro. Supporre zero i due fattori nel tempo stesso, sarebbe un riguardare a e b come necessariamente eguali fra loro, il che non è. *Il primo membro d'un'equazione trasposta è dunque il prodotto di più fattori semplici, eguali o ineguali. Quando son tutti eguali, tutti si riducono a zero; ma quando sono ineguali, uno solo è zero.*

366. Ponghiamo dunque $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$, e fatto il prodotto, troveremo

$$\begin{array}{lllll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd & = 0 \\ \quad\;\, - b & + ac & - abd & & \\ \quad\;\, - c & + ad & - acd & & \\ \quad\;\, - d & + bc & - bcd & & \\ & + bd & & & \\ & + cd & & & \end{array}$$

Dall'esame di questa equazione e d'altre che pos-

son formarsi nel modo stesso, si deducono le seguenti verità:

367. I. Tanti fattori semplici e tante radici sono in un'equazione, come pur tanti termini più uno (contando tutti quelli che le competono) quante sono unità nel massimo esponente dell'incognita.

368. II. Se tutte le radici a, b, c, d son positive, i termini dell'equazione hanno *alternativamente* diverso segno; avrebbero *successivamente* lo stesso se tutte le radici fossero negative: in generale *tante son le radici positive d'un'equazione quante l'alternazioni di segno, e tante le negative quante le successioni d'un segno stesso, se non vi sieno radici immaginarie*,

369. III. Onde se tutte le radici fossero negative, i termini pari, secondo, quarto, sesto ec., verrebbero col segno +: si mutan perciò le radici positive in negative col mutare i segni dei termini pari, o (che è lo stesso) con lo scriver $-x$ in luogo di x.

370. IV. Il coefficiente del secondo termine è la somma di tutte le radici con segni contrarj; quello del terzo, del quarto ec. è la somma dei prodotti di esse a 2 a 2 coi loro segni, a 3 a 3 con segni contrarj ec.; l'ultimo termine è il prodotto di tutte col segno + se il numero delle negative e il grado dell'equazione sono ambedue pari o impari, e col segno − se un solo di quei due numeri è pari. Onde poiche la somma e il prodotto di più rotti non possono essere interi come si vedrà altrove (476. LX), le radici razionali d'un'equazione non potranno esser rotte.

371. V. Se manchi il secondo termine, la

somma delle radici positive eguaglierà quella delle negative: se manchi il terzo, la somma dei prodotti positivi a 2 a 2 eguaglierà quella dei negativi ec.: se manchi l'ultimo, una almeno delle radici sarà o (370).

372. VI. Se sia $a=-b, c=-d$ ec., spariranno dall'equazione i termini ove x è a potenze impari, e il coefficiente del terzo termine sarà la somma dei quadrati delle radici a 2 a 2, quello del quinto la somma dei prodotti dei loro quadrati a 4 a 4 ec.

373. VII. Se in luogo di x si ponga nell' equazione una radice qualunque, come a, l' equazione si ridurrà a zero (366): e se postevi due quantità p, q, si abbiano in vece di zero due risultati con segni contrarj, si concluderà che due almeno dei fattori $p-a$ e $q-a$ hanno un contrario segno: onde supposto $p-a$ positivo cioè $p > a$, sarà $q-a$ negativo cioè $q < a$, ed una almeno delle radici, come a, sarà tra p e q.

374. VIII. Ma se le radici sieno o immaginarie o eguali a 2 a 2, a 4 a 4 ec., qualunque quantità p, q si sostituisca per x, non si avranno mai risultati con segni contrarj; perchè le radici immaginarie non sarebbero più tali se potessero trovarsi tra due quantità reali p, q, e i risultati $(x-p)^2$, $(x-q)^4$ ec. di radici eguali a 2 a 2, a 4 a 4 ec. son sempre positivi (121).

375. IX. Ogni equazione con l'ultimo termine negativo ha una radice reale positiva; poichè se il primo è x^m e l'ultimo $-\omega$ (ω è quantità positiva), fatto $x=0$, il risultato è $-\omega$ negativo, e fatto $x=\infty$, il risultato è ∞^m positi-

vo; dunque l'equazione ha una radice reale e positiva tra o ed ∞ (373).

376. X. Ogni equazione di grado impari con l'ultimo termine negativo ha dunque una radice reale (375): ma se l'ultimo termine sia positivo, la radice reale sarà negativa; poichè cangiati i segni ai termini pari, le radici positive diverranno negative (369): ora in tal caso l'ultimo termine è negativo (367); dunque l'equazion trasformata avrà una radice reale positiva (375); dunque la proposta ne avrà una negativa.

377. XI. Ogni equazione di grado pari con l'ultimo termine negativo, ha due radici reali, l'una positiva e l'altra negativa; perchè una è già positiva (375), e cangiando i segni ai termini pari, l'ultimo resterà negativo (367); dunque la trasformata avendo una radice reale positiva (375), dovrà la proposta averne una negativa.

378. XII. Ogni equazione senza secondo termine e col terzo positivo, ha delle radici immaginarie e può averle tutte; col terzo nullo ne ha delle reali e dell'immaginarie; e col terzo negativo, ne ha delle reali e può averle tutte: poichè la somma $-2B$ dei quadrati delle radici (150) sarà nel primo caso negativa, sicuro indizio di radici o tutte o in parte immaginarie (205); nel secondo sarà zero, il che indica radici parte reali e parte immaginarie; e nel terzo sarà positiva, indizio di radici o tutte o in parte reali.

379. La proprietà dell'ultimo termine d'essere il prodotto di tutte le radici (370), dà il modo di trovar le razionali. In fatti se si divida l'equazione per $x \pm$ qualche divisore dell'ultimo termine e la divisione riesca, si ha subito una delle radici. Divisa per esempio l'equazione $x^4 - ax^3 +$ ec. (366) per $x-a$, si avrà per quoziente $x^3 -$ ec., il quale diviso pure per $x-b$ darà $x^2 -$ ec., e così di seguito finchè si sieno tro-

vati tutti i fattori dell'equazione $x^4 - ax^3$ ec. Onde volendo quelli dell' equazione $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$, si ha in generale $x \mp D21 = 0$ (intendendo per D21 qualunque divisor di 21) e trovati i divisori di 21 (38. IV.) che sono $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$, si divide per $x + 1$ che non riesce: si prova $x - 1$, che dividendo esattamente l'equazione, è uno de' suoi fattori. Coi medesimi tentativi si trova $x - 3$ e $x + 7$, altri due fattori, d'onde si conclude che le tre radici sono $1, 3, -7$, di modo che uno qualunque di questi valori sostituito nell'equazione in luogo di x, la riduce a zero. Del resto se i divisori son molti, il metodo divien fastidioso. Or per escluder la più gran parte de' divisori inutili vi son degli espedienti che presto indicheremo. Si osservi intanto che con questo metodo le quantità complesse possono sciogliersi nei lor fattori: basta perciò eguagliarle a zero e trattarle come equazioni. Così volendo i fattori di $x^2 - a^2$, si fa $x^2 - a^2 = 0$, e l'equazione risoluta dà i fattori cercati $x - a, x + a$.

380. Spesso è cosa utile di eguagliar l'incognita dell' equazione ad una o più nuove incognite sommate, sottratte, moltiplicate o divise per qualche quantità nota o indeterminata. Se per esempio, debban togliersi i rotti dall' equazione $x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{d} + \frac{f}{g} = 0$, si farà $x = \frac{y}{adg}$, e la proposta dopo la sostituzione si trasforma in $\frac{y^3}{(adg)^3} + \frac{by^2}{a(adg)^2} + \frac{cy}{d.adg} + \frac{f}{g} = 0$, che moltiplicata per $(adg)^3$ diventa $y^3 + bdgy^2 + a^2cdg^2y + a^3d^3fg^3 = 0$. E se dall' equazione $x = \sqrt[3]{bx^2} + \sqrt[3]{b^2c}$ debban togliersi i radicali, faccio $\sqrt[3]{bx^2} = y$, $\sqrt[3]{b^2c} = z$, ed ho I. $x = y + z$, II. $bx^2 = y^3$, III. $b^2c = z^3$: pongo nella II. il valor di y preso dalla I. e viene IV. $bx^2 = x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3$, onde sostituito quì il valor di z^3 preso dalla III., si ha V. $z^3 =$

$\frac{bx^2 + b^2c - x^3 + 3x^2z}{3x}$; moltiplico questa per z, e nuovamente sostituito il valor di z^3, trovo VI. $z^2 = \frac{3b^2cx - bx^2z - b^2cz + x^3z}{3x^2}$: quindi dal paragone della V. e VI. ho un'equazione ove z è al primo grado, il cui valore posto nella IV., mi dà un'equazione del nono grado con la sola incognita x e senza radicali.

381. Se dall'equazione $x^m \pm ax^{m-1} \pm bx^{m-2} \pm$ ec. $+ \omega = 0$ voglia eliminarsi il secondo termine, si farà $x = y + f$ e la trasformata sarà

$$\left.\begin{array}{llll} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \Omega \\ y^m + my^{m-1}f + & \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}f^2 & + \text{ec.} & \ldots + \omega \\ \pm ay^{m-1} & \pm (m-1)ay^{m-2}f & \pm \text{ec.} & \\ & \pm by^{m-2} & \pm \text{ec.} & \\ & & \text{ec.} & \end{array}\right\} = 0$$

Or perchè il secondo termine svanisca, dee essere $my^{m-1}f \pm ay^{m-1} = 0$, onde $f = \mp \frac{a}{m}$; dal che s'impara in generale, che *per togliere il secondo termine d'un'equazione dee eguagliarsi la sua incognita ad un'altra, meno o più il coefficiente del secondo termine dell'equazione, diviso per il numero che ne esprime il grado*. Si prende $-$ quando il secondo termine è positivo, e $+$ quando è negativo. Così nell'equazione $x^1 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$ pongo $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$, e sostituendo trovo $y^3 - 8y - 15 = 0$, ove non è secondo termine. Sia $x^4 + 2x^1 - 4 = 0$. Pongo $x = y - \frac{2}{4} = y - \frac{1}{2}$, e trovo $y^4 - \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{67}{16} = 0$. In questo caso ove il coefficiente 2 del secondo termine non è esattamente divisibile per l'esponente 4, si potea fare $x = \frac{y-1}{2}$, con che si sarebbero evitati i rotti.

Per toglier da un'equazione il terzo termine, basta supporre $\frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}f^2 \pm (m-1)ay^{m-2}f \pm by^{m-2} = 0$, onde $f = \mp\frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{m^2} \mp \frac{2b}{m \cdot m-1)}\right)}$: ma la sostituzione del valor di f introduce per lo più dei radicali. Il calcolo diverrebbe sempre più complicato volendo togliere il quarto termine ec.

382. Questa stessa trasformazione dà il *limite* delle radici d'un'equazione, cioè quella quantità che è maggiore di ciascuna radice. Sommati in fatti i coefficienti di y nelle colonne A, B, C.... Ω, avremo

$$\text{A} = mf + a$$
$$\text{B} = \frac{m(m-1)}{2}f^2 + (m-1)af + b$$
$$\text{C} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}f^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{2}af^2 + (m-2)bf + c$$
$$\vdots$$
$$\Omega = f^m + af^{m-1} + bf^{m-2} + cf^{m-3} + \text{ec.} \ldots + \omega$$

e se si prenda il minimo valor di f che rende positivi A,B,C.... Ω, l'equazione avrà tutti i termini col segno $+$; dunque i valori di y e perciò anche quelli di $x-f(=y)$, saranno tutti negativi (368); dunque f supererà tutti i valori o radici positive di x e perciò ne sarà il limite: quello delle negative si trova nel modo stesso cangiando x in $-x$ (369).

383. Con ciò possono escludersi molti inutili divisori dell' ultimo termine (379); poichè trovati i limiti delle positive e negative radici, non avran più luogo i divisori negativi e positivi che eccedon quei limiti. Ma se i divisori restanti sieno tuttora in gran numero, si supporrà $\pm f = \pm 1$ ovvero $\pm f = \pm 2$ ec., e sostituito questo valore nell' ultimo termine Ω della trasformata, verrà y eguale a qualche divisore di Ω (370), cioè $y = \pm D\Omega$ (379); dunque $x = \pm D\Omega \pm f$ ed $x \mp D\Omega \mp f = 0$: ma anche $x \mp D\omega = 0$; dunque $\mp D\omega = \mp D\Omega \mp f$, cioè i divisori dell' equazione x^m ec. (381) saranno tutti quelli di Ω diminuiti o accresciuti di f, se non si veda a colpo d'occhio che talun di essi non può esser divisore di ω. Ecco un esempio.

Si cerchino i limiti di $x^3 - 400x + 360 = 0$. Avremo $m = 3$, $a = 0$, $b = -400$, $c = 360$, e il minimo valor di f che rende positivi A, B, C, cioè il limite delle radici positive, è $f = 20$. Scrivendo $-x$ per x, l'equazione diverrà $x^3 - 400x - 360 = 0$, onde $m = 3$, $a = 0$, $b = -400$, $c = -360$, e il minimo valor di f che rende positivi A, B, C, è $f = 21$, onde il limite delle radici negative è $-f = -21$. Dunque dei divisori negativi e positivi di 360 sono inutili tutti quelli che superano -20 e 21.

$$A = 3f \quad B = 3f^2 - 400 \quad C = f^3 - 400f + 360$$

$$A = 3f \quad B = 3f^2 - 400 \quad C = f^3 - 400f - 360$$

Ma poichè restano ciò non ostante 26 divisori, si faccia $\pm f = \pm 1$, e sarà $\Omega = \pm 1 \mp 400 + 360 = {-39 \atop +759}$; dunque (preso il segno di sopra) $\mp D\Omega \mp f = \mp D39 - 1$, cioè i divisori razionali dell' equazione, se ne ha, saranno quelli di 39 diminuiti di 1, e tali sono $+2$, $+12$. -2, -4, rigettato -14 che a colpo d'occhio si vede non poter esser divisore di 360, e $+38$, -40 che eccedono i limiti. Così i 48 divisori di 360 son ridotti a 4.

Calcolo delle Quantità Radicali.

384. Data ai radicali o reali o immaginarj la forma più semplice (174), si sommano e si sottraggono al solito (116.117), e se ve ne son dei *simili*, cioè con lo stesso esponente nel radicale e con la stessa quantità sotto il segno, si riducono parimente al solito (114): così $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b} = 3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b}$; $\sqrt{27a^7b} - \sqrt{3a^3b^5}$ ($= 3a^3\sqrt{3ab} - ab^2\sqrt{3ab}$) $= (3a^3 -$

ab^2) $\sqrt{3ab}$. La moltiplicazione e divisione o si accennano coi segni ordinarj (26. 37) o si effettuano dopo aver ridotti i radicali allo stesso grado se non vi sieno, il che si fa trasformando i radicali in potenze rotte (161) e riducendo i rotti allo stesso denominatore: così $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{21}$; $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7}$;
$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{b^2} = a^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{5}{15}} \times b^{\frac{6}{15}} = (a^5 b^6)^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{a^5 b^6}$;
$\frac{\sqrt[6]{a^r}}{\sqrt[4]{b^m}} = a^{\frac{2r}{12}} : b^{\frac{3m}{12}} = \sqrt[12]{\frac{a^{2r}}{b^{3m}}}$.

385. Nel modo stesso si sommano, si sottraggono e si riducono le quantità immaginarie: ma la loro moltiplicazione merita avvertenza. Debba moltiplicarsi $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$; si crederebbe che il prodotto fosse $\sqrt{1} = 1$; eppure il vero prodotto è -1 (166): onde in generale $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = (\sqrt{a}.\sqrt{-1})(\sqrt{a}.\sqrt{-1}) = \sqrt{a^2} \times -1 = -\sqrt{a^2} = -a$; $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = (\sqrt{a}.\sqrt{-1})(\sqrt{b}.\sqrt{-1}) = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}$ ec. Segue di quì 1°. che $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$, e perciò $(\sqrt{-1})^{3n} = (-\sqrt{-1})^n$, valore diverso da $-(\sqrt{-1})^n$ ogni volta che n è numero pari; 2°. che essendo $\frac{(\sqrt{-1})^n}{(\sqrt{-1})^3} = \frac{(\sqrt{-1})^n}{-\sqrt{-1}}$, anche $(\sqrt{-1})^{n-3} = -(\sqrt{-1})^{n-1}$, e generalmente $(\sqrt{-1})^m = -(\sqrt{-1})^{m \pm 2}$; 3°. che se n è numero intero, si troverà sempre $(\sqrt{-1})^{2n} = \pm 1$ e $(\sqrt{-1})^{2n-1} = \mp \sqrt{-1}$, presi i segni superiori se n è pari, e gli inferiori se è impari; 4°. che un prodotto o un quoziente di quantità immaginarie può avere una forma reale, e per darne quì un esempio che ci sarà utile in seguito, si osservino le espressioni immaginarie $p = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, $q = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; facendone i quadrati e sommandoli, si trova $p^2 + q^2 = 1$.

386. Si alzano i radicali a potenze intere moltiplicando l' esponente della quantità sotto il segno per quello della potenza a cui vogliono alzarsi, e facendo la riduzione se ha luogo: così per alzar $\sqrt{2}$ a cubo, si scrive $\sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; e per alzar $\sqrt{a^n b^x}$ a quadrato, si toglie il radicale. Perciò $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$; $(x + \sqrt{y})^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y}$: in generale *se l' esponente del radicale sia quello della potenza proposta, basta togliere il radicale*; poichè $(\sqrt[m]{a})^m = \sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a$.

387. Si estraggono le radici dai radicali moltiplicando l' esponente del segno radicale per quello della radice da estrarsi: così la radice di $\sqrt[4]{a}$ è $\sqrt{\sqrt[4]{a}} = a^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a}$.

388. Ma i radicali da cui bisogna estrar la radice, son talora uniti a quantità razionali come $p \pm \sqrt{q}$ (208), e può cer-

carsi la radice m di questa espressione. Sia $m = 2$, e si supponga che la radice di $p \pm \sqrt{q}$ sia $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$; dunque I. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(p + \sqrt{q})}$, II. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{(p - \sqrt{q})}$. Quadrandole e sommandole si ha III. $x + y = p$; moltiplicandole insieme si trova IV. $x - y = \sqrt{(p^2 - q)}$: e sommando e sottraendo la III. e IV., viene $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{p + \sqrt{(p^2 - q)}}{2}}$; $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{p - \sqrt{(p^2 - q)}}{2}}$.

Appl. I. Si cerca la radice di $8 + 2\sqrt{15} = 2(4 + \sqrt{15})$. si avrà $p = 4$, $q = 15$; dunque $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e $\sqrt{2(4 + \sqrt{15})} = (\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}})\sqrt{2} = \pm\sqrt{5} \pm \sqrt{3}$.

II. Sia $2(7 \pm \sqrt{46})$ onde $p = 7$, $q = 46$; dunque $\sqrt{x} = \sqrt{\left(\frac{7 + \sqrt{3}}{2}\right)}$, $\sqrt{y} = \sqrt{\left(\frac{7 - \sqrt{3}}{2}\right)}$, e $\sqrt{2(7 \pm \sqrt{46})} = \sqrt{(7 + \sqrt{3})} \pm \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$.

III. Sia $-1 + 2\sqrt{-2}$; avremo $p = -1$, $q = -8$; dunque $\sqrt{x} = 1$, $\sqrt{y} = \sqrt{-2}$, e $\sqrt{(-1 + 2\sqrt{-2})} = \pm 1 \pm \sqrt{-2}$.

IV. Sia $2\sqrt{-1}$, onde $p = 0$, $q = -4$; dunque $\sqrt{x} = 1$, $\sqrt{y} = \sqrt{-1}$, e $\sqrt{(2\sqrt{-1})} = \pm 1 \pm \sqrt{-1}$.

389. Sia ora $m = 3$, e la radice cuba di $p + \sqrt{q}$ pongasi $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z}$; dunque I. $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(p + \sqrt{q})}$ e perciò II. $(x - \sqrt{y})\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(p - \sqrt{q})}$. Cubandole e sommandole, si ha III. $x^3 z + 3xyz = p$: moltiplicandole insieme, si trova $x^2 - y = \frac{\sqrt[3]{z(p^2 - q)}}{z}$ che chiamo a, onde $y = x^2 - a$; dunque posto nella III. questo valor di y, verrà $4x^3 - 3ax - \frac{p}{z} = 0$, e fatto $x = \frac{u}{4z}$, $u^3 - 12az^2u - 16z^2p = 0$. Perciò presa $z = 1$ se $p^2 - q$ sia un cubo perfetto, o se non lo sia, preso per z un numero proprio a renderlo tale, cercherò la radice razionale di quest'equazione (379) che dee averla se $p + \sqrt{q}$ è un cubo, e conoscerò u, x e quindi $y = x^2 - a$.

Applicazioni, I. Qual'è la radice cuba di $10 + 6\sqrt{3} = 2(5 + 3\sqrt{3})$? Sarà $p = 5$, $q = 27$, $p^2 - q = -2$ che non è cubo. Pongo dunque $z = 4$ e viene $a = -\frac{1}{2}$, e l'equazione u^3 — ec. diventa $u^3 + 96u - 1280 = 0$, da cui si ha $u = 8$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$ e perciò $\sqrt[3]{2(5 + 3\sqrt{3})} = (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}})\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} = 1 + \sqrt{3}$.

II. Qual'è la radice cuba di $8 + 4\sqrt{5} = 4(2 + \sqrt{5})$? Si ha $p = 2$, $q = 5$, $p^2 - q = -1$ che è cubo; dunque $z = 1$, $a = -1$ e l'equazione u^3 - ec. diviene $u^3 + 12u - 32 = 0$ che dà $u = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{4}$ e $\sqrt[3]{4(2 + \sqrt{5})} = (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}})\sqrt[3]{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$. Lo stesso metodo presso a poco serve anche per le radici più alte.

390. Si dee quì osservare che qualsisia quantità ha sempre tre radici cubiche o terze, quattro quarte, cinque quinte ec. in infinito. Così nella prima applicazione trovammo $1+\sqrt{3}$ radice reale di $10+6\sqrt{3}$. Volendo l'altre due, si farà in generale $z^3=10+6\sqrt{3}=r^3$, onde $z^3-r^3=0$, equazione che divisa per $z-r=z-1-\sqrt{3}$, dà $z^2+rz+r^2=0$, e quindi l'altre due radici saranno $z=\frac{-r\pm r\sqrt{-3}}{2}=\ldots$ $\frac{-1-\sqrt{3}\pm(1+\sqrt{3})\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}\pm(3+\sqrt{3})\sqrt{-1}}{2}$. Così se $r^3=-10+9\sqrt{-3}$ e perciò $r=2+\sqrt{-3}$, l'altre due radici saranno $z=\frac{-2-\sqrt{-3}\pm(2+\sqrt{-3})\sqrt{-3}}{2}$: e se $r^3=-11-2\sqrt{-1}$ onde $r=1+2\sqrt{-1}$, si troveranno l'altre due radici $z=\frac{-1-2\sqrt{-1}\pm(1+2\sqrt{-1})\sqrt{-3}}{2}$ ec. Vedremo nella Trigonometrìa come si trovino tutte le radici quarte, tutte le quinte ec.

Equazioni con Radici Razionali

391. Dovendo risolvere un'equazione $0=A+Bx+Cx^2+\ldots+x^m$, comincio dal cercarne i divisori razionali sostituendovi ± 1 per x: se con l'uno dei due valori o con ambedue l'equazione si riduca a zero, essi saranno sue radici (373); se no, non entreranno più in calcolo. Sia $x+d$ il fattor dell'equazione, cioè sia d uno qualunque dei divisori ridotti dell'ultimo termine (383); dunque il prodotto di $x+d$ per un'equazione della forma $0=E'+E''x+E'''x^2+\ldots+x^{m-1}$ restituirà la data (35). Or paragonando i coefficienti di ambedue, si hanno l'equazioni generali poste quì di faccia, che tutte dovranno dar *numeri interi o positivi o negativi* per E', E'', E''' ec. e l'ultimo dovrà ridursi ad 1, se $x+d$ è divisor della data: altrimenti ella non avrà divisori razionali. Ecco un esempio.

$$\frac{A}{d}=E'$$
$$\frac{B-E'}{d}=E''$$
$$\frac{C-E''}{d}=E'''$$
$$\frac{D-E'''}{d}=E^{iv}$$
$$\vdots$$
$$\frac{Z-E^{(m-1)}}{d}=E^{(m)}=1$$

Vogliansi i divisori di $0=-100-10x+66x^2+3x^3-8x^4+x^5$ in cui ± 1 non riescono, ed avremo $A=-100$, $B=-10$, $C=66$, $D=3$, $F=-8$. I divisori di 100 ridotti (383) son quelli di 36 accresciuti di 1, cioè $d=2, =4, =5, =10, =-2, =-5$. Fatto $d=2$ nell'equazioni di faccia, viene $E'=-50$, $E''=20$, $E'''=23$, $E^{iv}=-10$, $E^{v}=1$; dunque $x+2$ è un divisor della data. Fatto $d=4$, si ha $E'=-25$, $E''=\frac{15}{4}$, numero rotto, e un rotto si ha pure da

$d=5, =10, =-2$. Fatto $d=-5$, trovo $E'=20$, $E''=6$ $E'''=-12$, $E''''=-3$, $E^{v}=1$; e però anche $x-5$ è un divisor della data.

Osservazioni. I. I valori di E^{v}, E^{iv}, E''' ec. sono i coefficienti dell'equazioni $0=E'+E''x+$ ec. che si avrebbero dividendo la data per $x+2$, $x-5$: esse nel nostro esempio sono $x^4-10x^3+23x^2+20x-50=0$, $x^4-3x^3-12x^2+6x+20=0$.

II. Sottratte l'una dall'altra queste due equazioni, si sarà divisa la data per il prodotto di ambedue (44. V), e avremo $x^3-5x^2-2x+10=0$ ove potrebbero esser dei divisori eguali ai già trovati. Infatti ripetuta l'operazione coi divisori di 10 (esclusi però $+1, +5, -1, -2$ che non riuscirono nella passata) si trova un'altra volta il divisore $x-5$. Così si hanno le radici eguali che son sempre razionali (364).

Equazioni del terzo grado.

392. Se un'equazione cubica non abbia divisori razionali, fo svanirne il secondo termine (il che supporrò sempre in avvenire) e la riduco ad $x^3+px+q=0$. Posto $x=y-\frac{p}{3y}$, avrò $y^3-\frac{p^3}{27y^3}+q=0$ (144), onde risolvendo (208), $y^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$, $y^3+q=\frac{p^3}{27y^3}=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$, e quindi $y-\frac{p}{3y}=x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}-\sqrt[3]{\left[\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$ ovvero $x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$. Così $x^3+9x+6=0$ ove $p=9$, $q=6$, dà $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$.

Osservazioni. I. Poichè $q=\frac{p^3}{27y^3}-y^3$, se sia $-\frac{p}{3y}(=x-y)=z$ onde $p=-3yz$, l'equazione $x^3+px+q=0$ diverrà $x^3-3xyz-y^3-z^3=0$ che divisa per $x-y-z$, dà $x^2+(y+z)x+y^2+z^2-yz=0$, d'onde l'altre due radici $x=\frac{-(y+z)\pm(y-z)\sqrt{-3}}{2}=\frac{-y\pm y\sqrt{-3}-z\mp z\sqrt{-3}}{2}=\frac{(-1\pm\sqrt{-3})}{2}y-\frac{(1\pm\sqrt{-3})}{2}z=\frac{(-1\pm\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}-\frac{(1\pm\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}$; o ben

si vede che se $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$ sia reale, le due nuove radici saranno immaginarie: ma che diverranno se $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$ è immaginaria, cioè se con p negativo si ha $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$? Pongo $\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]}=A+B\sqrt{-1}$ (205), e il primo valor di x ($=A+B\sqrt{-1}+A-B\sqrt{-1}=2A$) diventa reale; lo stesso è degli altri due: siochè *quando con* p *negativo si ha* $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$, *i tre valori di* x *son reali*; e vedremo tra poco e poi nella Trigonometrìa come si abbiano per approssimazione; invano si è tentato di determinarli esattamente, e perciò questo caso si è chiamato *irriducibile*.

II. Con lo stesso metodo si risolve ogni equazione della forma $x^{3n}+px^{2n}+qx^n+r=0$ fatto $x^n=y$.

Equazioni del quarto grado.

393. Un' equazione del quarto grado $x^4+tx^2+qx+u=0$ senza divisori semplici, può averne dei composti di quantità o miste con radicali o tutte razionali. Quanto ai primi, prendo due divisori i più complicati $x^2\mp mx\sqrt{n}+b\pm$ (ovvero $\mp$) $c\sqrt{n}$, e il loro prodotto mi dà l' equazione compostissima $x^4+(2b-m^2n)x^2-$ (ovvero $+$) $2cmnx-c^2n+b^2=0$, in cui fatte zero o una o due delle quantità b, c, m, si hanno sette equazioni diverse, cinque delle quali son fuori del nostro caso, e per l'altre due nascono i seguenti teoremi.

394. I. Se $t=\frac{q^2}{4u}$, i divisori saranno $x^2\pm x\sqrt{-t}\pm$ (ovvero $\mp$) $\sqrt{-u}$, presi i segni di sopra quando q, u hanno il segno stesso: tali sono l' equazioni $x^4+5x^2\pm 30x+45=0$.

395. II. Se $2E-t=\frac{q^2}{4(E^2-u)}$ (E è un numero intero positivo o negativo) i divisori saranno $x^2\pm x\sqrt{(2E-t)}+E\pm$ (ovvero $\mp$) $\sqrt{(E^2-u)}$, presi i segni come sopra. Così nell' equazioni $x^4\mp 12x-17=0$ riesce $E=1$, e i divisori sono $x^2\pm x\sqrt{2}+1\pm$ (ovvero $\mp$) $3\sqrt{2}$.

396 Se questi teoremi non han luogo, si passa ai divisori razionali, come $(x^2-ax+m)(x^2+ax+n)=0$ che moltiplicati danno $x^4+(m-a^2+n)x^2+(m-n)ax+mn=0$; dunque 1°. $m-a^2+n=t$; 2°. $a(m-n)=q$; 3°. $mn=u$: dalle due prime si ha $m+n=a^2+t$, ed $m-n=\frac{q}{a}$, che sommate e sottratte danno $m=\frac{t+a^2}{2}+\frac{q}{2a}$, ed $n=\frac{t+a^2}{2}-\frac{q}{2a}$; dalla moltiplicazio-

ne di queste viene $mn = u = \frac{(t + a^2)^2}{4} - \frac{q^2}{4a^2}$, cioè $a^6 + 2ta^4 + (t^2 - 4u)a^2 - q^2 = 0$, equazione che chiamasi la *ridotta*. Se la data $x^4 + tx^2 +$ ec. ha dei divisori composti razionali, la ridotta ne avrà due semplici ed eguali corrispondenti a $+a$ e $-a$, onde basterà trovarne uno col solito metodo (391), prendendo i soli divisori o negativi o positivi dell' ultimo termine. Così per $x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$ ove $t = -3$, $q = -12$, $u = 5$, sarà la ridotta $a^6 - 6a^4 - 11a^2 - 144 = 0$, e presi i divisori negativi di 144, si trova $a = 3$ e perciò $m = 1$, $n = 5$ e i divisori $x^2 + 3x + 5$, $x^2 - 3x + 1$.

397. Se neppur così può risolversi l' equazione, pongo nella ridotta $a^2 = y = \frac{1}{3}(z - 2t)$ (381) e risoluta (392) la risultante cubica $z^3 - (t^2 + 12u)3z + (36u - t^2)2t - 27q^2 = 0$, avrò le radici $y' = a'^2$, $y'' = a''^2$, $y''' = a'''^2$: or poichè $q = \pm\sqrt{y'y''y'''}$ (370), $2t = -a'^2 - a''^2 - a'''^2$ (372) $= -y' - y'' - y'''$, $4m = y' - y'' - y''' \pm 2\sqrt{y''y'''}$, $4n = y' - y'' - y''' \mp 2\sqrt{y''y'''}$, le radici della data sono $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{(a^2 - 4m)}) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{y'} \pm \sqrt{y''} \mp \sqrt{y'''})$, $x = \frac{1}{2}(a - \sqrt{(a^2 - 4m)}) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{y'} \mp \sqrt{y''} \pm \sqrt{y'''})$, $x = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{(a^2 - 4n)}) = \frac{1}{2}(\mp\sqrt{y'} \pm \sqrt{y''} \pm \sqrt{y'''})$, $x = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{(a^2 - 4n)}) = \frac{1}{2}(\mp\sqrt{y'} \mp \sqrt{y''} \mp \sqrt{y'''})$, presi i segni di sopra se q è positivo, quelli di sotto se è negativo. Così per $x^4 - 20x^2 - 12x + 13 = 0$ ove $t = -20$, $q = -12$, $u = 13$, la ridotta sarà $a^6 - 40a^4 + 348a^2 - 144 = 0$, e fatto $a^2 = y = \frac{1}{3}(z + 40)$, viene $z^3 - 1668z - 6608 = 0$ le cui radici $z' = -4$, $z'' = 2 + 6\sqrt{46}$, $z''' = 2 - 6\sqrt{46}$ danno $\sqrt{y'} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{y''} = \sqrt{(7 + \sqrt{3})} + \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$, $\sqrt{y'''} = \sqrt{(7 + \sqrt{3})} - \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$ (388); e poichè q è negativo, viene $x = -\sqrt{3} - \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$, $x = -\sqrt{3} + \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$, $x = \sqrt{3} - \sqrt{(7 + \sqrt{3})}$, $x = \sqrt{3} + \sqrt{(7 + \sqrt{3})}$, come dà anche il metodo di sopra (395) fatto $E = -4$.

Nel modo stesso si risolvon l' equazioni della forma $x^{4n} + px^{3n} + qx^{2n} + rx^n + u = 0$, preso $x^n = \omega$.

Equazioni che superano il quarto grado.

398. Con un metodo analogo a quello che poco fa si è spiegato (396), posson cercarsi i divisori composti d' un' equazione qualunque che non ne abbia dei semplici, dalla cui ricerca convien sempre cominciarne la risoluzione. Chiamansi *riducibili* tutte le equazioni che si possono decomporre in altre più semplici, ed *irriducibili* quelle che ricusano la decomposizione. Le radici z di queste si hanno per approssimazione 1°. trovando un valore m di z vicino al vero, il che è facile come si vedrà: 2°. ponendo $y + m$ nell' equazione in luogo di z: 3°. applicando a questa nuova equazione la serie $y = \frac{x}{a} -$

$\frac{bx^2}{a^3}$ + ec. (345). con pochi termini della quale si avrà molto prossimamente y e quindi z, giacchè con questo artifizio la serie diventa convergentissima.

399. Sia $z^n + tz^{n-2} + qz^{n-3} + \ldots + u = 0$ e in particolare $z^3 - 4z - 2 = 0$ di cui si voglia una radice. Preso il limite 3 (382) e i due medj aritmetici $\frac{3}{2}$ e $\frac{9}{4}$ tra 0 e 3, e tra 3 e $\frac{3}{2}$, eguaglio z a ciascun di essi, e con la regola di doppia falsa posizione ripetuta per tre o quattro volte (317), ottengo la radice $z = m$ $(= 2,21)$ esatta fino a due decimali almeno.

400. Se questi non bastino, facciasi $z - m = y$ cioè $z = y + m$, e sostituito questo valore, la data diviene $y^n + mny^{n-1} + [m(n-1)\frac{mn}{2} + t]y^{n-2} + [m(n-2)(\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3}m^2 + t) + q] y^{n-3} + [m(n-3)(\frac{n}{2}.\frac{n-1}{3}.\frac{n-2}{4}m^1 + \frac{n-2}{2}mt + q) + r]y^{n-4}$ + ec., cioè nel nostro caso $y^3 + 6{,}63y^2 + 10{,}6523y - 0{,}046139 = 0$ ovvero $0{,}046139 = 10{,}6523y + 6{,}63y^2 + y^3$, a cui applicando la nota serie (345) avremo $x = 0{,}046139$, $a = 10{,}6523$, $b = 6{,}63$, $c = 1$, $d = e =$ ec. $= 0$, e quindi $y = \frac{0{,}046139}{10{,}6523} - \frac{6{,}63(0{,}046139)^2}{(10{,}6523)^3} + \frac{[2(6{,}63)^2 - 10{,}6523][0{,}046139]^3}{(10{,}6528)^5}$ + ec., il cui calcolo, tornando sempre i numeri stessi, riesce facilissimo coi logaritmi. Si troverà dunque 1°. L 0,046139 − L 10,6523 = 7,6366248, onde il primo termine sarà 0,0043314: 2°. L 6,63 + 2L 0,046139 − 3L 10,6523 = 5,0673197, e il secondo termine sarà − 0,0000117; 3°. L 77,2615 + 3L 0,046139 − 5L 10,6523 = 2,7429508, e il terzo termine sarà 0,0000001. Riunendo i termini si ha $y = 0{,}0043198$ e quindi $z = 2{,}21 + y = 2{,}2143198$.

401. Quando il terzo termine dell' equazione è con + (378), e i risultati di Ω (382) presi finchè lo indica il compendio (333), conservano il segno stesso con $\# f = 0, = \pm 1, = \pm 2$ ec., le radici son tutte immaginarie (374), e si hanno cercando al solito (396) i fattori di secondo grado che compongon l' equazione.

402. Avuta una radice, l'equazione divisa per il fattor formato con essa, si abbasserà d' un grado; e se l' abbassata, toltone il secondo termine, si tratti come la data, si otterrà un altro valor reale di z ec.

Problemi indeterminati del primo grado.

403. Un problema ove il numero dell' incognite supera quello dell' equazioni, si chiama ***indeterminato*** (198). Per esempio, si voglian tre numeri x, y, z che faccian 105 ed abbiano una stessa differenza: dunque I. $x + y + z = 105$; II. $x - y = y - z$, e preso dalla II. il valor di $x = 2y - z$, si avrà nella

Il $y=35$, onde $x+35+z=105$ ed $x+z=70$. Ora non potendosi eliminar di quì nè x nè z, si farà per esempio $x=10$, e sarà $z=60$; onde i tre numeri 10, 35, 60 scioglieranno il problema: e fatto $x=12$, si avrebbe $z=58$, e il problema sarebbe sciolto egualmente dai tre numeri 12, 35, 58. Anzi il problema può aver 69 soluzioni in numeri interi e positivi, perchè può supporsi x successivamente eguale a tutti i numeri da 1 sino a 69, ma non più là, essendo 70 la somma di x e di z. Ha però un'infinità di soluzioni se si fa x rotto o negativo: ma i valori negativi o rotti occorrendo rare volte, cercheremo gli interi.

404. Sia l'equazion generale $a=bx\pm cy$ coi numeri a, b, c interi e noti. Se b, c abbiano un divisor comune d e sia $b=b'd$, $c=c'd$, verrà $\frac{a}{d}=b'x\pm c'y$, onde l'equazione è irrisolubile se a non è multiplo di d: ma se lo è, fatto $a=a'd$, avremo $a'=b'x\pm c'y$, equazione simile alla data coi numeri b', c' primi tra loro.

405. Supposto perciò che nella data sieno b, c primi tra loro e $b<c$, avremo $x=\frac{a\mp cy}{b}$; onde se $\frac{a}{b}=a'+\frac{a''}{b}$, $\frac{c}{b}=c'+\frac{c''}{b}$, sarà $x=a'\mp c'y+\frac{a''\mp c''y}{b}$, e trascurati gl'interi a', $c'y$, tutto si ridurrà a fare $\frac{a''\mp c''y}{b}=\mathrm{E}$, intendendo per E un *numero intero*.

406. Ora poichè b, c e perciò anche b, c'' son primi tra loro, può sempre trovarsi o a colpo d'occhio o con la data regola (58) un numero $\mathrm{N}^{(m)}$ per cui moltiplicando $\frac{a''\mp c''y}{b}$, venga $\frac{a''\,\mathrm{N}^{(m)}\mp c''\,\mathrm{N}^{(m)}y}{b}$ che trascurati gl'interi, lasci y col coefficiente 1 e si riduca per esempio a $\frac{k\mp y}{b}=\mathrm{E}$, intero diverso dal primo ma sempre espresso per E: allora si avrà $y=b\mathrm{E}\pm k$ (mutati, quando y è negativo, i segni al primo membro, il che non interessa l'intero); e preso per E quel più piccolo intero positivo che renda positiva la quantità $b\mathrm{E}\pm k$ (e perciò fatto $\mathrm{E}=0$ se abbia luogo il segno di sopra), si avrà il minimo valor di y che sostituito nell'equazion proposta, darà, col segno di sopra, il massimo valor di x, col segno di sotto, il minimo, come è chiaro.

407. Sieno g, h i valori così trovati di x, y: si avrà dunque $a=bx\pm cy$ ed $a=bg\pm ch$; onde $\pm bg\mp bx=cy-ch$, cioè $\frac{\pm g\mp x}{y-h}=\frac{c}{b}=\frac{mc}{mb}$, supposto m un numero intero qualunque cominciando da 0; dunque poichè b, c son primi tra

loro, verrà $x = g \mp mc$ ed $y = h + mb$, espressioni che danno tutti i valori possibili di x, y, dati i due primi g, h.

408. Dunque 1°. se l'equazione $a = bx \pm cy$ sia col segno di sopra, avremo $x = g - mc$, e per aver x positivo, dovrà essere $mc < g$ e perciò $m < \frac{g}{c}$; onde il numero dei valori di x, y sarà $\frac{g}{c} + 1$ giacchè m comincia da o: 2°. se l'equaziona sia col segno di sotto, sarà $x = g + mc$ e i valori di x, y saranno infiniti. In ambedue i casi, questi procedono in progressione aritmetica, poichè fatto $m = 0, = 1, = 2$ ec. sarà $x = g, = g \mp c, = g \mp 2c$ ec., ed $y = h, = h + b, = h + 2b$ ec. Ecco degli Esempj.

409. I. Risolvere in numeri interi l'equazione $7 = 6x - 6y$. Poichè 7 non è multiplo di 6, il problema è impossibile(404).

II. Risolver l'equazione $5 = 3x - 4y$. Sarà $x = \frac{4y + 5}{3} = E = \frac{y + 2}{3}$ (405) ed $y = 3E - 2$. Fatta $E = 1$ (406), sarà $y = 1$ ed $x = \frac{4y + 5}{3} = 3$, valori minimi (406); dunque poichè $b = 3$, $c = 4$, $g = 3$, $h = 1$, sarà $x = 3, = 7, = 11$ ec., $y = 1, = 4, = 7$ ec. (407).

III. Risolver l'equazione $2000 = 9x + 13y$. Sarà $x = \frac{2000 - 13y}{9} = E = \frac{2 - 4y}{9}$ (405) $= \frac{(2 - 4y)2}{9}$ (406) $= \frac{4 + y}{9}$ (405) ed $y = 9E - 4$. Fatta $E = 1$, sarà $y = 5$ valor minimo, $x = \frac{2000 - 13y}{9} = 215$ valor massimo (406); dunque poichè $b = 9$, $c = 13$, $g = 215$, $h = 5$, sarà $x = 215, = 202, = 189$ ec., $y = 5, = 14, = 23$ ec., e le soluzioni sono $\frac{g}{c} + 1 = \frac{215}{13} + 1 = 17$ (408).

IV. Un Mercante per saldo di 1200^l offre una stoffa di 7^l il Braccio, un'altra di 5^l; in quanti modi può saldare? Poste y le Br. della prima stoffa, x quelle della seconda, sarà $1200 = 5x + 7y$, onde $x = \frac{1200 - 7y}{5} = E = \frac{-2y}{5} = \frac{3y}{5}$ (406) $= \frac{6y}{5} = \frac{y}{5}$, $y = 5E$. Fatta $E = 1$, sarà $y = 5$ ed $x = 233$; le soluzioni sono $\frac{233}{7} + 1 = 34$.

V. Un Mercante cambiò brillanti in perle, oltre alle quali ebbe 16^l; ogni brillante vale 1872^l e ogni perla 253: quante perle ricevè? Sieno y i brillanti, x le perle, si avrà $1872y = 253x + 16$, ed $x = \frac{1872y - 16}{253} = E = \frac{101y - 16}{253}$. Ma quì il nu-

mero $N^{(m)}$ che dee moltiplicare il rotto, non vedendosi a colpo d'occhio (406), opero come di faccia, e trovo subito (58) $N'=2$, $N''=3$, $N'''=5$; dunque $E=\frac{(101y-16)5}{253}=\frac{-y-80}{253}$ (scrivo $-y$ perchè (58) i quozienti sono in numero impari) ed $y=253E-80$ (406). Fatta $E=1$, viene $y=173$ ed $x=1280$, minimi numeri di brillanti e di perle che il Mercante abbia potuti dare e ricevere.

$$\begin{array}{r} 253 \\ 101 \ldots 2=p \\ 51 \ldots 1=q \\ 50 \ldots 1=r \\ 1 \end{array}$$

410. Con questo metodo può esprimersi più semplicemente un rotto $\frac{B}{A}=\frac{y}{x}$ quando basta una certa approssimazione, col solo fare $x=\frac{Ay}{B}=\frac{Ay\pm n}{B}=E$, essendo n un intero da aggiungersi o togliersi per aver l'approssimazione richiesta; onde il segno $=$ è quì di *adequazione* piuttosto che d'egualità. Sia $B=129$, $A=281$; dunque $\frac{281y\pm n}{129}=E=\frac{23y\pm n}{129}$; e poichè si trova (58) $N^{v}=28$, verrà $E=\frac{(23y\pm n)28}{129}=\frac{-y\pm 28n}{129}$, onde $y=129E\pm 28n$, ed $x=281E\pm 61n$. Col segno $+$, fatta $E=0$, $n=1$, sarà $y=28$, $x=61$, e $\frac{129}{281}=\frac{y}{x}=\frac{28}{61}$ incirca: col segno $-$, fatta $E=1$, $n=1$, sarà $y=101$, $x=220$, e $\frac{129}{281}=\frac{101}{220}$ incirca, e questi rotti son sì vicini al dato, che niun altro vi si accosta tanto con sì piccoli numeri, come può vedersi facendo $x=g\mp mc$, $y=h+mb$ (407). Si noti però che se la determinazione dell'arbitraria n renda $28n>129$ (come se si facesse $n=5$), o dovranno togliersi gl'interi dall'equazione $E=\frac{y\mp 28n}{129}$ prima di cavarne il valor di y, o dovrà prendersi E positiva e negativa nell'equazione $y=129E\pm 28n$.

$$\begin{array}{r} 129 \\ 23 \ldots 5=p \\ 14 \ldots 1=q \\ 9 \ldots 1=r \\ 5 \ldots 1=s \\ 4 \ldots 1=t \\ 1 \end{array}$$

411. Trovare un numero x che diviso per i numeri noti a, b, c ec. dia per resto altri numeri noti m, n, p ec. Dunque I. $\frac{x}{a}=E+\frac{m}{a}$, II. $\frac{x}{b}=E'+\frac{n}{b}$, III. $\frac{x}{c}=E''+\frac{p}{c}$ ec., e la I. dà IV. $x=aE+m$, valore che posto nella II. dà un equazione tra E ed E'; onde trovata E da questa come si trovò y (406), viene dalla IV. un nuovo valor di x in E', che posto nella III. dà un'equazione tra E' ed E''; trovata dunque E' da questa (406), si ha dalla IV. un nuovo valor di x in E'' ec.

Preso in fine per E'' un intero, si hanno i valori che soddifanno al problema.

Esempio. Un avaro ha molti sacchetti di 1200^l l'uno. Contandogli a 3 a 3, non vi è avanzo; a 7 a 7, ne avanza 1; a 10 a 10, ne avanzan 6: i sacchetti eran più di 100 ma men di 300 e se ne cerca il numero. Sia x: si avrà I. $\frac{x}{3}=E$, II. $\frac{x-1}{7}=E'$, III. $\frac{x-6}{10}=E''$, e perciò IV. $x=3E$, valore che cangia la II. in $\frac{3E-1}{7}=E'=\frac{(3E-1)5}{7}=\frac{E-5}{7}$, onde $E=7E'+5$, e la IV. diventa $x=21E'+15$, valore che cangia la III. in $\frac{21E'+9}{10}=E''$, onde $E'=10E''-9$, e la IV. diventa $x=210E''-174$. Presa $E''=1$, si ha $x=36$, minimo dei numeri che divisi per 3, per 7 e per 10 danno i resti 0, 1, 6: se $E''=2, =3$, $x=246, =456$; dunque i sacchetti sono 246.

412. Con questo metodo si sciolgon molti problemi relativi al Calendario. Vogliasi l'anno dell'Era Cristiana in cui si ebbe 17 di Ciclo Solare, 6 di Ciclo Lunare, e 5 d'Indizione. E' noto che il Ciclo Solare è un periodo di 28 anni, il Lunare o Numero Aureo di 19, e l'Indizione di 15. Perciò chiamato x l'anno cercato, sarà I. $\frac{x-17}{28}=E$, II. $\frac{x-6}{19}=E'$, III. $\frac{x-5}{15}=E''$, onde IV. $x=28E+17$, valore che riduce la II. a $\frac{28E+11}{19}=E'=\frac{9E+11}{19}=\frac{(9E+11)2}{19}=\frac{-E+3}{19}$, e mutati i segni (406), $E=19E'+3$, ed $x=532E'+101$, valore che riduce la III. a $\frac{532E'+96}{15}=E''=\frac{7E'+6}{15}=\frac{14E'+12}{15}=\frac{-E'+12}{15}$, e mutati i segni, $E'=15E''+12$, ed $x=7980E''+6485$. Sia $E''=0, =1$ ec.; si avrà $x=6485$, $=14465$ ec.: ma poichè quest'anni appartengono al Periodo Giuliano, il cui principio precede di 4713 anni quello dell'Era Cristiana, bisogna sottrarre 4713 da queste epoche differenti per ridurle ad anni della nostra Era che soddisfacciano alle tre condizioni del problema. Fatta la sottrazione da 6485, si ha 1772: sicchè dal principio del Mondo come è fissato dall'ordinaria Cronologìa, il solo anno 1772 della nostra Era ha 17 di Ciclo Solare, 6 di Lunare e 5 d'Indizione. Sottraendo del pari 4713 da 14465, si ha 9752 che nell'Era nostra soddisfà alle stesse condizioni ec. Questo Periodo Giuliano, prodotto di $28\times19\times15$, è preferibile al Dionisiano che essendo il prodotto di 28×19, abbraccia pochi avvenimenti e comincia 75 anni dopo Cristo.

Problemi indeterminati degli altri gradi.

Data l'equazion generale $y=\sqrt[m]{\left(\frac{b+cx+dx^2+ec.}{p+gx+ec.}\right)}$, *trovar per* y 1°. *dei valori razionali*; 2°. *dei valori interi*: 3°. *tutti i possibili valori interi*. Ecco il problema che comprende la completa dottrina degli indeterminati eccedenti il primo grado; niun Matematico lo ha sciolto finora interamente, e quella stessa porzione che se ne è risoluta, non può quì tutta inserirsi: ma almeno toglieremo a questi problemi una certa aria di mistero con cui sogliono trattarsi dagli Analisti.

Sia primieramente $m=1$; sarà $y=\frac{b+cx+dx^2+ec.}{p+gx+hx^2+ec.}$, ove y non supera il primo grado, mentre x ascende ad una potenza qualunque. Dato un valore ad x, si avrà sempre y; ma come averlo in numeri interi e positivi? Eccone le regole.

413. Sia $y=\frac{cx+b}{gx+p}$; fatta la divisione attuale finchè si elimini dal dividendo l'incognita, se è possibile, si ha $y=\frac{c}{g}+\frac{b-\frac{cp}{g}}{gx+p}$, ovvero $gy=c+\frac{bg-cp}{gx+p}$, e però $(gy-c)(gx+p)=bg-cp$: dunque i numeri $gy-c$, $gx+p$ debbono esser due fattori del numero $bg-cp$. Chiamato m uno di essi, n l'altro (l'uno e l'altro col segno $\pm$ se $bg-cp$ sia positivo; e l'uno con $\pm$, l'altro con $\mp$ se sia negativo) sarà $gy-c=m$, $gx+p=n$, onde $y=\frac{m+c}{g}$, $x=\frac{n-p}{g}$; cioè per aver y intero, dovranno prendersi quei fatttori m che uniti a c son divisibili per g, e i loro corrispondenti n daranno necessariamente intero anche x.

Esempio. Sono in un Albergo degli uomini e delle donne, e tanto quelli che queste spendono 24'; ma ogni uomo spende 1' più d'ogni donna. Cerco il numero degli uni e dell'altre.

Sieno x gli uomini, y le donne: si troverà $y=\frac{24x}{24-x}$, e però $c=24$, $b=0$, $g=-1$, $p=24$, $bg-cp=-576$, i cui fattori (l'uno con $\pm$, l'altro con $\mp$) sono

$$\begin{array}{l} m=\pm 576\pm 288\pm 192\pm 144\pm 96\pm 72\pm 64\pm 48 \\ n=\mp\ 1\mp\ 2\mp\ 3\mp\ 4\mp\ 6\mp\ 8\mp\ 9\mp 12 \\ m=\pm\ 36\pm\ 32\pm\ 24 \\ n=\mp\ 16\mp\ 18\mp\ 24 \end{array}$$

e poichè $y=\frac{m+c}{g}=-m-24$, $x=\frac{n-p}{g}=24-n$, per aver y positivo, converrà prender per m i soli fattori negativi non

minori di 25 e perciò i soli corrispondenti positivi per n; onde le soluzioni saranno 10 cioè

$y = 552, = 264, = 168, = 120, = 72, = 48, = 40,$
$x = 23, = 22, = 21, = 20, = 18, = 16, = 15,$
$y = 24, = 12, = 8$
$x = 12, = 8, = 6$

414. Sia $y = \frac{dx^2 + cx + b}{gx + p} = \frac{dx + c}{g} - \frac{dp}{g^2} + \frac{b + \frac{dp^2}{g^2} - \frac{cp}{g}}{gx + p}$, e però $(g^2y - dgx - cg + dp)(gx + p) = bg^2 + dp^2 - cgp$. Fatto $g^2y - dgx - cg + dp = m, gx + p = n$, sarà $x = \frac{n - p}{g}$, $y = \frac{m + dn + cg - 2dp}{g^2}$, cioè per avere x intero dovranno prendersi quei fattori n di $bg^2 + dp^2 - cgp$ che diminuiti di p son divisibili per g: il resto si fa come sopra.

Gli altri casi contenuti nell'equazion generale $y =$ ec., sono assai rari ed all' occorrenze si risolvono coi metodi stessi.

415. Ma sia $y = \frac{x^2 - b}{p}$ d'onde x non può eliminarsi: 1°. se $p = 2$ e $b = 2m + 1$, fatto $x = 2n + 1$, sarà $y = 2n(n+1) - m$ (38. III. 5°. 6°.): 2°. se b è multiplo di p, fatto $b = mp$, $x = np$, sarà $y = n^2p - m$: 3°. se $b = g^2$, verrà $py = (x+g)(x-g)$, e fatto $p = x + g$, $y = x - g$, sarà $p - g = y + g$, $y = p - 2g$ ed $x = \pm p \mp g$: 4°. qualunque sia b, si cercherà un multiplo μp di p tale che $\mu p + b$ sia x^2 o un quadrato, provando per μ tutti i numeri interi minori di $\frac{1}{4}p + 1$ tra i quali dovrà trovarsi se pur vi sia, e dedotto di quì x (per esempio, $x = f$), soddisfaranno all'equazione anche tutti i numeri compresi nella formula $x = f \pm mp$ (38. III. 13°.). Si noti però che se p sia numero primo e b negativo e non quadrato, $x^2 - b$ non sarà multiplo di p se non lo sia $b^{\frac{p-1}{2}} - 1$.

Problemi indeterminati del secondo grado.

Sia in secondo luogo $m = 2$: sarà $y = \sqrt{\left(\frac{b + cx + dx^2 \text{ec.}}{p + gx + hx^2 \text{ec.}}\right)}$, e perchè y sia razionale dovrà trovarsi per x un tal numero che faccia $\frac{b + cx \text{ ec.}}{p + gx \text{ ec.}} = Q$, intendendo per Q un *numero quadrato*. Or se questa equazione potrà cangiarsi in un'altra ove x sia d'una sola dimensione come $x \pm d$, e resti sempre un quadrato, diverso certamente dal primo, ma sempre indicato per

Q, si avrà $x \pm d = Q$ ed $x = Q \mp d$; onde preso per Q un quadrato qualunque intero o rotto (cioè fatto $Q = \frac{A^2}{a^2}$ essendo A, a due numeri arbitrarj, interi e primi tra loro), si otterrà y razionale: anzi se possa giungersi almeno a quest'altra equazione $z = \sqrt{(Q \mp d)}$, e si sappia render razionale la formula $\sqrt{(Q \mp d)}$, anche in tal caso sarà y razionale. Con tre principj si ridurrà l'equazione a questi due casi.

416. 1°. *Una potenza indeterminata* P^m *può eguagliarsi ad un'altra potenza o data* c^m *o indeterminata* x^m: poichè essendo P arbitrario, può farsi $P = c$, $P = x$, onde $P^m = c^m$, $P^m = x^m$.

417. 2°. *Una potenza* a^m *moltiplicata o divisa per una potenza* b^m, *dà sempre una potenza del grado* m: infatti supposto $a \times b = c$ ovvero $a : b = d$, sarà $a^m \times b^m = c^m$, $a^m : b^m = d^m$.

418. 3°. *La formula* $\sqrt{(Q \mp d)}$ *si rende sempre razionale sol che si faccia* $\sqrt{(Q \mp d)} = \frac{A^2 \mp a^2 d}{2Aa}$ ove d è un numero dato o da prendersi comunque. Infatti quadrando, si ha $Q \mp d = \left(\frac{A^2 \mp a^2 d}{2Aa}\right)^2$ e $Q = \left(\frac{A^2 \pm a^2 d}{2Aa}\right)^2$, come si voleva.

419. Applico questi principj al seguente problema. I miei scudi son tanti che aggiunto ad essi o tolto 1, fanno un quadrato: quanti sono? Sieno x; e si avrà $x + 1 = y^2$, $x - 1 = z^2$. Parrà che x possa trovarsi in più modi: 1°. sommando le due equazioni, il che dà $x = \frac{y^2 + z^2}{2}$; 2°. moltiplicandole, il che dà $x^2 - 1 = y^2 z^2 = Q$ (417), $x^2 = Q + 1$, ed $x = \frac{A^2 + a^2}{2Aa}$ (418); 3°. dividendole, il che dà $\frac{x+1}{x-1} = \frac{y^2}{z^2} = Q$ (417), ed $x = \frac{Q+1}{Q-1}$. Ma la relazione indeterminata dei due quadrati y^2, z^2, o non dà i valori di x o gli dà uniti coi falsi. Convien dunque determinare y^2, z^2 sottraendo l'equazioni, il che darà $2 = y^2 - z^2$ onde $z^2 + 2 = y^2 = Q$, e perciò $z^2 = Q - 2$ e $z = \frac{A^2 - 2a^2}{2Aa}$ (418), e quindi $x = z^2 + 1 = \frac{A^2}{4a^2} + \frac{a^2}{A^2}$. Così debbon trattarsi tali problemi.

420. Posto ciò, abbiasi 1°. $y = \sqrt{cx}$; dunque $cx = Q$ ed $x = \frac{Q}{c} = \frac{A^2}{a^2 c}$; fatto $Q = m^2 c^2$, si ha x intero: 2°. $y = \sqrt{(b + cx)}$; dunque $b + cx = Q$ ed $x = \frac{Q - b}{c} = \frac{A^2 - a^2 b}{a^2 c}$; x intero si ha nei casi di sopra (415): 3°. $y = \sqrt{(cx + lx^2)}$; dunque $cx + lx^2 = Q = \frac{cx + lx^2}{x^2}$ (417) $= \frac{c}{x} + l$, ed $x = \frac{c}{Q - l} = \frac{a^2 c}{A^2 - a^2 l}$; risoluta l'equazione $A^2 - a^2 l = 1$, come s'insegnerà, viene x intero: 4°. $y = \sqrt{lx^2}$; dunque $lx^2 = Q$

ed $\frac{x}{\sqrt{Q}}=\frac{1}{\sqrt{l}}$, cioè se $\sqrt{l}$ si riduca al rotto decimale $\frac{A}{B}$ onde $\frac{x}{\sqrt{Q}}=\frac{1}{\sqrt{l}}=\frac{B}{A}$, e cercati al solito i quozienti p e gli altri periodici q, r ec. (56.59), si formino le consuete equazioni $M^{\circ}=0$, $N^{\circ}=1$ ec. (58), e si prenda per x una delle varie M e per $\sqrt{Q}$ la corrispondente N, si avranno per $Q-lx^2$ dei valori positivi e negativi attesa la natura dei rotti $\frac{M^{\circ}}{N^{\circ}}$, $\frac{M'}{N'}$, ec. (58. II), valori che saranno anche periodici per la proprietà del rotto $\frac{1}{\sqrt{l}}$ (59). Ecco questi valori calcolati fino al ritorno di 1, nella seconda colonna della seguente *Tavola per tutti i numeri* $\sqrt{l}$ *non quadrati fino a* 101, sottinteso alternativamente a ciascun valore il segno + e —; la prima colonna poi mostra i quozienti q, r ec. (poichè p è in principio) per formar l' equazioni $M^{\circ}=0$, $N^{\circ}=1$, $M'=1$, $N'=p$ ec. (58). Di quì risulta 1°. che i valori di $Q-lx^2$ non sono mai zero, onde per $Q-lx^2=0$ può solo aversi un'approssimazione: 2°. che se $Q-lx^2=k$ e sia k tra quei valori o vi si possa ridurre, le M, N corrispondenti a k daranno per x, $\sqrt{Q}$ dei valori esatti.

Radice	p	Prima colonna (quozienti)	Seconda colonna (valori)
$\sqrt{2}$	$p=1$	2, 2	1, 1
$\sqrt{3}$	$p=1$	1, 2, 1	1, 2, 1
$\sqrt{5}$	$p=2$	4, 4	1, 1
$\sqrt{6}$	$p=2$	2, 4, 2	1, 2, 1
$\sqrt{7}$	$p=2$	1, 1, 1, 4, 1	1, 3, 2, 3, 1
$\sqrt{8}$	$p=2$	1, 4, 1	1, 4, 1
$\sqrt{10}$	$p=3$	6, 6	1, 1
$\sqrt{11}$	$p=3$	3, 6, 3	1, 2, 1
$\sqrt{12}$	$p=3$	2, 6, 2	1, 3, 1
$\sqrt{13}$	$p=3$	1, 1, 1, 1, 6, 1	1, 4, 3, 3, 4, 1
$\sqrt{14}$	$p=3$	1, 2, 1, 6, 1	1, 5, 2, 5, 1
$\sqrt{15}$	$p=3$	1, 6, 1	1, 6, 1
$\sqrt{17}$	$p=4$	8, 8	1, 1
$\sqrt{18}$	$p=4$	4, 8, 4	1, 2, 1
$\sqrt{19}$	$p=4$	2, 1, 3, 1, 2, 8, 2	1, 3, 5, 2, 5, 3, 1
$\sqrt{20}$	$p=4$	2, 8, 2	1, 4, 1
$\sqrt{21}$	$p=4$	1, 1, 2, 1, 1, 8, 1	1, 5, 4, 3, 4, 5, 1
$\sqrt{22}$	$p=4$	1, 2, 4, 2, 1, 8, 1	1, 6, 3, 2, 3, 6, 1
$\sqrt{23}$	$p=4$	1, 3, 1, 8, 1	1, 7, 2, 7, 1
$\sqrt{24}$	$p=4$	1, 8, 1	1, 8, 1
$\sqrt{26}$	$p=5$	10, 10	1, 1
$\sqrt{27}$	$p=5$	5, 10, 5	1, 2, 1
$\sqrt{28}$	$p=5$	3, 2, 3, 10, 3	1, 3, 4, 3, 1
$\sqrt{29}$	$p=5$	2, 1, 1, 2, 10, 2	1, 4, 5, 5, 4, 1
$\sqrt{30}$	$p=5$	2, 10, 2	1, 5, 1
$\sqrt{31}$	$p=5$	1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1	1, 6, 5, 3, 2, 3, 5, 6, 1
$\sqrt{32}$	$p=5$	1, 1, 1, 10, 1	1, 7, 4, 7, 1
$\sqrt{33}$	$p=5$	1, 2, 1, 10, 1	1, 8, 3, 8, 1
$\sqrt{34}$	$p=5$	1, 4, 1, 10, 1	1, 9, 2, 9, 1
$\sqrt{35}$	$p=5$	1, 10, 1	1, 10, 1
$\sqrt{37}$	$p=6$	12, 12	1, 1
$\sqrt{38}$	$p=6$	6, 12, 6	1, 2, 1
$\sqrt{39}$	$p=6$	4, 12, 4	1, 3, 1
$\sqrt{40}$	$p=6$	3, 12, 3	1, 4, 1
$\sqrt{41}$	$p=6$	2, 2, 12, 2	1, 5, 5, 1
$\sqrt{42}$	$p=6$	2, 12, 2	1, 6, 1
$\sqrt{43}$	$p=6$	1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12, 1	1, 7, 6, 3, 9, 2, 9, 3, 6, 7, 1

$\sqrt{44}$ $p=6$

1	1
1	8
1	5
2	7
1	4
1	7
1	5
12	8
1	1

$\sqrt{45}$ $p=6$

1	1
2	9
2	4
2	5
1	4
12	9
1	1

$\sqrt{46}$ $p=6$

1	1
3	10
1	3
1	7
2	6
6	5
2	2
1	5
1	6
3	7
1	3
12	10
1	1

$\sqrt{47}$ $p=6$

1	1
5	11
1	2
12	11
1	1

$\sqrt{48}$ $p=6$

1	1
12	12
1	1

$\sqrt{50}$ $p=7$

14	1
14	1

$\sqrt{51}$ $p=7$

7	1
14	2
7	1

$\sqrt{52}$ $p=7$

4	1
1	3
2	9
1	4
4	9
14	3
4	1

$\sqrt{53}$ $p=7$

3	1
1	4
1	7
3	7
14	4
3	1

$\sqrt{54}$ $p=7$

2	1
1	5
6	9
1	2
2	9
14	5
2	1

$\sqrt{55}$ $p=7$

2	1
2	6
2	5
14	6
2	1

$\sqrt{56}$ $p=7$

2	1
14	7
2	1

$\sqrt{57}$ $p=7$

1	1
1	8
4	7
1	3
1	7
14	8
1	1

$\sqrt{58}$ $p=7$

1	1
1	9
1	6
1	7
1	7
1	6
14	9
1	1

$\sqrt{59}$ $p=7$

1	1
2	10
7	5
2	2
1	5
14	10
1	1

$\sqrt{60}$ $p=7$

1	1
2	11
1	4
14	11
1	1

$\sqrt{61}$ $p=7$

1	1
4	12
3	3
1	4
2	9
2	5
1	5
3	9
4	4
1	3
14	12
1	1

$\sqrt{62}$ $p=7$

1	1
6	13
1	2
14	13
1	1

$\sqrt{63}$ $p=7$

1	1
14	14
1	1

$\sqrt{65}$ $p=8$

16	1
16	1

$\sqrt{66}$ $p=8$

8	1
16	2
8	1

$\sqrt{67}$ $p=8$

5	1
2	3
1	6
1	7
7	9
1	2
1	9
2	7
5	6
16	3
5	1

$\sqrt{68}$ $p=8$

4	1
16	4
4	1

$\sqrt{69}$ $p=8$

3	1
3	5
1	4
4	11
1	3
3	11
3	4
16	5
3	1

$\sqrt{70}$ $p=8$

2	1
1	6
2	9
1	5
2	9
16	6
2	1

$\sqrt{71}$ $p=8$

2	1
2	7
1	5
7	11
1	2
2	11
2	5
16	7
2	1

$\sqrt{72}$ $p=8$

2	1
16	8
2	1

$\sqrt{73}$ $p=8$

1	1
1	9
5	8
5	3
1	3
1	8
16	9
1	1

$\sqrt{74}$ $p=8$

1	1
1	10
1	7
1	7
16	10
1	1

$\sqrt{75}$ $p=8$

1	1
1	11
1	6
16	11
1	1

$\sqrt{76}$ $p=8$

1	1
2	12
1	5
1	8
5	9
4	3
5	4
1	3
1	9
2	8
1	5
16	12
1	1

$\sqrt{77}$ $p=8$

1	1
3	13
2	4
3	7
1	4
16	13
1	1

$\sqrt{78}$ $p=8$

1	1
4	14
1	3
16	14
1	1

$\sqrt{79}$ $p=8$

1	1
7	15
1	2
16	15
1	1

$\sqrt{80}$ $p=8$

1	1
16	16
1	1

$\sqrt{82}$ $p=9$

18	1
18	1

$\sqrt{83}$ $p=9$

9	1
18	2
9	1

$\sqrt{84}$ $p=9$

6	1
18	3
6	1

$\sqrt{85}$ $p=9$

4	1
1	4
1	9
4	9
18	4
4	1

$\sqrt{86}$ $p=9$

3	1
1	5
1	10
1	7
8	11
1	2
1	11
1	7
3	10
18	5
3	1

$\sqrt{87}$ $p=9$

3	1
18	6
3	1

$\sqrt{88}$ $p=9$

2	1
1	7
1	9
1	8
2	9
18	7
2	1

$\sqrt{89}$ $p=9$

2	1
3	8
3	5
2	5
18	8
2	1

$\sqrt{90}$ $p=9$

2	1
18	9
2	1

$\sqrt{91}$ $p=9$

1	1
1	10
5	9
1	3
5	14
1	3
1	9
18	10
1	1

$\sqrt{92}$ $p=9$

1	1
1	11
2	8
4	7
2	4
1	7
1	8
18	11
1	1

$\sqrt{93}$ $p=9$

1	1
1	12
1	7
4	11
6	4
4	3
1	4
1	11
1	7
18	12
1	1

$\sqrt{94}$ $p=9$

1	1
2	13
3	6
1	5
1	9
5	10
1	3
8	15
1	2
5	15
1	3
1	10
3	9
2	5
1	6
18	13
1	1

$\sqrt{95}$ $p=9$

1	1
2	14
1	5
18	14
1	1

$\sqrt{96}$ $p=9$

1	1
3	15
1	4
18	15
1	1

$\sqrt{97}$ $p=9$

1	1
5	16
1	3
1	11
1	8
1	9
1	9
1	8
5	11
1	3
18	16
1	1

$\sqrt{98}$ $p=9$

1	1
8	17
1	2
18	17
1	1

$\sqrt{99}$ $p=9$

1	1
18	18
1	1

$\sqrt{101}$ $p=10$

20	1

Così se sia $l=13$, si avranno dalla Tavola le quattro serie d'equazioni poste quì di faccia.				
$p=3$	$M^{0}=0$	$N^{0}=1$		$+1$
$q=1$	$M'=1$	$N'=3$		-4
$r=1$	$M''=1$	$N''=4$	$Q-13x^2=$	$+3$
$s=1$	$M'''=2$	$N'''=7$		-3
$t=1$	$M^{iv}=3$	$N^{iv}=11$		$+4$
$u=6$	$M^{v}=5$	$N^{v}=18$		-1

421. Abbiasi ora $x=\sqrt{(h+cy+fy^2)}$; dunque $h+cy+fy^2=Q$, e 1°. se $h+c+f=m^2$, sarà $m^2+cy+fy^2=Q+f+c$; fatto $Q=m^2$ (416), si ha $y=1, =-\frac{c}{f}-1$: 2°. se cangiato segno a c, sia $h-c+f=m^2$, si avrà $m^2+cy+fy^2=Q+f-c$; fatto $Q=m^2$, viene $y=-1 = 1-\frac{c}{f}$.

422. Ma in generale, poichè $x=\sqrt{(h+cy+fy^2)}$ si riduce a $2fy+c=\sqrt{(c^2+4fx^2-4fh)}$, prendo $k=c^2-4fh$, $l=4f$ ed ho $k+lx^2=Q$: or da $2fy+c=\pm\sqrt{Q}$ si ha $y=\frac{\pm\sqrt{Q}-c}{2f}$, intero, se $\sqrt{Q}-c$ sia multiplo di $2f$.

423. Dunque 1°. se si presenti per x un valor che soddisfaccia all' equazione $k+lx^2=Q$, il problema sarà risoluto, e un valor di x ne dà per lo più molti altri, come vedremo.

424. 2°. Se $k+l=g^2$, sarà $g^2+lx^2=Q+l$; e $Q=g^2$ dà $x=1$.

425. 3°. Se $k=m^2$, sarà $\frac{m^2}{x^2}=Q-l$ ed $x=\frac{2Aam}{\pm A^2\mp a^2l}$: se A^2-a^2l è 1, 2 o un summultiplo di m, si ha x intero.

426. 4°. Se $l=m^2$, sarà $m^2x^2=Q-k$ ed $x=\frac{\pm A^2\mp a^2k}{2Aam}$: fatto $a=1$, viene $2Amx=A^2-k$, cioè $A^2-2Amx=A(A-2mx)=k=gf$ (g, f son due fattori interi di k, ambedue con $\pm$ se k è positivo, e l'uno con $\pm$, l'altro con $\mp$, se è negativo). Posto $A=g$, $A-2mx=g-2mx=f$, sarà $\frac{g-f}{2m}=x$, intero, se la differenza dei fattori è multipla di $2m$.

427. Se con $\pm k\mp lx^2=Q$ si abbia $kl=g^2$, verrà $x^2=\frac{k\mp Q}{l}=kl\mp lQ$ (417) $=g^2\mp lQ$, onde (425) $\sqrt{Q}=\frac{2Aag}{\pm A^2\mp a^2l}$, ed $x=\frac{\sqrt{(kl\mp lQ)}}{l}=\frac{g(A^2\mp a^2l)}{l(A^2\pm a^2l)}$.

428. 6°. Se con $k\pm lx^2=Q$ si abbia $k=h^2\mp lg^2$, fatto $Q=h^2$, viene $x=g$.

429. 7°. Se $k=m^2+n^2$ ed $l=-f^2$, o $l=m^2+n^2$ e $k=-f^2$, sarà nel primo caso $m^2+n^2-f^2x^2=Q$; e $Q=m^2, =n^2$ dà $x=\frac{n}{f}, =\frac{m}{f}$; nel seconde, $-f^2+(m^2+n^2)x^2$

$= Q$; e $Q = m^2x^2, = n^2x^2$ dà $x = \frac{f}{n}, = \frac{f}{m}$.

430. 8°. Se con $k \pm lx^2 = Q$ sia $k = m^2 \mp lQ' + l(f+h+g$ ec.) ove Q' è un quadrato indeterminato, da $Q = m^2$ si ha $x = \frac{A^2 - a^2(f+h+g \text{ ec.})}{2Aa}$.

431. 9°. Se $k + lx^2 = Q$ possa sciogliersi in due fattori razionali, onde $k + lx^2 = (gx+f)(ix+h) = Q = \frac{(gx+f)(ix+h)}{(ix+h)^2} = \frac{gx+f}{ix+h}$, verrà $x = \frac{a^2f - A^2h}{A^2i - a^2g}$.

432. 10°. Se $k + lx^2 = Q$ possa sciogliersi in un quadrato $(rx+s)^2$ e in due fattori razionali $(gx+f)(ix+h)$, fatto $(rx+s)^2 = Q$, sarà $x = -\frac{f}{g}, = \frac{-h}{i}$.

433. Se l sia negativa, come $k - ly^2 = z^2$, divido l'equazione per y^2, la moltiplico per k, e fatto $\frac{z}{y} = x, \frac{k}{y} = \sqrt{Q}$, ella diviene $kl + kx^2 = Q$ che si scioglie col seguente

434. Metodo generale per aver x intero o rotto (se sia possibile) nell'equazione $k + lx^2 = Q$, ove l è numero non quadrato e positivo. Osservo prima di tutto che $\frac{Q - lx^2}{k} = 1$ esige che il primo membro sia un intero. Supposti pertanto x, $\sqrt{Q}$ primi tra loro, ed x primo a k, farò $\pm\sqrt{Q} = nx - kx'$ (n ed x' sono indeterminate), e riguardando $x, k, \sqrt{Q}$ come note, si sa (406) che quest' equazione può sempre risolversi in numeri interi. Verrà dunque $\frac{Q - lx^2}{k} = \ldots \frac{(nx - kx')^2 - lx^2}{k} = \frac{(n^2 - l)x^2 - 2knxx' + k^2x'^2}{k}$, numero intero se lo sia $\frac{n^2 - l}{k}$ (415). Ciò premesso:

435. 1°. Calcolo i valori di $Q - lx^2$ (420), e se tra questi sia k col suo segno, il problema è sciolto, presi per $\sqrt{Q}$, x i valori di N, M corrispondenti a k: ma se k, benchè minore del valor massimo di $Q - lx^2$, non vi è, il problema è impossibile (420): 2°. se k è maggiore del massimo valor di $Q - lx^2$, cercati tutti i numeri $k' < \frac{k}{4} + 1$ (415) tali che sia $kk' + l = n^2$ (se non ne trovo, il problema è parimente impossibile (434)), pongo $\pm\sqrt{Q} = nx - kx'$, e sostituito nella data questo valore e quello di $n^2 - l = kk'$, ottengo $1 = k'x^2 - 2nxx' + kx'^2$: 3°. moltiplico questa per k', e fatto $\sqrt{Q'} = k'x - nx'$, trovo $k' + lx'^2 = Q'$, simile alla

data, e che tratto precisamente come quella, finchè k', k'' ec. sia tra i valori di $Q - lx^2$. Ecco di faccia l' equazioni necessarie all' intento, delle quali si vede la legge; e solo avverto che se k, k', k'' ec. sieno un multiplo di uno o più quadrati, per esempio, se $k = a^2 g$, $k = a^2 b^2 f$ ec., dovranno esaminarsi oltre l' equazione $k + lx^2 = Q$, anche l' altre $g + ly^2 = Q$, $f + lz^2 = Q$ ec., moltiplicando poi per a i trovati valori di y, Q, e per b quelli di z, Q.

$$
\begin{array}{lllll}
 & k & + lx^2 & = Q & \\
\hline
 & kk' + l & & = n^2 & \\
\text{I.} & \pm\sqrt{Q} & = nx & - kx' & \\
\text{II.} & \pm\sqrt{Q'} & = k'x & - nx' & \\
 & k' & + lx'^2 & = Q' & \\
\hline
 & k'k'' + l & & = n'^2 & \\
\text{III.} & \pm\sqrt{Q'} & = n'x' & - k'x'' & \\
\text{IV.} & \pm\sqrt{Q''} & = k''x' & - n'x'' & \\
 & k'' & + lx''^2 & = Q'' & \\
\hline
 & & \text{ec.} & \text{ec.} &
\end{array}
$$

436. Esempio. Sia $101 + 13x^2 = Q$, ove $k = 101$, $l = 13$. Calcolo $Q - 13x^2$ (420) dei cui valori è più grande $k = 101$.

Cerco $k' < \frac{101}{4} + 1$ tale che sia $101k' + 13 = n^2$, e trovato $k' = 12$, onde $n = 35$, pongo I. $\pm\sqrt{Q'} = k'x - nx' = 12x - 35x'$, d' onde l' equazione $12 + 13x'^2 = Q'$, simile alla data, ove $k' = 12$ supera sempre i valori di $Q - 13x^2$. Cerco dunque $k'' < \frac{k'}{4} + 1$ per aver $12k'' + 13 = n'^2$, e trovo $k'' = -1$, $= 1$, $= 3$, onde $n' = 1$, $= 5$, $= 7$, ed osservo pure che $12 = 2^2 . 3$, onde debbo esaminare anche l' equazione $3 + 13x'^2 = Q'$. Il primo valor di $k'' = -1$ dà II. $\pm\sqrt{Q'} = n'x' - k'x'' = x' - 12x''$, e quindi III. $\pm\sqrt{Q''} = k''x' - n'x'' = -x' - x''$, d' onde l' equazione $k'' + lx''^2 = -1 + 13x''^2 = Q''$, simile alla data, ove $k'' = -1$ essendo tra i valori di $Q - 13x^2$, dal suo corrispondente in M^v, N^v ricavo $x'' = 5$, $\pm\sqrt{Q''} = 18$: da questi che pongo nella III., ho $x' = 13$, $= -23$; onde la II. dà $\pm\sqrt{Q'} = -47$, $= -83$, e quindi dalla I. ottengo $x = 34$, $= -74$, ambedue interi. Gli altri valori di k'' e l' equazione $3 + 13x'^2 = Q'$, danno per x dei rotti.

437. Se $k = 1$, poichè 1 è sempre tra i valori di $Q - lx^2$ (420), la formula $1 + lx^2 = Q$ sarà sempre risolubile in interi: chiamati t, u i più piccoli, si avrà per tutti gli altri $x = \ldots$

$$\frac{(u + t\sqrt{l})^m - (u - t\sqrt{l})^m}{2\sqrt{l}}, \text{ e } \sqrt{Q} = \frac{(u + t\sqrt{l})^m + (u - t\sqrt{l})^m}{2},$$

ove m è un intero qualunque.

438. Coi valori $x^2 = \frac{a^2}{c^2}$, $Q = \frac{f^2}{c^2}$, sarà $k = \frac{f^2 - a^2 l}{c^2}$, che posto in $k + lx^2$, dà $\frac{f^2}{c^2} + l\left(x^2 - \frac{a^2}{c^2}\right) = Q = \left(\frac{f}{c} + \frac{u}{t}\left(x - \frac{a}{c}\right)\right)^2$, supposte u, t indeterminate: quindi $x = \ldots$

$\frac{au^2 - 2ftu + alt^2}{c(u^2 - lt^2)}$, e presi t, u interi, si avrà x rotto.

439. Ma se x si voglia intero, si farà $c = 1$ ed $u^2 - lt^2 = 1$, con che si avranno i valori diversi di t, u (437), da cui verrà l' intero $x = a(u^2 + lt^2) - 2ftu$.

440. Sia ora $y = \sqrt{(b + cx + dx^2 + ex^3)}$; dunque $b + cx + dx^2 + ex^3 = Q$, ciò che si ottiene in due casi: I°. se $b = m^2$, si ha $m^2 + cx = Q - dx^2 - ex^3$, ovvero (142) $(m + \frac{cx}{2m})^2 = Q + \frac{c^2x^2}{4m^2} - dx^2 - ex^3$; ora $\frac{c}{2m} = g$, $Q = (m + gx)^2$ dà $x = \frac{g^2 - d}{e}$.

441. Si ha ancora $m^2 + cx + dx^2 = Q - ex^3$, ovvero (142) $\left(m + \frac{cx}{2m} + \frac{dx^2}{2m}\right)^2 = Q + \frac{c^2x^2}{4m^2} + \frac{cdx^3}{2m^2} + \frac{d^2x^4}{4m^2} - ex^3$, ed eliminato $\frac{c^2x^2}{4m^2}$ (142), e fatto $\frac{c}{2m} = g$, $\frac{d - g^2}{2m} = h$, $Q = (m + gx + hx^2)^2$, viene $x = \frac{e - 2gh}{h^2}$.

442. II°. Se $b + cx + dx^2 + ex^3$ abbia due radici eguali che si otterranno al solito (379), sarà $b + cx + dx^2 + ex^3 = (px + q)^2 (gx + f) = Q$, onde $gx + f = Q$ (417) ed $x = \frac{Q - f}{g} = \frac{A^2 - a^2 f}{a^2 g}$.

443. Se la formula sia $dx^2 + ex^3 = Q = d + ex$ (417), sarà $x = \frac{Q - d}{e} = \frac{A^2 - a^2 d}{a^2 e}$. Se sia $ex^3 = Q = ex$, sarà $x = \frac{Q}{e} = \frac{A^2}{a^2 e}$.

444. Sia infine $y = \sqrt{(b + cx + dx^2 + ex^3 + fx^4)}$; dunque $b + cx + dx^2 + ex^3 + fx^4 = Q$, ciò che si ottiene in tre casi: I°. se $b = m^2$, sarà $m^2 + cx + dx^2 = Q - ex^3 - fx^4$, e compito il quadrato, eliminato $\frac{c^2x^2}{4m^2}$, e fatti $\frac{c}{2m} = g$, $\frac{d - g^2}{2m} = h$, $Q = (m + gx + hx^2)^2$, si ha $x = \frac{e - 2gh}{h^2 - f}$.

445. II°. Se $f = m^2$, sarà $m^2x^4 + ex^3 + dx^2 = Q - cx - b$, e compito il quadrato, eliminato $\frac{e^2x^2}{4m^2}$, e fatti $\frac{e}{2m} = g$, $\frac{d - g^2}{2m} = h$, $Q = (mx^2 + gx + h)^2$, si ha $x = \frac{h^2 - b}{c - 2gh}$.

446. III°. Se $b = m^2$, $f = n^2$, sarà $m^2 + cx + n^2x^4 = Q - dx^2 - ex^3$, e compito il quadrato e fatto $\frac{c}{2m} = g$, $Q = (m + gx + nx^2)^2$, si ha $x = \frac{d \mp 2mn - g^2}{\pm 2gn - e}$ (il segno $\pm$ e $\mp$ è perchè m^2, n^2 sono nell' equazione senza m, n).

447. Si ha ancora $n^2x^4 + ex^3 + m^2 = Q - dx^2 - cx$, e com-

pito il quadrato e fatto $\frac{e}{2n}=g$, $Q=(nx^2+gx+m)^2$, sarà $x=$
$\frac{c\mp 2gm}{g^2\pm 2mn-d}$.

448. Si osservi 1°. che l'equazione $b+ex^3+fx^4=Q$ si risolve nel caso di $f=m^2$ compiendo il quadrato $ex^3+m^2x^4$ ed eliminandone $\frac{e^2x^2}{4m^2}$: allora $x=\frac{1}{8e^3m^2}(e^4-64bm^6)$, e se $b=m^2$, fatto $Q=m^2$, viene $x=-\frac{e}{f}$.

449. 2°. Che se nell'equazione $cx+ex^3+fx^4=Q$ sia $f=m^2$, si ha (417) $m^2x^2+ex=Q-\frac{c}{x}$, e compito il quadrato e fatto $\frac{e}{2m}=g$, $Q=(mx+g)^2$, sarà $x=\frac{c}{g^2}$; e se $c=m^2$, $f=n^2$, fatto $x=z^2$, verrà $m^2+ez^4+n^2z^6=Q$ cioè $n^2z^6+ez^4=Q-m^2$, e compito il quadrato, e preso $\frac{e}{2n}=g$, $Q=(nz^3+gz)^2$, si ha $z^2=x=\frac{m^2}{g^2}$.

450. 3°. Che se nell'equazione $cx+dx^2+fx^4=Q$ sia $f=m^2$, fatto $m^2x^4=Q$, sarà $x=\frac{-c}{d}$; e se $c=m^2$, $f=n^2$, fatto $x=z^2$, verrà $m^2+dz^2=Q-n^2z^6$, e compito il quadrato e preso $\frac{d}{2m}=g$, $Q=(m+gz^2)^2$, si ha $z^2=x=\frac{g^2}{n^2}$.

451. Ma se $b+cx+dx^2+ex^3+fx^4=Q$ divenga $ex^3+fx^4=Q=\frac{e}{x}+f$, sarà $x=\frac{e}{Q-f}=\frac{a^2e}{A^2-a^2f}$; e se divenga $dx^2+fx^4=Q=d+fx^2$, si risolve come sopra (423).

452. Trovato un valor di $x=h$, sarà $b+cx+dx^2+ex^3+fx^4=b+ch+dh^2+eh^3+fh^4=Q=m^2$. Pongo $x=z+h$, e sostituendo viene

$$\begin{array}{rcrrrrr}
b & = & & & & & +b \\
+cx & = & & & & +cz & +ch \\
+dx^2 & = & & & +dz^2 & +2dhz & +dh^2 \\
+ex^3 & = & & +ez^3 & +3ehz^2 & +3eh^2z & +eh^3 \\
+fx^4 & = & fz^4 & +4fhz^3 & +6fh^2z^2 & +4fh^3z & +fh^4 \\
\hline
\text{cioè } & & fz^4 & +4fhz^3 & +6fh^2z^2 & +4fh^3z & +m^2=Q \\
& & & +e & +3eh & +3eh^2 & \\
& & & & +d & +2dh & \\
& & & & & +c &
\end{array}$$

formula, che avendo $+m^2$ per ultimo termine, si risolve con le regole date, e il valor di z dà un nuovo valor di x.

Problemi indeterminati del terzo grado.

453. Sia in terzo luogo $m = 3$; sarà $y = \sqrt[3]{(b + cx + dx^2 + fx^3)}$; e perchè y sia razionale, bisognerà far $b + cx + dx^2 + fx^3 = C$ (intendo per C un *numero cubo*), e ciò si ottiene in tre casi:

454. I°. Se $b = m^3$, sarà $m^3 + cx = C - dx^2 - fx^3$, ovvero (144) $(m + \frac{cx}{3m^2})^3 = C - dx^2 - fx^3 + \frac{c^2x^2}{3m^3} + \frac{c^3x^3}{27m^6}$, e fatto $\frac{c}{3m^2} = g$, $C = (m + gx)^3$, si ha $x = \frac{d - 3g^2m}{g^3 - f}$.

455. II°. Se $f = m^3$, sarà $m^3x^3 + dx^2 = C - cx - b$, ovvero (144) $(mx + \frac{d}{3m^2})^3 = C - cx - b + \frac{d^2x}{3m^3} + \frac{d^3}{27m^6}$, e fatto $\frac{d}{3m^2} = g$, $C = (mx + g)^3$, si ha $x = \frac{b - g^3}{3g^2m - c}$.

456. III°. Se $b = m^3, f = n^3$, sarà $m^3 + n^3x^3 = C - cx - dx^2$, ovvero (144) $(m + nx)^3 = C + 3m^2nx + 3mn^2x^2 - cx - dx^2$, e fatto $C = (m + nx)^3$, si ha $x = \frac{c - 3m^2n}{3mn^2 - d}$.

457. Si osservi 1°. che se nella formula $b + cx + fx^3$ sia $f = m^3$, fatto $m^3x^3 = C$, sarà anche $x = \frac{-b}{c}$.

458. 2°. Che se nella formula $b + cx + dx^2 = C$ si contenga un quadrato, onde sia per esempio $b + cx + dx^2 = g(p + qx)^2 = C$, si avrà (417) $\frac{g(p + qx)^2}{(p + qx)^3} = \frac{g}{p + qx} = C$ ed $x = \frac{g - pC}{qC} = \frac{a^3g - A^3p}{A^3q}$.

459. 3°. Che se nella formula $b + dx^2 + fx^3 = C$ sia $b = m^3$, fatto $m^3 = C$, sarà anche $x = \frac{-d}{f}$.

460. Ma se la formula $b + cx + dx^2 + fx^3 = C$ divenga $dx^2 + fx^3 = C = \frac{d}{x} + f$ (417), sarà $x = \frac{d}{C - f} = \frac{a^3d}{A^3 - a^3f}$. Se divenga $b + cx = C$, sarà $x = \frac{C - b}{c} = \frac{A^3 - a^3b}{a^3c}$. Se divenga $dx^2 = C = \frac{d}{x}$, sarà $x = \frac{d}{C} = \frac{a^3d}{A^3}$. Se divenga $cx = C$, sarà $x = \frac{C}{c} = \frac{A^3}{a^3c}$. Del resto un valor di x, ne dà per lo più molti altri (452).

Problemi indeterminati di tutti i gradi a una o due incognite.

461. La formula $y = \sqrt[m]{bx^{m \pm 1}}$ di grado pari o impari, si risolve: poichè $bx^{m \pm 1} = P^m = bx^{\pm 1}$ (417), onde $x = P^{\pm m} b^{\mp 1}$.

462. E si osservi che se $m \pm 1$ è numero impari, sarà m numero pari, onde se voglia cangiarsi $bx^{m \pm 1}$ in quadrato, sarà $P^m = P^2$, $x = P^{\pm 2} b^{\mp 1}$ e $bx^{m \pm 1} = P^{\pm 2m + 2} b^{\mp m}$.

463. La formula $y = \sqrt[m]{(bx^m + z^n x^{m \pm 1})}$ di grado pari o impari, si risolve: poichè $bx^m + z^n x^{m \pm 1} = P^m \mp b + z^n x^{\pm 1}$ ed $x = z^{\mp n} (P^m - b)^{\pm 1}$.

464. La formula $y = \sqrt[m]{(b^m + dx^m + cx^{m \pm 1})}$ di grado pari o impari, si risolve: poichè $b^m + dx^m + cx^{m \pm 1} = P^m$, e fatto $P^m = b^m$, viene $x = -d^{\pm 1} c^{\mp 1}$.

465. La formula generale $b + cx + dx^2 + \ldots\ldots + \omega x^m$ può divenire una potenza perfetta in più casi: 1°. se ella stessa sia una potenza del grado m, potrà cangiarsi in una potenza del grado n: infatti se $b + cx + \ldots\ldots + \omega x^m = (hx + f)^m$, posto $(hx + f)^n = P^n$, sarà $hx + f = \sqrt[m]{P^n}$ ed $x = \frac{\sqrt[m]{P^n} - f}{h}$;

preso dunque $P = \frac{A^m}{a^m}$, sarà $x = \frac{\sqrt[m]{\frac{A^{mn}}{a^{mn}}} - f}{h} = \frac{A^n - a^n f}{a^n h}$.

466. 2°. Se la data formula sia il prodotto di due potenze del grade μ, $m - \mu$, potrà cangiarsi in altre simili, ed in tali e tante inferiori, quali e quanti sono i fattori dei numeri μ, $m - \mu$: poichè sarà $b + cx + \ldots\ldots + \omega x^m = (hx + f)^\mu (gx + k)^{m - \mu} = P^\mu = (gx + k)^{m - \mu}$ (417), che si tratta come il primo caso, ec. E se sia $\mu = qr$, intendendo per q, r due fattori di μ, si avrà $(hx + f)^{qr} (gx + k)^{m - \mu} = P^q = (gx + k)^{m - \mu}$ (417), che pur si tratta come il primo caso, ec. Si osservi che se $m - \mu = 1$, la formula potrà cangiarsi in potenze dei gradi m, $m - 1$, e nell'altre espresse dai fattori di m, $m - 1$: poichè se $b + cx + \ldots\ldots + \omega x^m = (hx + f)^{m-1} (gx + k) = P^m = \frac{gx + k}{hx + f}$ (417), sarà $x = \frac{fP^m - k}{g - hP^m} = \frac{A^m f - a^m k}{a^m g - A^m h}$ ec.

467. 3°. Se la data formula sia la somma o la differenza di una potenza del grado μ e di un prodotto qualunque di fattori razionali, potrà cangiarsi in quella potenza; poichè se $b + cx + \ldots\ldots + \omega x^m = (hx + f)^\mu \pm (gx + k)(rx + s)$ ec. $= P^\mu$, fatto $(hx + f)^\mu = P^\mu$, sarà $x = \frac{-k}{g}$, $x = \frac{-s}{r}$ ec.

468. 4°. Se nella formula data sia $b + c + \ldots\ldots + \omega = m^r$, ella potrà cangiarsi in una potenza del grado r; infatti da $m^r + cx + \ldots\ldots + \omega x^m = P^r + c + \ldots\ldots + \omega$, posto $m^r = P^r$, viene $\frac{cx \ldots\ldots + \omega x^m}{c \ldots\ldots + \omega} = 1$, equazione a cui evidentemente soddisfà $x = 1$.

469. 5°. Se tentando si trovi un valor di x che soddisfaccia.

470. La formula $z = \sqrt[2m]{(b^2x^2 + dy^2)}$ di grado pari, si risolve in numeri interi. Infatti sarà $b^2x^2 + dy^2 = P^{2m}$, onde $P^{2m} - dy^2 = b^2x^2 = Q$, e $\frac{P^{2m}}{y^2} = Q + d$ (417); dunque $\frac{P^m}{y} =$

$$\frac{A^2b + a^2bd}{2bAa} \text{ ed } y = \frac{2AnbP^m}{A^2b + a^2bd} = \frac{AabP^m}{\frac{1}{2}(A^2b + a^2bd)} = \ldots\ldots$$

$$\frac{2AbP^m}{\frac{A^2b}{a} + abd} = \frac{AbP^m}{\frac{1}{2}(\frac{A^2b}{a} + abd)} = \frac{2abP^m}{Ab + \frac{a^2bd}{A}} = \frac{abP^m}{\frac{1}{2}(Ab + \frac{a^2bd}{A})} =$$

$$\frac{2bP^m}{\frac{Ab}{a} + \frac{abd}{A}} = \frac{bP^m}{\frac{1}{2}(\frac{Ab}{a} + \frac{abd}{A})}.$$

471. Eguagliando P agli otto diversi denominatori, si hanno otto formule, e per applicarle ai casi particolari, si prendono l' arbitrarie A, a in modo che risultino per x, y dei numeri interi, il che sempre può farsi. Ecco le prime due: $y = 2Aab(A^2b + a^2bd)^{m-1}$, $x = (A^2 - a^2d)(A^2b + a^2bd)^{m-1}$.

472. Si noti che se le formule prima d' esser ridotte abbiano un fattor comune n, onde sia $x = \frac{nkP^m}{nf}$, $y = \frac{ngP^m}{nf}$, si dovranno divider per esso e poi ridurle. E se $A^2b + a^2bd$ ovvero $\frac{1}{2}(A^2b + a^2bd)$ ovvero $\frac{A^2b}{a} + abd$ ec. sia potenza m^{sima}, si farà non più P ma $P^m = A^2b + a^2bd$, $= \frac{1}{2}(A^2b + a^2bd)$ ec.

473. La formula $z = \sqrt[2m+1]{(bx^2 + dy^2)}$ di grado impari, si risolve in numeri interi. Infatti sarà $bx^2 + dy^2 = P^{2m+1}$, ed $x^2 = \frac{P^{2m+1} - dy^2}{b} = Q = bP^{2m+1} - bdy^2$ (417), ovvero $y^2 =$

$\frac{P^{2m+1}-bx^2}{d} = Q = dP^{2m+1} - bdx^2$: ma $bP^{2m+1} = \frac{P^{4m+2}}{b^{2m}}$ e $dP^{2m+1} = \frac{P^{4m+2}}{d^{2m}}$ (462); dunque sostituendo ed estraendo la radice, si troverà $y = \frac{2AaP^{2m+1}}{b^m(A^2+a^2bd)} = \frac{AaP^{2m+1}}{\frac{1}{2}b^m(A^2+a^2bd)}$ ec. come sopra (470), ovvero $x = \frac{2AaP^{2m+1}}{d^m(A^2+a^2bd)} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{AaP^{2m+1}}{\frac{1}{2}d^m(A^2+a^2bd)}$ ec. come sopra (470).

474. Eguagliando P come sopra (470) ai sedici diversi denominatori, si hanno sedici formule: altre sedici se ne hanno osservando che i due fattori b, d di a^2bd posson distribuirsi tra i due quadrati A^2, a^2. Poichè se sia $A^2 + a^2bd = 2p$, $A^2 - a^2bd = 2q$, quadrando, sottraendo ed estraendo la radice, verrà $Aa = \sqrt{\frac{p^2-q^2}{bd}} = \sqrt{\frac{p+q}{b}\cdot\frac{p-q}{d}}$, onde se $\frac{p+q}{b} = A'^2$, $\frac{p-q}{d} = a'^2$, sommando e sottraendo si avrà $2p\,(=A^2+a^2bd) = bA'^2 + da'^2$, $2q\,(=A^2-a^2bd) = bA'^2 - da'^2$ e $2Aa = 2A'a'$. Ecco le prime due formule: $y = 2Aab^{m-1}(A^2+a^2bd)^{2m}$, $x = b^m(A^2-a^2bd)(A^2+a^2bd)^{2m}$.

475. Anche in tutte queste formule hanno luogo le riduzioni di sopra (472).

476. Termineremo l'Algebra con alcuni Quesiti che attesa la loro varia natura dovranno sciogliersi dai Principianti parte nel primo e parte nel secondo anno dello studio.

I. Come dimostrerete che il comun divisore trovato con la data regola (56) è *massimo?*

II. Dimostrar le regole date ai numeri 78, 79, 83.

III. Uno mi dice: la metà de' miei scudi col loro terzo e quarto gli supera d'uno. Quanti scudi ho? *Risultato*. 12.

IV. L'età a di uno è m^{pla} di quella di suo figlio; tra quanti anni sarà n^{pla}? *Ris.* Tra anni $\frac{a(m-n)}{m(n-1)}$.

V. Dando 3 soldi per uno a dei poveri, mi mancano 9 soldi; ma dandone 2 me ne avanzan 2. Quanti sono i soldi ed i poveri? *Ris.* I soldi son 24 e i poveri 11.

VI. Uno avea 6^l quando tirò il salario di 5 mesi: 2 mesi dopo avea già spesi $\frac{3}{4}$ del suo denaro; ma riscosso il salario, si trovò con 99^l. Quanto avea il mese? *Ris.* 30^l.

VII. Uno lascia ai nipoti 120000^l, cioè 12000^l a ciascun maschio, e 9000 a ciascuna femmina. Se avesse lasciate 9000^l ai maschi e 12000 alle femmine, sarebbero avanzate 9000^l.

Quanti sono gli uni e l'altre? *Ris.* 7 maschi e 4 femmine.

VIII. C Cacciatore promette a B una somma b per ogni scarica in vano, e B promette a C una somma a per ogni scarica in pieno. Dopo un numero n di scariche o C, B nulla si debbono, o C deve a B una quantità d, o B la deve a C. Trovare in generale le scariche x a vuoto. *Ris.* $x = \frac{an \pm d}{a + b}$.

IX. Diviso un numero in m ed in $m+1$ parti eguali, il prodotto dell' une eguaglia quello dell' altre: qual è questo numero? *Ris.* Sia x, e si avrà $x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

X. A raddoppia coi suoi i denari di B e di C, quindi B raddoppia quelli di A e di C, e poi C raddoppia quelli di A e di B, cosicchè in fine ciascuno ha 16^l. Quante ne aveano in principio? *Ris.* Le chiamo x, y, z e trovo $z = 8$, e di quì si ha x, y.

XI. Con a carte si fanno b monti d'egual numero c di punti, e la prima carta di ciascun monte val 10 se è figura, 11 se è asso, 12 se è due ec., ma l'altre carte del monte vaglion ciascuna un sol punto. Fatti i monti e rese le carte d avanzate, se ne avanzano, si chiede quanti punti x facciano le prime carte di tutti i monti. *Ris.* $x = d + b(c+1) - a$.

XII. I crediti di 7 persone sommati a 6 a 6 sono 994, 1036, 840, 910, 896, 952, 882. Qual credito ha ciascuna? *Ris.* Il credito d'una $z = 91$, e di quì gli altri.

XIII. Quali sono i numeri x, y la cui somma è a, e quella dei lor cubi è b? *Ris.* $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)}$, e di quì x.

XIV. Qual è il numero x le cui potenze $m, m+2$ prese l'una p e l'altra g volte, si eguagliano? *Ris.* $x = \sqrt{\frac{p}{g}}$.

XV. Son 20 tra uomini e donne in una Locanda, e gli uni e l'altre spendono 24^l; ma ogn' uomo spende 1^l più d'ogni donna. Quanti sono gli uni e l'altre? *Ris.* Gli uomini sono 8.

XVI. Dimostrare i teoremi dei numeri 10, 2°, 3°; 38, III.; 44, IV, V; 55; 58; 305.

XVII. Un mobile fa miglia 9 nel primo giorno, 8 nel secondo ec., un altro ne fa nel primo giorno 27, nel secondo 18 ec., ambedue in progression geometrica. Qual è il loro viaggio per tutta l'eternità? *Ris.* 81$^{mig.}$

XVIII. Due Corrieri con le celerità m, n partono nel punto stesso l'uno da Firenze per Livorno, l'altro da Livorno per Firenze, e la distanza tra questi due luoghi è a. Ove s'incontreranno? *Ris.* Sia x la distanza tra Firenze e il punto d'incontro, e si avrà $x = \frac{am}{m+n}$.

XIX. Un orologio tra le 5 e le 6 ha la lancetta dei minuti su quella dell' ore. Che ora è? *Ris.* Ore 5, 27$'$ $\frac{3}{11}$.

XX. Tre cagioni separatamente producono i tre effetti

e, e', e'' nei tempi t, t', t''. Qual tempo x impiegheranno a produrre insieme l'effetto e'''? *Ris.* $x = \frac{e'''}{\frac{e}{t} + \frac{e'}{t'} + \frac{e''}{t''}}$.

XXI. A pose in società il doppio di B e di più 5$^{sc.}$: A ebbe di guadagno 660$^{sc.}$ e B 300. Cerco i capitali e il frutto. *Ris.* Il capitale di B è 25$^{sc.}$; il frutto è di 1200 per 100.

XXII. Un peso, un numero o una misura di due materie vale p', p'' e con la mescolanza di pesi, numeri o misure m', m'' di esse vorrei fare i pesi, numeri o misure m di una materia media onde un suo peso, numero o misura vaglia p. Date quattro delle sei cose, trovar l'altre due. *Ris.* Si avranno l'equazioni $m' + m'' = m$, e $pm = p'm' + p''m''$.

XXIII. Dovendo A pagare a B una rendita a per t anni oltre quella che scade oggi, conviene di saldarlo interamente con abbonargli il frutto semplice ad m per 100. Quanto riscuoterà B? *Ris.* Riscuoterà $\frac{at[200 + m(t+1)]}{2(mt + 100)}$.

XXIV. Data al frutto semplice di m per 1 una sorte c, risolvo di consumare in t anni e sorte e frutti, spendendo annualmente un' egual somma x. Cerco x. *Ris.* $x = \frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t - 1}$.

XXV. Col metodo dei coefficienti indeterminati calcolare i rotti 1°. $\frac{\pm(2ax + x^2)u + (a+x)u^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)u}$; 2°. . . . . . $\frac{\sqrt{(ax + x^2 \pm ux)} - \sqrt{(ax + x^2 \pm au \pm ux)}}{\sqrt{(x^2 \pm ux)}}$. *Ris.* . . . . . .

1°. $\pm \frac{(2ax + x^2)u}{(a+x)^2} + \frac{a^2u^2}{(a+x)^3} \pm \frac{a^2u^3}{(a+x)^4}$ ec.: 2°. $\mp$ . . . .
$\frac{au}{2x(ax + x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(3a^2 + 4ax)u^2}{8x(ax + x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(5a^3 + 12a^2x + 8ax^2)u^3}{16x(ax + x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ec.

XXVI. Sommare i rotti decimali 1°. 0.00330033 ec., 2°. 0,4059090 ec. *Ris.* Il 1°. è $\frac{1}{303}$; il 2°. $\frac{893}{2200}$.

XXVII. Sommare n termini della serie $\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4}$ ec.

Ris. La somma è $\frac{x(x+1)(x^n - 1)}{(x-1)^3} - \frac{n}{x^n(x-1)}\left(\frac{2x}{x-1} + n\right)$.

XXVIII. Per la Regola di doppia falsa posizione calcolare il valor di r nell'equazione $r^r = 2000$. *Ris.* $r = 4{,}8278$.

XXIX. Le tre cifre d'un numero son tali che il loro prodotto è 54, la somma dell'estreme divisa per la media è 6, e sottratto 594 dal numero, si han le tre cifre stesse in ordine inverso. Che numero è? *Ris.* 923.

XXX. Il Comandante d'una Fortezza assediata scrive al Generale che tante sono le centinaja de' suoi soldati quante le unità nella radice positiva dell'equazione $x^4 + 7x^3 - 2x^2 -$

$18x = 28$. Il biglietto viene in mano degli assedianti che non intendon la cifra. Come la spiegherete? *Ris.* I soldati erano 200.

XXXI. Determinare i fattori della quantità $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. *Ris.* I primi due sono $c = \pm(a-b)$, gli altri due $a + b = \pm c$.

XXXII. Estrar la radice quadra da $11 + \sqrt{120}$, da $39 + 2\sqrt{5}$ e da $6\sqrt{-1}$. *Ris.* 1°. $\sqrt{6} + \sqrt{5}$: 2°. $\sqrt{\left(\frac{39+\sqrt{1501}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{39-\sqrt{1501}}{2}\right)}$: 3°. $\sqrt{-3} + \sqrt{3}$.

XXXIII. Quali sono i due numeri la cui somma è a e il quoziente del minore diviso per la radice cuba del maggiore è g? *Ris.* Il minore è $g\left[\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{g^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{g^3}{27}\right)}\right)}\right]$.

XXXIV. Dimostrare i teoremi dei numeri 394. 395.

XXXV. Risolver l'equazioni $x^4 + 6x^2 - 12x + 6 = 0$ ed $x^4 - 18x^2 + 25x + 6 = 0$. *Ris.* I divisori della 1ª. sono $x^2 \pm x\sqrt{-6} \mp \sqrt{-6}$; della 2ª. sono $x^2 - 5x + 6$ ed $x^2 + 5x + 1$.

XXXVI. Trovar per approssimazione la radice dell'equazione $x^3 - 13x + 5 = 0$. *Ris.* $x = -3,7843$.

XXXVII. Trovar la radice della generale equazione $x^n - n.\frac{n-1}{2}abx^{n-2} - n\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}ab(a+b)x^{n-3} - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}ab(a^2+ab+b^2)x^{n-4}$ — ec. *Ris.* $x = \frac{a\sqrt[n]{b} - b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$.

XXXVIII. Con monete di 10 e di 5 paoli in quanti modi può farsi la somma di paoli 405? *Ris.* In 40 modi.

XXXIX. Quali sono i numeri multipli di 7 che divisi per 4, 5 e 6, danno 1 di resto? *Ris.* 301, 721, 1141 ec.

XL. Certi forestieri spesero 20^l in una Locanda a ragione di 4^l per Padrone, di $40^{sol.}$ per Servitore e di $30^{sol.}$ per Cavallo: quanti erano i Padroni x, i Servitori y ed i Cavalli z? *Ris.* Se $x = 1$, si avrà $y = 2, = 5$ e $z = 8, = 4$: se $x = 2$, sarà $y = 3, z = 4$: se $x = 3$, verrà $y = 1, z = 4$.

XLI. E' egli possibile di far 19^l con monete di $24^{sol.}$, di 12, e di 6? *Ris.* Impossibile.

XLII. Esprimere più semplicemente per approssimazione il rotto 0,5715. *Ris.* $\frac{4}{7}$.

XLIII. Correndo 9 di Ciclo Solare e Lunare e 3 d'Indizione, apparve in Cielo una grande e singolar Cometa. Che anno era? *Ris.* Il 1680.

XLIV. Dimostrare i teoremi del n°. 415. 4°.

XLV. Trovar due numeri x, y la cui somma sia il qua-

drato di $x^2 + y$. *Ris* $x = \frac{Aa}{(A - a)^2 + a^2}$; di quì y.

XLVI. Trovar due rotti razionali la cui somma e il cui prodotto facciano due interi. *Ris.* E' impossibile.

XLVII. Costruir le serie poste al n°. 420.

XLVIII. Dimostrare che i risultati $+a, -b, +c$ ec. (420) son periodici.

XLIX. Risolvere in rotti o in interi l'equazione $13x^2 - 159 = Q$. *Ris.* In rotti si ha $x = 4, = \frac{40}{9}$: in interi $x = -3856, = 1336, = 20, = \frac{32}{3}$.

L. Trovar le formule del n°. 439.

LI. Un Viaggiatore osservando le rarità di una Casa illustre di Toscana, s'invaghì di varj Quadri di due diverse Scuole e soprattutto di uno in Lavagna, opera antica ove è dipinta una Musa. Voleva acquistarli e ne offeriva in prezzo una Cassetta di fondo quadro piena di zecchini dispostivi in 144 piani: onde essendo le pitture di ciascuna Scuola tra 80 e 100, avrebbe dati per ogni pezzo tanti zecchini quanti erano i pezzi della Scuola respettiva, e tanti per la Musa quanti erano i pezzi delle due Scuole moltiplicati insieme. Determinare quante erano e quanto sarebbero importate le pitture di ciascuna Scuola, quanto veniva a pagarsi la Musa, quanti zecchini erano in ciascun piano della Cassetta, e qual'era la loro somma totale. *Ris.* Chiamate x le pitture della prima Scuola, y quelle della seconda, si avrà $x = 4A^2 - 4Aa - 3a^2$, ed $y = 8Aa$, e fatto $A = 6$, $a = 2$, sarà $x = 84$, $y = 96$, onde il prezzo delle pitture x è di 7056$^{z.}$, delle pitture y di 9216$^{z.}$, della Musa di 8064$^{z.}$, la somma degli zecchini 24336, gli zecchini di ciascun piano 169.

LII. Nello scavo di certi fondamenti s'incontrò un pavimento antico di ambrogette quadre. Quella di mezzo era rossa; intorno a lei ne eran disposti quattro ordini tra verdi, bianche, gialle, e turchine; e col prodotto di tre ordini tra rosse, verdi e bianche in quattro ordini di turchine e gialle terminava il pavimento. Se ne volle ornare una sala quadrata, ma essendo troppe, ne fu escluso il prodotto di un ordine di turchine in uno di verdi e in uno di gialle. Si sa che ogn' ordine conteneva un egual numero di ambrogette; ditemi quante ne erano in ciascun ordine, quante se ne trovarono nel pavimento antico, e quante ne furono impiegate nella sala. *Ris.* Chiamato x il numero dell'ambrogette di ciascun ordine, la prima soluzione sarà $x = 8$, e perciò il numero totale dell' ambrogette 801, e le impiegate nella sala 289.

FINE DELL' ALGEBRA.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA

477. La Geometrìa prende il nome dalla misura dei Terreni a cui forse fu impiegata in origine. Restò limitata a quest'uso fino all'Epoca luminosa d'Archimede e di altri Geometri Greci, che fatte con una *Risoluzione* o *Analisi* loro propria molte scoperte Geometriche, ne pubblicaron poi la *Composizione* o la *Sintesi*. Euclide le raccolse in un'Opera, ove fissate le nozioni equivoche e poco familiari della Geometrìa, considerò l'Estensione nella sua origine, e dal Punto *che non ha dimensione*, giunse fino ai Solidi. Infatti l'estensione che è sempre con *lunghezza*, *larghezza* e *profondità*, può concepirsi con l'una senza l'altra; onde si cerca la lunghezza d'una strada senza chiederne la larghezza, e si misura l'ampiezza d'un lago senza curarne la profondità. Questa *astrazione* rende più semplice la Geometrìa Elementare, e la divide in tre Parti: la prima considera la lunghezza, cioè le proprietà delle *Linee*, le qualità degli *Angoli*, e la descrizione delle *Figure;* la seconda esamina la lunghezza e la larghezza, e valuta le *Superficie*; la terza suppone le tre dimensioni riunite, e determina la *Superficie* e la *Solidità* dei corpi.

PRIMA PARTE

DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRÌA.

FIG. 1. DA un punto A si può andare a un altro B per un'infinità di linee. Si vede però che una dee essere più corta d'ogn'altra, e questa, qualunque siasi, si chiama *Linea retta*.

478. Dunque 1°. *la vera misura della distanza di due punti* A,B *è la linea retta* AB *che gli unisce*: 2°. *una sola retta può tirarsi da un punto a un altro*, e perciò *due punti bastano a determinar la posizione d'una retta*: tutte l'altre che si conducessero per gli stessi punti, si confonderebbero con la prima: 3°. *due rette si tagliano in un sol punto*, poichè tagliandosi in più, avrebbero comuni tutti i punti d'*intersezione*, e si è veduto che non possono averli senza confondersi.

479. Quando due rette s'incontrano nasce la *retta spezzata*. Tali sono ADB, AFB, le cui estremità terminano ai punti A,B come la retta AB. Ora AB è più corta d'ogn'altra linea terminata ai punti stessi: dunque *la retta è più corta d'ogni retta spezzata condotta tra gli stessi punti*. Dunque anche tra le rette spezzate son più lunghe quelle che più si allontanano dalla retta, ed è chiaro che può esservene un'infinità. Vi sono anche infinite altre linee ACB, AMB ec. che terminando alle stesse estremità A,B, cangiano, per dir così, direzione a ogni punto per cui passano: queste si chiamano *Linee Curve*: la più nota tra esse e la più facile a descriversi è la *Curva Circolare*.

480. Se la retta AC mobile intorno al punto A, fa un'intera rivoluzione, la sua estremità C descrive una curva CEBDC che dicesi *Circonferenza*, mentre lo spazio da lei terminato si chiama *Circolo* (non bisogna confonder queste due cose). Il punto A è il *Centro* del circolo; ogni retta tirata dal centro alla circonferenza si chiama *Raggio*; e ogni raggio prolungato dal centro alla circonferenza, si chiama *Diametro*: così AB è un raggio, BD è un diametro.

481. Segue dalla descrizione del circolo 1°. che tutti i suoi raggi sono eguali: 2°. che lo sono anche tutti i suoi diametri: 3°. che ogni diametro divide il circolo e la circonferenza in due parti eguali. Si chiama *Arco di circolo* una porzione CEB di circonferenza: *Settore*, lo spazio ACEBA tra l'arco CEB e i due raggi CA, AB: *Segmento*, lo spazio CEBC tra l'arco CEB e la retta CB: e *Corda dell' arco* CEB, la retta CB.

482. Onde 1°. la corda qualunque CB è più piccola del diametro DB; poichè condotta AC, si avrà la spezzata CAB > CB (479): ora CAB = DB; dunque DB > CB: 2°. nello stesso circolo o in circoli eguali, gli archi eguali hanno delle corde eguali e reciprocamente: 3°. archi maggiori son sottesi da corde maggiori, e i minori da corde minori, e ciò è reciproco: 4°. la corda CB d'un arco CEB è la stessa che quella del resto CDB della circonferenza; ma parlando d'arco sotteso, s'intende sempre il più piccolo: 5°. i gradi e minuti del circolo (95) non son quantità assolute, come un piede, un braccio; la loro grandezza è relativa alle circonferenze di cui son parti simili.

Angoli.

FIG. 3. 483. Se due rette AC, CD si incontrano in C, la loro inclinazione forma l'*Angolo* ACD, che ha per *Vertice* il punto d'incontro C, e per *Lati* le rette AD, CD. Se l'angolo si indica con tre lettere, si mette in mezzo quella del vertice; se con una sola, ella è sempre quella del vertice.

Col centro C e con un raggio qualunque CK descritto l'arco KE, il numero de' gradi di quest' arco sarà la misura dell'angolo ACD: poichè se l'angolo aumenti e divenga AC*d*, o scemi e divenga ACI, l'arco KE aumenterà o scemerà nello stesso rapporto. E benchè col centro C e con varj raggi possan descriversi infiniti archi compresi tra i lati stessi CA, CD, tutti però hanno lo stesso numero di gradi, perchè tutti son parti simili delle loro circonferenze. Onde dicendo che l'angolo ACD ha per misura l'arco KE, s'intende sempre il numero dei gradi di KE e non la sua lunghezza assoluta: quindi *la grandezza d'un angolo non dipende dalla lunghezza de' suoi lati*.

Si distiguon tre sorte d'angoli: quello che ha per misura meno di 90°, è *acuto*; tale è BC*d*: quello che ha per misusa 90° o la quarta parte della circonferenza, è *retto*; tale è ACI; e il misurato da più di 90°, è *ottuso*; tale è ACD.

2. e 3. 484. Dunque l'intere circonferenze DCB $= \pi$, FKE $= \pi'$ misurano i 4 angoli retti che sono intorno ad A, C, come gli archi DC $=$ A, EL $=$ A' misurano gli angoli DAC $= a$, ECL $= a'$: perciò $\pi : 4 :: A : a = \frac{4A}{\pi}$ e $\pi' : 4 :: A' : a' = \frac{4A'}{\pi'}$ e quindi $a : a' :: \frac{4A}{\pi} : \frac{4A'}{\pi'} :: \frac{A}{\pi} : \frac{A'}{\pi'} ::$ (594) $\frac{A}{r} : \frac{A'}{r'}$, cioè *gli angoli son proporzionali agli archi divisi per i raggi*.

485. Si chiama *Complemento* d'un angolo o d'un arco ciò che loro manca per esser di 90°: così l'arco di 57°,31′ ha per complemento 32°, 29′. Quando dunque un angolo è ottuso, il suo complemento è ciò che deve sottrarsi per ridurlo a 90°: onde 119°,11′,36″ ha per complemento −29°,11′,36″. Ma il *Supplemento* d'un angolo o d'un arco è ciò che loro manca per esser di 180°: così un angolo di 35° ha per supplemento un angolo di 145°.

486. Onde *due angoli d'un medesimo complemento o supplemento sono eguali*; e perciò *gli angoli* ACD, BCF *opposti al vertice*, avendo un medesimo supplemento DCB, *sono eguali*. 3.

487. Inoltre una retta DC, che cada sopra d'un'altra AB, forma con essa due angoli ACD, DCB la cui somma è sempre di due retti o di 180°; poichè l'uno è supplemento dell'altro. E perciò la somma dei quattro angoli ACD,DCB, BCF, FCA equivale a quattro retti, o a 360°. In generale 4. se le rette ACB, DCI, ECH ec. si tagliano in un punto C, la somma degli angoli ACD + DCE + ec. che fanno tutte insieme da una parte di AB, è di 180°, e la somma da ambedue le parti di 360°.

Linee rette perpendicolari.

Chiamasi *perpendicolare* o *normale* la retta che incontrandone un'altra fa retti gli angoli nel punto d'incontro: così DC è normale ad AB se gli 5. angoli intorno a C son retti. Le rette DE, DA che non hanno tal proprietà, diconsi *oblique*.

488. I. *Se* AC *sia normale a* DF *e il punto* C *d'intersezione sia equidistante dai punti* D, F, *ogni punto di* AC *sarà equidistante dai punti stessi*

FIG. 5. D, F. Essendo per ipotesi il punto C equidistante dai punti D, F, sarà CD = CF (478), e il semicircolo DEF descritto col centro C e raggio CD, passerà per F (481). Condotte dunque da E le corde ED, EF, poichè per ipotesi i due angoli in C son retti, sarà DHE = FIE = 90° (483); dunque ED = EF (482), e però il punto E sarà equidistante come il punto C dai punti D, F (478): ma due punti determinano la posizion d'una retta (478); dunque ogni punto di AC è equidistante da D, F.

II. Reciprocamente, *se ogni punto di* AC *sia equidistante dai punti* D, F, *la retta* AC *sarà normale a* DF. Essendo per ipotesi ogni punto di AC equidistante dai punti D, F, descritto col centro C e raggio CD il semicircolo DEF e condotte le corde DE, FE, sarà DE = FE (478) e però DHE = FIE = 90° (482); dunque gli angoli in C son retti, ed AC è normale a DF.

III. E *se* AC *è normale a* DF *ed un suo punto* A *è equidistante dai punti* D, F, *lo sarà anche ogn'altro suo punto* E. Poichè se E non lo fosse, non sarebbe ED = EF, nè EHD = EIF = 90°, nè gli angoli in C sarebbero retti, nè AC sarebbe normale, contro l'ipotesi.

Dunque *data la retta su cui vuol condursi la normale, basta un sol punto per determinarne la posizione*: onde una sola normale può condursi da un punto sopra una retta data.

489. La normale DC è più corta di tutte l'oblique che da un punto stesso D vanno alla stessa retta AB. Descritto col centro C e raggio CD il semicircolo DEF e condotte le corde DE, FE, sarà DF < DEF (479): ma DF = 2DC e DEF = 2DE (488. I.); dunque 2DC < 2DE, e DC < DE. Per-

ciò *una normale* DC *misura la distanza di un punto* D *da una retta* AB. Sciolghiamo alcuni Problemi.

FIG. 5.

490. I. Dividere in mezzo la data retta DC. Coi centri D, C e col raggio stesso DC descrivo due archi che si seghino in G, H, e la retta GH condotta per G, H dividerà in mezzo DC. Poichè condotti i raggi DG, DH, CG, CH, sarà DC=DG=DH=CG=CH, e i punti G, H saranno equidistanti da DC: lo sarà dunque anche il punto F (478) e però DF=FC.

6.

II. Da un dato punto G fuori d'una retta AB condur sopra di essa una normale. Presa un'obliqua GD come raggio, e descritto col centro G l'arco DMC, divido in mezzo in F la retta CD (490. I.), unisco CG, FG, e sarà GF la normale cercata. Perchè i due punti G, F sono equidistanti dai due D, C; dunque lo sono tutti i punti di FG (478); dunque GF è normale ad AB (488. II).

III. Da un punto F dato nella retta AB alzar sopra di essa una normale. Presa FD=FC e coi centri D, C e col raggio stesso DC, descritti due archi che si seghino in G, unisco DG, FG, CG, e sarà FG la normale richiesta. Perchè DC=DG=CG; dunque i due punti F, G sono equidistanti dai due D, C; dunque FG è normale ad AB.

491. Se il punto dato F sia all'estremità della retta AB che non possa prolungarsi, si userà un metodo che presto indicheremo.

Perpendicolari nel Circolo.

492. I. *Se dal centro* C *oltre i raggi* CF, CG *si conduca sulla corda* FG *il raggio normale* CM, *egli dividerà in mezzo la corda* FG, *l'arco sotteso* FMG *e l'angolo contenuto* FCG. Conduco le corde FM, GM. Essendo per ipotesi CF=CG, il

7.

7. punto C sarà equidistante dai punti F, G; ma di più CD è normale ad FG; dunque anche i punti D, M saranno equidistanti da F, G (488. III.), e però DF=DG, MF=MG, MIF=MLG (482) ed FCM=GCM (483).

II. Reciprocamente, *se la corda* FG *è divisa in mezzo dal raggio* CM, *egli sarà normale ad* FG *e dividerà in mezzo l'arco* FMG *e l'angolo* FCG. Perchè i due punti C, D sono equidistanti dai due F, G, lo è dunque anche M; dunque DF=DG, MF=MG, MIF=MLG ed FCM=GCM.

Col raziocinio stesso si proverà che se l'arco FMG o l'angolo FCG sia diviso in mezzo dal raggio CM, sarà CM normale ad FG, e dividerà in mezzo FG e l'angolo FCG o l'arco FMG.

III. E *se la corda* FG *sia divisa in mezzo dalla normale* MD, *questa prolungata passerà per il centro* C. Essendo MD normale ad FG ed un suo punto D equidistante dai punti F, G, lo sarà anche ogn'altro suo punto (488. I.): ma il centro C è equidistante dai punti stessi F, G; dunque C è un punto della normale MD prolungata.

Dunque *di queste tre cose, esser normale a una corda, dividerla in mezzo, e passar per il centro, datene due, si ha necessariamente la terza*. Scielghiamo alcuni problemi.

6. 493. I. Dividere in mezzo un angolo DGC o un arco DMC. Condotta e divisa in mezzo la corda DC, il raggio normale GM dividerà in mezzo l'angolo DGC e l'arco DMC (492. III.).

Dividendo nel modo stesso l'angolo DGM, e poi la sua metà ec., si avrà un quarto, un ottavo ec. dell'angolo DGC; onde può dividersi un angolo in 2, 4, 8, 16 ec. parti eguali: ma il dividerlo in 3, 5, 7, 9 ec. son problemi più alti.

494. II. Far passare una circonferenza per tre dati punti A, B, D non posti in linea retta. Condotte AB, BD e divise in mezzo con le normali FL, GI, se si conducano CA, CB, CD, sarà (485. I.) CA = CB = CD, e la circonferenza descritta col raggio CA passerà per i tre punti A, B, D. FIG. 8.

Dunque *tre punti* A, B, D *non posti in linea retta determinano la posizione d'un circolo*; onde due circonferenze non posson tagliarsi in più di due punti: se si tagliassero in tre, coinciderebbero.

495. III. Trovare il centro d' un circolo o d'un arco. Condotte due corde, e divise in mezzo con due normali, il punto del loro incontro sarà il centro cercato (494).

Tangenti.

Una retta MT che ha un sol punto M comune con la circonferenza FMG, si chiama *Tangente*, e il punto comune M si chiama *punto di contatto*. 7.

496. I. *Se* MT *sia tangente in* M, *il raggio* CM *le sarà normale*. Poichè CM è più corta d' ogni altra linea COK (480): dunque ella misura la distanza di C da MT; dunque le è normale (489).

II. Reciprocamente, *se il raggio* CM *sia normale alla retta* MT, *sarà* MT *tangente in* M. Perchè CM normale è più corta d'ogn'altra COK (489); dunque tutti i punti K di MT son fuori del circolo fuorchè M; dunque MT è tangente in M.

497. Dunque se voglio una tangente al punto M d'una circonferenza, conduco ad M il raggio CM, e alzo in M la normale MT (490. III.).

498. Se due o più circoli si tocchino in un punto o fuori o dentro, la retta che passa per i centri passa anche per il punto di contatto.

FIG. 9. Poichè la stessa tangente MT è normale ai raggi CM, AM; questi dunque formano una sola retta CA = CM ± AM (488. III.).

Linee rette parallele.

10. 499. Coincidano le rette AB, CD e s'intenda CD allontanarsi da AB: se l'allontanamento dei suoi punti è ineguale, come in *cd*, le AB, *cd* sono inegualmente inclinate in F, *p* ad una stessa retta NQ, e diconsi *convergenti* dalla parte A, *c*, *divergenti* dalla parte B, *d* ove prolungate si accostano o si discostano sempre più: se l'allontanamento d'ogni suo punto è eguale, come in CD, le AB, CD sono egualmente inclinate in F, G alla stessa NQ, e chiamansi *parallele* o *equidistanti*.

500. Segue da tal nozione 1°. che le normali GE, HF condotte sopra CD tra le parallele, AB, CD, sono eguali: 2°. che due parallele per quanto si prolunghino, mai non s'incontrano: 3°. che si ha l'angolo NFB = FGD o NFA = FGC *esterno* ed *interno*: 4°. che anche AFG = FGD (486) o BFG = CGF angoli *alterni interni*: 5°. che anche NFB = QGC o NFA = QGD, angoli *alterni esterni*: 6°. che BFG + FGD = 180°, angoli *interni dalla stessa parte*.

Reciprocamente, o gli angoli *corrispondenti* (esterno ed interno, o alterni) sieno eguali, o gl'interni dalla stessa parte eguaglino 180°, o sia la normale GE = HF, le rette AB, CD saranno sempre parallele, perchè non potranno convergere o divergere, ed essendo equidistanti in due punti, lò saranno in tutti gli altri (478).

501. Per condurre da un punto dato G la parallela GD ad AB, con un raggio GF e coi

centri G, F descrivo gli archi FLM, GK. Presa FL = GK e per G, L condotta GL, essa sarà la parallela dimandata; poichè GK = FL dà AFG = FGD (500.)

FIG. 10.

502. Dunque 1°. se due angoli BAC, NLM hanno i loro lati AB, LN e AC, LM paralleli, i due angoli sono eguali; poichè prolungata NL fino ad AC, si avrà NLM = NDC = BAC: 2°. per condurre una normale AF all' estremità A della linea AB (491) si può prima condurre la normale CD sopra AB e poi AF parallela a DC: 3°. due corde parallele FG, IL tagliano due archi eguali FI, LG; perchè il raggio CM normale ad FG, lo sarà anche ad IL, atteso CDF = CHI (500): ora FIM = MLG ed IM = ML (492); dunque FIM − IM = MLG − ML, ovvero FI = GL. Lo stesso è se una di queste parallele fosse tangente.

11.

12.

7.

503. Più di due parallele hanno le proprietà stesse delle due che abbiamo considerate.

Misura degli Angoli.

504. Determinar l'arco del circolo AHGA che misura l'*angolo del segmento* cioè BAD, fatto dalla tangente AB e dalla corda AD. Condotti il diametro HCG parallelo ad AD, il raggio CF perpendicolare ad AD, ed il raggio CA al punto di contatto, sarà l'angolo retto FCG = BAC: ma ACG = DAC (500); dunque BAD = FCA = FA = $\frac{AFD}{2}$; dunque *l'angolo del segmento* BAD *ha per misura la metà dell' arco sotteso dalla corda* AD.

13.

505. Onde *l'angolo* DAK *tra due corde* DA, AK *ha per misura la metà dell' arco* DK *tra i suoi*

13\. *lati*: poichè $BAK = \frac{1}{2}AFDK$, $BAD = \frac{1}{2}AFD$, e $BAK - BAD = DAK = \frac{1}{2}(AFDK - AFD) = \frac{1}{2}DK$.

Dunque 1°. *L'angolo centrale* DCK *è doppio*
14\. *dell'iscritto* DAK *appoggiato sullo stesso arco* DK
e 2°. *l'angolo iscritto appoggiato sul diametro è retto*:
15\. 3°. *gli angoli iscritti appoggiati sullo stesso arco dello stesso circolo sono eguali*.

Quindi può condursi una tangente da un punto
16\. A dato fuori della circonferenza. Sulla retta AC che unisce il punto A al centro C, descrivo un circolo che taglierà il dato ne' punti M, M'; e poichè condotte AM, MC, l'angolo CMA è retto, la MA normale a CM, è tangente in M (496. II.). Il problema ha due soluzioni, potendosi condurre da A anche la tangente AM'.

17\. 506. Determinar l'arco del circolo BEFB che misura l'angolo *eccentrico* BAD col vertice dentro al circolo. Suppongo acuto l'angolo BAD e prolungando BA, AD in G, F, conduco GE parallela ad AD, ed ho $BAD = BGE = \frac{1}{2}(BD + DE) = \frac{1}{2}(BD + FG)$ (502). Se l'angolo eccentrico è ottuso come BAF, sarà $BAF = 180° - BAD = \frac{1}{2}(BFGDB - BD - FG) = \frac{1}{2}(BF + GD)$; dunque *l'angolo eccentrico ha per misura la metà degli archi compresi tra i suoi lati e il loro prolungamento*.

18\. 507. Determinar l'arco del circolo BFMB che misura l'angolo *circoscritto* BAD col vertice fuor del circolo. Condotta GE parallela ad AD, sarà $BAD = BGE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}(BD - ED) = \frac{1}{2}(BD - GI)$. Se AD divenga la tangente AF, sarà $FAB = \frac{1}{2}(FB - FG)$; onde se AM è l'altra tangente, sarà $FAM = \frac{1}{2}(FBM - FGM)$.

F I G U R E.

508\. Si chiama *Figura* lo spazio terminato da linee per ogni parte. Se queste son rette, la figura è *rettilinea*; se son curve, *curvilinea*. Le linee sono i *lati* della figura, e la loro somma ne è il *contorno* o *perimetro*. Quì parliamo delle sole figure rettilinee o dei *poligoni*; e poichè per

racchiudere uno spazio son necessarie per lo meno tre rette, il più semplice poligono è il *triangolo*, figura di tre angoli e di tre lati; indi viene il *quadrilatero*, figura di quattro lati, il *pentagono* di 5, l'*esagono* di 6, l'*ettagono* di 7, l'*ottagono* di 8, l'*enneagono* di 9, il *decagono* di 10 ec. Tutti i poligoni facilmente si riducono al triangolo.

Triangolo.

509. Un Triangolo coi tre lati uguali si chiama *equilatero*; con due, *isoscele* o *equicrure*; se tutti son diseguali, *scaleno*. Se si consideri un suo angolo acuto, dicesi *acuziangolo*; se un ottuso, *ottusiangolo*; se un retto, *rettangolo*: il lato opposto a quest' angoli si chiama *base*, e quando l'angolo è retto, anche *ipotenusa*. Ora due lati d'un triangolo facendo una linea spezzata, son sempre maggiori del terzo (479).

510. Un triangolo ABC per i cui vertici A, B, C passa un circolo (494), si trova *iscritto* nel circolo, e l'angolo $ABC=\frac{1}{2}ADC$ (505), $ACB=\frac{1}{2}AEB$, $BAC=\frac{1}{2}BFC$: dunque $ABC+ACB+BAC=\frac{1}{2}AEFDA=180°$, *somma dei tre angoli d'un triangolo*. 19.

511. Onde 1°. prolungato un lato CA, *l'angolo esterno* BAF *eguaglia la somma de' due interni opposti* ABC, ACB; poichè $ABC+ACB+BAC=180°=FAB+BAC$: dunque $FAB=ABC+ACB$.

512. 2°. Un angolo d'un triangolo è il supplemento della somma dei due altri; perciò *data la somma s di due angoli d'un triangolo, il terzo è* $180°-s$.

513. 3°. Un triangolo ha un solo angolo retto o ottuso; ne' quali casi i due altri sono acuti.

4°. Un angolo acuto d'un triangolo rettan-

golo è complemento dell'altro; onde se l'uno è a, l'altro sarà $90°-a$.

514. 5°. In un triangolo i lati opposti agli angoli egnali sono eguali, e reciprocamente. In

19. fatti le corde eguali AB, BC sottendono archi eguali, e reciprocamente.

6°. In un triangolo il più grand'angolo è opposto al lato più grande, il più piccolo al più piccolo, e reciprocamente. Ma le corde non crescono come gli angoli, e un angolo doppio, per esempio, non è opposto a una corda doppia. Dalla Trigonometrìa si ha la proporzione di questi aumenti.

515. 7°. In un triangolo isoscele, dato un angolo, si hanno i due altri. Infatti dato $A=C$,

20. si avrà $B=180°-2A$: e dato B, si avrà $2A=180°-B$, ed $A=C=90°-\frac{1}{2}B$.

8°. Gli angoli opposti ai lati eguali nei triangoli isosceli son sempre acuti.

9°. In un triangolo equilatero essendo gli angoli tutti eguali, sarà ciascuno $=60°$.

516. 10°. In qualunque triangolo DEF restando la stessa ba-

5. se DF e crescendo i lati DE, FE e perciò anche gli angoli FDE, DFE, scema continuamente l'angolo E, onde se il vertice E si allontani all'infinito da DF, l'angolo E diverrà infinitesimo o nullo, gli angoli FDE, DFE non differiramo da 180°, e i lati DE, FE saranno paralleli (500).

11°. Se un angolo d'un triangolo sia infinitesimo o nullo, la somma degli altri due sarà 180°.

517. Se dal vertice B d'un triangolo iso-

20. scele ABC si abbassi la normale BF sulla base AC, ciascuno dei punti di questa normale FB sarà equidistante da A e C (488. III), e perciò la base AC sarà divisa in mezzo nel punto F.

Osservazione. Se i due angoli della base sieno acuti, la normale abbassata dal vertice ca-

derà dentro al triangolo; se un di essi sia ottuso, caderà fuori. La dimostrazione è facile.

Similitudine ed egualità dei Triangoli.

518. I triangoli son *simili* se han tutti gli angoli respettivamente uguali. Così se l'angolo ABC=*dbf*, BAC=*bdf* e ACB=*dfb*, i triangoli ABC, *dbf* son simili. In essi i lati opposti agli angoli eguali si chiamano *omologhi* e in generale *le dimensioni omologhe* di due figure son le linee dello stesso nome o condotte nella maniera stessa in ambedue: così in due circoli i raggi, i diametri, le circonferenze, gli archi di un numero eguale di gradi, le loro corde ec. son dimensioni omologhe.

22 e 23.

519. I. *Due triangoli con due angoli respettivamente eguali, son simili*, perchè anche il terzo è eguale in ambedue (512): onde *due triangoli rettangoli con un angolo acuto eguale, son simili.*

520. II. *Due triangoli son simili quando tutti i loro lati omologhi son paralleli*, perchè allora tutti i loro angoli son respettivamente eguali.

521. III. *Due triangoli son simili quando i lati dell'uno prolungati se occorra, son perpendicolari ai lati dell'altro che saranno omologhi ai primi.* Faccia l'un dei triangoli un quarto di rivoluzione intorno ad un punto fisso; allora i suoi lati saran tutti paralleli a quelli dell'altro.

522. IV. Se un numero qualunque di parallele DF, IL, AC taglia i lati d'un angolo ABC, tutti i triangoli BDF, BIL, BAC saranno simili; perchè oltre l'angolo comune B, tutti gli angoli BDF, BIL, BAC sono eguali (500).

523. Se il triangolo *bdf* s'immagini posto sul triangolo simile ABC in modo che l'angolo

22. e 23. *b* cada sul suo eguale B, e i lati *bd*, *bf* sui loro omologhi BA, BC, il lato *df* rappresentato da DF, sarà parallelo alla base AC. In fatti il triangolo BDF (=*bdf*) è simile al triangolo ABC; dunque l'angolo BDF=BAC; dunque DF, AC son parallele (500).

524. V. Due triangoli con due lati e con l' angolo contenuto eguali, sono eguali e simili. Poichè se il triangolo BCE oltre l'angolo C e il lato BC comuni col triangolo BCA, abbia anche il lato CE=CA, i due triangoli si confonderanno.

525. VI. Due triangoli che sopra basi eguali hanno eguali gli angoli corrispondenti, sono eguali e simili. Poichè se il triangolo BCE oltre la base BC e l'angolo C comuni col triangolo BCA, abbia anche l'angolo CBE=CBA, i due triangoli si confonderanno.

22. e 24. 526. VII. Due triangoli ABC, *abc* con tutti i loro lati omologhi eguali, sono eguali e simili. Soprapposti i triangoli, onde il lato *ac* cada sopra AC, essendo AB=*ab* e BC=*bc*, il punto *b* si troverà su i due archi descritti l'uno col centro A e raggio AB, l'altro col centro C e raggio CB; dunque sarà nella loro intersezione B, e però il triangolo *abc* si confonderà con ABC.

527. VIII. Due triangoli *abc*, ABC coi lati *ab*=AB, *bc*=BC, e con gli angoli eguali *a*, A opposti a uno dei lati eguali, sono eguali e simili, purchè gli angoli C, *c* opposti all' altro lato eguale, siano ambedue acuti o ottusi. Sopraposti i triangoli, essendo *ba*=BA i punti *b*, *a* caderanno in B, A, e perchè l'angolo BAC=*bac*, il punto *c* cadrà in qualche punto di AC. Ma *bc*=BC; dunque il punto *c* dee cadere altresì in qualche punto dell' arco CE descritto col centro B e raggio BC. Dunque caderà o in E o in C. Ma il triangolo BEC è isoscele, e però gli angoli eguali E, C sono acuti (512) e l'angolo BEA è ottuso; dunque se gli angoli C, *c* sono acuti, il punto *c* cadrà in C, e *abc* si confonderà con ABC: e se gli angoli *c*, C, o *c*, E sono ottusi, il punto *c* caderà in E, ed *acb* si confonderà con AEB.

528. Onde 1°. due oblique parallele AB, CD compprese tra due altre parallele AD, BC, sono eguali. Poichè condotte AF, DE normali a BC, il triangolo ABF sarà simile al triangolo CDE: ma (500) AF = DE; dunque (525) il triangolo ABF è eguale al triangolo CDE; dunque AB = CD; e così si proverà AD = BC. E' facile anche il provare che due rette le quali comprendono due altre rette parallele ed eguali, sono eguali e parallele.

FIG. 25.

529. 2°. In qualunque triangolo ABD può *iscriversi* un circolo, cioè può farsi un circolo che tocchi tutti i suoi lati. Poichè divisi in mezzo due dei suoi angoli, e condotte dal punto C d'incontro le normali sopra i tre lati, i triangoli ACE, ACG e BCG, BCH sono eguali; dunque CE = CG = CH possono esser raggi d'uno stesso circolo iscritto nel triangolo.

26.

530. Si ha anche BG = BH, HD = ED, AE = AG, e chiamando q il semiperimetro del triangolo ABD sarà 1°. $q = AE + ED + BH = AD + BH$; 2°. $q = BD + AE = AB + ED$; onde sommando le due equazioni, $2AE + BD = AD + AB$, cioè $AE = \frac{1}{2}(AD + AB - BD)$; dunque il punto E è determinato, e possono esserlo nel modo stesso i punti G, H; onde basterà far passare un circolo per questi tre punti.

531. Se il triangolo sia rettangolo in B, l'angolo CBH metà di ABD, ed il suo complemento BCH sarà di 45° e il triangolo BCH sarà isoscele; onde dalla prima equazione BH ($= CH$) $= q - AD$ si vede che il circolo iscritto ha per raggio il semiperimetro meno l'ipotenusa.

Altri Poligoni e loro principali proprietà.

532. Vi son tre sorte di Poligoni: gli *irregolari* che hanno gli angoli e i lati ineguali; i *simmetrici* che hanno tutti i lati opposti paralleli ed eguali; e i *regolari* che hanno tutti i lati e tutti gli angoli eguali. I Poligoni diconsi

isoperimetri quando hanno un egual contorno o perimetro.

27. 28. 29. 30. 31. Il quadrilatero simmetrico si chiama *Parallelogrammo;* il regolare, *Quadrato;* il quadrilatero con due lati paralleli, *Trapezio;* il parallelogrammo con tutti i lati eguali ma con angoli ineguali, *Rombo* o *Losanga*; e il parallelogrammo coi lati non tutti eguali ma con tutti gli angoli retti, *Parallelogrammo rettangolo* o solamente *Rettangolo*.

32. 33. Una retta AD che attraversa un poligono da un angolo all'altro si chiama *Diagonale*. L' *angolo saliente* ha il vertice fuor della figura, come ABC; l'angolo *rientrante* lo ha dentro, come CDE.

32. 533. Le diagonali AC, AD, AE condotte da un angolo A dividono il poligono di lati n in un numero $n-2$ di triangoli, come è chiaro, i cui angoli son gli angoli stessi del poligono; dunque la somma di questi angoli è $S = 180^\circ(n-2)$.

Dunque 1°. in un quadrilatero, $S = 360^\circ$; in un pentagono, $S = 540^\circ$, ec.; 2°. l'angolo d'un poligono regolare che gli ha tutti eguali, sarà $\frac{S}{n} = \frac{180^\circ(n-2)}{n} = 180^\circ(1 - \frac{2}{n})$, tanto più ottuso o più prossimo a 180°, quanto n è più grande (268).

534. I supplementi degli angoli salienti son 360°. Poichè i salienti coi lor supplementi son $180^\circ \times n$, e i soli salienti son $180^\circ(n-2)$; dunque i supplementi son $180^\circ \times n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ$.

33. 535. Se il poligono abbia un numero s d'angoli salienti ed uno r di rientranti CDE, FHI ec. sarà (533) $n = s + r$, e la somma di tutti $S = (s + r - 2)\pi$ posto $\pi = 180^\circ$; e poichè un rientrante interno abc equivale a $2\pi - CDE$ (487), la somma di un numero r di rientranti interni sarà $\sigma = 2\pi r - CDE - FHI$ ec.; perciò la somma dei soli salienti $\Sigma = S - \sigma = (s + r - 2)\pi - 2\pi r + CDE + FHI$ ec., e la differenza tra i salienti e i rientranti $D = \Sigma - CDE - FHI$ ec. $= (s - r - 2)\pi$.

Onde 1°. se $s > r + 2$ ovvero $s < r + 2$, la somma in gradi

dei salienti supererà quella dei rientranti o ne sarà superata: 2°. se $s = r + 2$ e perciò $s + r = n = 2(r + 1)$, la somma degli uni eguaglierà quella degli altri, e i lati o angoli del poligono saranno in numero pari: 3°. se $s = r$ e perciò $s + r = n = 2r$, sarà $D = -2\pi = -360°$, e il poligono avrà pure un numero pari di lati o d'angoli: 4°. se alla somma $\int = 2\pi = s\pi - \Sigma$ dei supplementi (534) si aggiungano gli angoli rientranti, sarà $\int + CDE + FHI$ ec. $= s\pi - \Sigma + CDE + FHI$ ec. $= s\pi - D = (r + 2)\pi$.

Poligoni simmetrici.

536. I lati opposti d'un poligono simmetrico dovendo esser paralleli ed eguali, è chiaro 1°. che il numero di questi lati è sempre pari; 2°. che ogni poligono regolare di numero pari di lati è simmetrico. Onde condotte da ogn'angolo d'un poligono simmetrico le diagonali agli angoli opposti, i triangoli opposti al vertice, come AFB, DFC, sono eguali. Poichè il lato AB è eguale e parallelo all'omologo DC; dunque l'angolo FDC = FBA, FCD = FAB, e i triangoli AFB, DFC son simili: ma il lato omologo AB = DC; dunque sono eguali. 34. e 35.

537. Onde AF = FC, BF = FD ec., e tutte le diagonali AC, DB ec. si tagliano in due parti eguali in un punto stesso F che può chiamarsi il *centro* del poligono: perciò qualunque diagonale AC lo divide in due parti eguali e simili: e in generale ogni retta IL che passa per il centro F, è divisa in mezzo in F e divide il poligono in due parti eguali e simili, attesa l'eguaglianza e similitudine dei triangoli FIB, DFL, ed AIF, LCF.

538. Quindi per descrivere un poligono simmetrico di un numero dato di lati, per esempio di sei, condotte comunque per un punto F 35.

35. tre rette EFG,DFB,AFC, prendo FB=DF,AF=FC,EF=GF e per i punti A,B,G,C,D,E conduco AB,BG ec., lati del poligono: perchè i triangoli AFB,DFC con due lati eguali intorno ad angoli eguali, sono eguali e simili; onde AB è eguale e parallela a DC ec.

Poligoni regolari.

36. 539. Divisi in mezzo con le rette CB,CD gli angoli eguali ABD,BDF d'un poligono regolare, e congiunte FC,GC ec., i triangoli CBD, CDF ec. sono isosceli (514) ed eguali (524); dunque il circolo del raggio CB passa per tutti i vertici del poligono che perciò vi resta *iscritto*. E poichè nei triangoli ACB, BCD isosceli, le normali CK,CL dividono in mezzo i lati AB,BD (517), e l'angolo CBK=CBL, saranno eguali e simili i triangoli rettangoli CBK, CBL; dunque CK=LC: così si proverà CL=CM ec.; dunque il circolo del raggio CK tocca tutti i lati del poligono, che perciò gli è *circoscritto*.

540. Quindi il lato di un poligono regolare iscritto è la corda d'un arco di $\frac{1}{n}.360°$, posto n il numero de' lati: così il lato di un triangolo equilatero iscritto è la corda d'un arco di $\frac{1}{3}.360°=120°$.

541. I. Iscrivere in un dato circolo un triangolo equilatero. Col punto B della circonferenza come centro, e col raggio BC, descrivo l'arco ACD che taglia in A,D la circonferenza: per A,D conduco AD, e presa AG=AD, il triangolo ADG sarà equilatero. Poichè condotte AB,BD, i triangoli ACB,BCD sono equilateri: dunque gli archi AB,BD son di 60°, e l'arco totale ABD di 120°, la cui corda è il lato del triangolo equilatero (540).

FIG. 36.

542. Poichè l'arco ARB è di 60°, la sua corda AB è il lato dell'esagono regolare: ma AB = CB; dunque *il lato dell' esagono regolare iscritto è eguale al raggio*. Se l'arco AB si divida in mezzo, la corda di questa metà sarà il lato del dodecagono; il che può dirsi di tutti gli altri poligoni.

543. Nel triangolo isoscele BAC la normale AQ divide in mezzo il raggio CB $= r$; dunque CQ $= \frac{1}{2}r$ e $\sqrt{(AC^2 - CQ^2)} =$ AQ $= \frac{1}{2}r\sqrt{3}$; dunque 2AQ $= r\sqrt{3}$, lato del triangolo equilatero.

37.

544. II. Iscrivere un quadrato in un dato circolo. Condotti i diametri AD, BF normali l'uno all'altro, essi taglieranno la circonferenza nei punti A, B, D, F, e le corde AB, BD, DF, FA daranno il quadrato, per esser gli archi AB = BD = DF = AF = 90°.

545. Onde fatto il raggio AC $= r$, si avrà il lato del quadrato AF $= \sqrt{(CA^2 + CF^2)} = r\sqrt{2}$. Del resto anche applicando nel circolo i lati AK dell' esagono e KF del dodecagono (542) si avrebbe il lato AF del quadrato; poichè essendo l'arco AK = 60° e l'arco KF = 30° (540), sarebbe AKF = 60° + 30° = 90°.

38.

546. III. Iscrivere in un circolo dato un decagono regolare. Sia AB il lato richiesto, e si conducano i raggi AC, BC e la retta BE che divida in mezzo l'angolo ABC. Ora l'angolo ACB = 36°; dunque l'angolo ABC = BAC = 72°: ma BE divide in mezzo l'angolo ABC; dunque ABE = 36° = ACB; dunque i triangoli ABE, ACB son simili; dunque AE : AB :: AB : AC; ma l'angolo EBC = 36° = ACB; dunque il triangolo CEB è isoscele, e perciò EB o AB = EC, ed AE : EC :: EC : AC: se dunque si divida il raggio AC *in media ed estrema ragione* nel punto E (580), il maggior segmento EC sarà il lato AB del decagono regolare. Fatto AC $= r$, EC = AB $= x$, sarà AE $= r - x$, e si avrà $r - x : x :: x : r$: onde $xx + rx = rr$, e $x = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$, lato del decagono.

39.

547. IV. Iscrivere in un circolo un pentadecagono regolare. Presa AB eguale al raggio e condotta AD eguale al lato del decagono, la corda BD sarà il lato del pentadecagono. In fatti l'arco ADA = 60°, l'arco AD = 36°, e 60 − 36 = 24, arco del pentadecagono (540). Potrà dunque aversi anche un arco di 12°, e di 6°, e di 3° (493), e una circonferenza sarà divisibile in 120 parti, ciascuna di 3°.

548. Colla Geometria Elementare iscrivonsi dunque in un

circolo i poligoni regolari di 3, 6, 12 lati ec. (542), di 4, 8, 16 ec. (544), di 5, 10, 20 ec. (546), di 15, 30, 60 ec. (547). Ma gli altri non posson iscriversi senza risolver dell'equazioni tanto più alte, quanto è maggiore il numero dei lati, come vedremo.

40. 549. Per circoscrivere a un cerchio dato un poligono regolare, vi si iscriva, e dal centro C abbassata sopra AD la normale CB, si faccia passar per B la tangente EBF che incontrerà in E ed F i raggi CA, CD prolungati, e sarà EF un de' lati del poligono cercato; si farà lo stesso per gli altri lati FG, GH ec., ed ecco descritto il poligono. Poichè i triangoli ECB, FCB, FCM, MCG ec. son tutti eguali; dunque EF = FG = GH ec., ed EB = BF = $\frac{1}{2}$EF = FM ec.; dunque il circolo tocca ciascun lato del poligono EFGH ec. che perciò è circoscritto.

550. Se CA $= r$ e AD $= b$, lato del poligono iscritto d'uno stesso numero di lati, si avrà AQ $= \frac{1}{2}b$, QC $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ e per i triangoli CAQ, CEB simili, QC $(= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}b^2)})$: AQ $(= \frac{1}{2}b)$: : CB $(= r)$: EB; dunque $2EB = \frac{2rb}{\sqrt{(4rr - bb)}} = EF$, lato del poligono circoscritto. Onde il lato del quadrato circoscritto è $2r$, quello del triangolo equilatero è $2r\sqrt{3}$, doppio del lato dell'iscritto ec.

Linee rette proporzionali.

551. Se una prima retta sta ad una seconda, come una terza ad una quarta, queste rette son *proporzionali* fra loro *direttamente*: ma se la prima sta alla seconda come la quarta alla terza, le due prime son proporzionali *reciprocamente* alle seconde. Se la prima sta alla seconda come la seconda alla terza, la proporzione è *continua*, e diverrà una *progressione* se la prima sta alla seconda come la seconda alla terza, come la terza alla quarta, ec. In generale tutte le proprietà dimostrate delle quantità, conven-

FIG.

gono anche alle linee rette proporzionali. Del resto, quì si tratta di proporzioni e progressioni geometriche.

552. Prese sulla retta AB le parti AD = DG = GI ec. e condotte le parallele DF, GH, IK ec. sulla retta AC, saranno le parti AF = FH = HK ec. Poichè condotte DE, GR, IS parallele ad AC, i triangoli ADF, DGE, GIR saranno eguali; dunque AF = DE = GR = FH = HK = ec.; dunque AD: AF :: DG : FH :: GI : HK, e perciò AP somma di tutti gli antecedenti, sta ad AQ somma di tutti i conseguenti, come un antecedente AD al suo conseguente AF, o come un numero di parti di AB al numero stesso di parti simili di AC, per esempio AG : AH :: AI : AK :: DI : FK ec. (261). 41.

553. Dunque 1°. *Se due rette* AE, AD *son tagliate da due o più parallele* ED, CB, *le loro parti* CE, BD *son proporzionali alle rette intere* AE, AD. 42.

554. 2°. *Se due triangoli* ABC, abc *son simili, tutti i loro lati omologhi son proporzionali*. Poichè se l'angolo B = *b*, presa sopra AB la parte DB eguale al lato omologo *ab*, e condotta DF parallela ad AC, i triangoli BDF, *abc* saranno eguali (525): ma AB : BC :: BD : BF; dunque AB : BC :: *ab* : *bc*. Si proverà egualmente che AB : AC :: *ab* : *ac*, che AC : CB :: *ac* : *cb*. 43. e 44.

555. Reciprocamente, *due triangoli* ABC, abc *son simili se hanno tutti i loro lati omologhi proporzionali*. Per la costruzione passata, i triangoli BDF, ABC son simili; dunque AB : BD :: AC : DF :: CB : BF; ma per ipotesi AB : *ab*(= DB) :: AC : *ac* :: BC : *bc*; dunque DF = *ac* e BF = *bc*; dunque i triangoli BDF, *abc* sono eguali e simili; e poichè il primo è simile ad ABC, lo sarà anche il secondo.

43. e 44. 556. *Due triangoli* ABC, abc *son simili se hanno un angolo eguale* B *e* b, *ed i lati intorno a quest' angolo proporzionali*. Fatta la solita costruzione, AB:BC::*ab*:*bc*::BD (=*ab*): BF: dunque BF=*bc*, onde DF=*ac*; dunque il triangolo *abc* è eguale e simile a BDF e perciò ad ABC. Si proverà egualmente che se i triangoli ABC, *abc* hanno un angolo B=*b*, e due altri lati omologhi AB, AC ed *ab*, *ac* proporzionali, saranno simili.

46. 557. Diviso un angolo A d'un triangolo ABC in mezzo con la retta AD, i lati BA, AC saranno proporzionali ai *segmenti* BD, DC. Poichè se BF parallela ad AD incontri in F il lato AC prolungato, si avrà BD:DC::FA:AC: ma l'angolo DAC=DAB=ABF=BFC; dunque il triangolo FAB è isoscele, onde FA=AB, e BD:DC::BA:AC.

34. e 35. 558. E le parti di due rette che si tagliano tra le parallele, son proporzionali alle rette intere.

47. 559. *Se dal vertice dell' angolo retto* A *si abbassi sull' ipotenusa* BC *la normale* AD, 1°. *i triangoli* BAD, ADC *saranno simili tra loro e al triangolo totale* BAC: 2°. *la normale* AD *sarà media proporzionale tra i segmenti* BD, DC: 3°. *ciascun lato* AB *o* AC *sarà medio proporzionale tra l'ipotenusa* BC *e il* segmento adjacente *a questo lato*, *cioè* BC:AB::AB:BD, e BC:AC::AC:DC. I°. I triangoli rettangoli BAD, BAC hanno l'angolo B comune, e i triangoli rettangoli ADC, BAC hanno comune l'angolo C; dunque son simili, e due triangoli simili ad uno stesso triangolo, lo sono anche tra loro. II°. I triangoli simili BAD, ADC danno BD:AD::AD:DC, e però

$AD^2 = BD \times DC$. III°. I triangoli simili BAD, BAC danno $BD:BA::BA:BC$, e i triangoli simili BAC, ADC danno $DC:AC::AC:BC$. FIG. 47.

560. Dunque $BA^2 = CB.BD$, $CA^2 = BC.CD$, e $BA^2 + CA^2 = CB(BD+CD) = CB^2$, cioè *nel triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa eguaglia la somma de' quadrati dei lati.*

561. Sia $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$, e sarà $c^2 = a^2 + b^2$; onde dati due lati d'un triangolo rettangolo, si ha il terzo: così $c=\sqrt{(a^2+b^2)}$, $b=\sqrt{(c^2-a^2)}$, $a=\sqrt{(c^2-b^2)}$. Se $a=b$, sarà $c=a\sqrt{2}$: ma c è la diagonale del quadrato AD; dunque *la diagonale è incommensurabile col lato del quadrato.* 48.

562. Se dal vertice A d'un triangolo qualunque ABC si abbassi sulla base BC la normale AD, e sia $BC=a$, $AB=b$, $AC=d$, avremo $b^2 - DB^2 = AD^2 = d^2 - DC^2 = d^2 - (a \mp DB)^2$, preso il segno di sopra se la normale è dentro: dunque $DB = \frac{a^2+b^2-d^2}{\pm 2a}$ e $DC = \frac{a^2+d^2-b^2}{2a}$. 49.

Dunque $d^2 = b^2 - DB^2 + (a \mp DB)^2 = b^2 + a^2 \mp 2a.DB$, cioè nei triangoli acuziangolo e ottusiangolo il quadrato della base AC eguaglia i quadrati dei lati AB, BC meno o più il doppio rettangolo del lato BC su cui cade la normale, nella retta DB compresa tra la normale e l'altro lato AB.

Proporzionali nel Circolo.

563. *La normale o ordinata* MP *condotta da un punto qualunque* M *della circonferenza* AMB *sul diametro* AB, *è media proporzionale tra i segmenti* o ascisse AP, PB, *e* dà $PM^2 = AP \times PB$. 50.

FIG. 50. Condotte AM, MB, il triangolo AMB è rettangolo, onde $MP^2 = AP \times PB$.

564. Sia il diametro $AB = 2r$, l'*ascissa* $AP = x$, onde l'altra ascissa $BP = 2r - x$, e l'*ordinata* $PM = y$; avremo generalmente $y^2 = (2r - x)x = 2rx - x^2$, equazione fondamentale che esprime la proprietà del circolo d'aver sempre il quadrato d'ogni sua ordinata eguale al prodotto dell'ascisse corrispondenti. Perciò si chiama questa l'*equazione al circolo*, dal cui punto M conducendo la tangente MT fino all'incontro dell'*asse* AB, si avrebbe la *normale* $CM = r$, la *sunnormale* $CP = r - x$, la *suttangente* $PT = \frac{y^2}{r-x} = \frac{2rx - x^2}{r - x}$ atteso il triangolo rettangolo CMT, ec. ec.

565. Se sia $CP = x$, posta nel centro C l'*origine* dell'ascisse, il triangolo rettangolo CPM darà l'equazione $y^2 = r^2 - x^2$, che esprime la stessa proprietà del circolo; ma la suttangente diverrà $PT = \frac{r^2 - x^2}{x}$, e $PT + CP = CT = \frac{r^2}{x}$; di quì la proporzione $CP : CA :: CA : CT$, onde è facile conoscere il punto T e condurre al dato punto M la tangente TM, la cui espressione si ha dal triangolo rettangolo TMC che dà $TM = AS(504) = \pm\sqrt{(CT^2 - CM^2)} = \pm\sqrt{\left(\frac{r^4}{x^2} - r^2\right)} = \pm\frac{r}{x}\sqrt{(r^2 - x^2)}$.

566. Da questa doppia espressione della tangente AS si raccoglie 1°. che come il negativo si oppone al positivo, così la tangente negativa dee opporsi alla positiva; onde se AS presa al di sopra di AB sia la positiva, AS′ presa al di sotto sarà la negativa; e ordinariamente (168) *il valor negativo d'una linea dee prendersi in un senso contrario a quello in cui si prese il positivo*: 2°. che fatta per esempio, $CP = x = \frac{4r}{5}$, verrà $AS = \pm\frac{3r}{4}$; e fatta $x = 0$, verrà $AS = \pm\infty$: ma presa x negativa, cioè da C verso B, e fatta $CP' = -x = -\frac{4r}{5}$, verrà $AS = \mp\frac{3r}{4}$; e fatta $-x = -r$, verrà $AS = 0$: cioè la tangente AS ha successivamente i valori $+\frac{3r}{4}, \infty, -\frac{3r}{4}, 0, +\frac{3r}{4}, -\infty, -\frac{3r}{4}$ ec., e cominciando positiva, passa per l'infinito e divien negativa, passa per zero e torna positiva, ripassa per l'infinito e ritorna negativa ec.: quindi in generale *le quantità che continuamente variando passano per l'infinito o per zero, si cangiano di positive in negative e di negative in po-*

sitive: onde giacchè le linee variabili posson passare per l'infinito o per zero senza prender sempre un' opposta situazione, la contrarietà dei segni non sarà sempre un indizio della diametrale opposizion delle linee.

567. *Le parti di due corde che si tagliano in un circolo son reciprocamente proporzionali*, e si ha CF:AF::FB:FD, ovvero CF×FD=AF×FB. Poichè condotte AC, BD, i triangoli ACF, FBD in cui l'angolo CFA=DFB, e CDB=CAB (505) son simili, onde CF:AF::FB:FD. 51.

Con ciò posson risolversi i due segmenti problemi.

I°. Condurre per il dato punto A la corda BAD tale che sia AD:AB::m:n. Conduco per A il diametro FG, ed essendo dato il punto A, è nota la sua distanza AC dal centro C. Sia dunque AC$=b$, CF$=r$, AD$=x$, e sarà AB$=\frac{nx}{m}$, BA×AD$=\frac{nx^2}{m}=$FA×AG$=r^2-b^2$; onde AD$=x=\sqrt{\left[\frac{m}{n}(r^2-b^2)\right]}$, e AB$=\sqrt{\left[\frac{n}{m}(r^2-b^2)\right]}$. 52.

II. Condurre per un punto A una corda BAD eguale alla data retta c. Ritenute le denominazioni di sopra, sarà AB$=c-x$ e AB×AD$=cx-x^2=r^2-b^2$; onde AD$=x=$ . . . . . $\frac{c+\sqrt{(c^2+4b^2-4r^2)}}{2}$ e AB$=\frac{c-\sqrt{(c^2+4b^2-4r^2)}}{2}$.

568. *Le parti esteriori* AD, AE *di due secanti* AB, AC *condotte da un punto* A *fuori d' una circonferenza, son reciprocamente proporzionali alle intere secanti*, e si ha AD:AE::AC:AB. Poichè condotte BE, DC, i triangoli simili ABE, ADC, che oltre l'angolo comune A hanno eguali gli angoli B, C, danno AD:AE::AC:AB, onde AD×AB=AE×AC. 53.

569. Se una delle secanti divien la tangente AM, questa sarà media proporzionale tra la secante intera AB e la sua parte esteriore AD. Condotte MD, MB, i triangoli simili AMD, AMB, che oltre l'angolo comune A hanno eguali gli angoli AMD, ABM (504.505), danno AD:AM::AM:AB, e AM^2=AD×AB. 54.

55. 570. Nel quadrilatero formato da quattro corde, il prodotto $BD \times AC$ delle diagonali eguaglia i prodotti $BA \times DC + BC \times DA$ dei lati opposti. Poichè condotta DF onde sia l'angolo $ADF = BDC$, i triangoli AFD, BCD in cui $ADF = BDC$ e $DAF = DBC$, danno $DB : BC :: DA : AF$, e i triangoli BAD, FDC in cui $ABD = FCD$ e $ADB = ADF - BDF = BDC - BDF = FDC$, danno $DB : BA :: DC : CF$. Dunque $CF + FA = AC = \dots \frac{BA \times DC + BC \times DA}{DB}$ e $DB \times AC = BA \times DC + BC \times DA$.

56. Quindi se sia $AC = m$, $CB = n$, $BA = d$, e un diametro $CD = 2r$, condotte le corde BD, DA, avremo $2rd = m.BD + n.AD$: ma $BD = \sqrt{(4r^2 - n^2)}$ e $AD = \sqrt{(4r^2 - m^2)}$; dunque $2rd = m\sqrt{(4r^2 - n^2)} + n\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, equazione che scioglie i seguenti problemi.

571. I. Date le corde $AC = m$, $CB = n$ di due archi, trovar la corda $AB = d$ della loro somma. Si avrà $d = \frac{m}{2r}\sqrt{(4r^2 - n^2)} + \frac{n}{2r}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$.

Onde se AC, CB sieno i lati del dodecagono e dell'esagono, sarà AB quello del quadrato (545), e fatto $AC = m = r(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})$ come troveremo or ora, $BC = n = r$ (542) e $\sqrt{(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ (388), verrà $AB = d = 2r\sqrt{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2}$ (545).

572. II. Date le corde $AB = d$, $BC = n$ di due archi, trovar la corda $CA = m$ della lor differenza. Si avrà $m = \frac{d}{2r}\sqrt{(4r^2 - n^2)} - \frac{n}{2r}\sqrt{(4r^2 - d^2)}$.

Onde se AB, BC sieno i lati dell'esagono e del decagono, sarà CA quello del pentadecagono (547), e fatto $AB = d = r$, $BC = n = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$ (546), verrà $CA = m = \frac{r}{4}[\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} + \sqrt{3} - \sqrt{15}]$.

573. III. Data la corda AC d'un arco, trovar la corda $AB = d$ del suo doppio. Sarà dunque $AC = m = CB = n$, e perciò $d = \frac{m}{r}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$.

Onde se AC, CB sieno i lati del decagono, sarà BA quello del

pentagono, e fatto $AC = CB = m = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$ (546), verrà $BA = d = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}$ (163). FIG. 56.

574. IV. Data la corda $AB = d$ d'un arco, trovar la corda AC della sua metà. Sarà dunque $AC = m = CB = n$, e perciò $dr = m\sqrt{(4r^2 - m^2)}$ ed $m = \sqrt{[2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - d^2)}]}$.

Onde fatto il lato dell'esagono $AB = d = r$ (542), quello del dodecagono sarà $AC = m = r\sqrt{(2-\sqrt{3})} = r(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})$ (384): fatto $AB = d = r\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, il lato del poligono di 24 lati sarà $AC = m = r\sqrt{[2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}]}$ ec. Parimente fatto il lato del quadrato $AB = d = r\sqrt{2}$ (571), quello dell'ottagono sarà $AC = m = r\sqrt{(2-\sqrt{2})}$: fatto $AB = d = r\sqrt{(2-\sqrt{2})}$, il lato del poligono di 16 lati sarà $AC = m = r\sqrt{[2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}]}$ ec. Così fatto il lato del decagono $AB = d = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$ (546), quello del poligono di 20 lati sarà $AC = m = r\sqrt{[2-\frac{1}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}]}$ ec.

575. V. Trovare il raggio del circolo, che passa per tre punti A, B, C. Si avrà $r = \frac{dmn}{\sqrt{(4d^2n^2 - [d^2+n^2-m^2]^2)}}$. Se il triangolo ABC è rettangolo, si ha $r = \frac{1}{2}d$; dunque il centro del circolo cade allora nel mezzo di AB, ciò che è evidente per altra parte.

Problemi sulle proporzionali.

576. I. Date tre rette a, b, c, trovare una quarta proporzionale $\frac{bc}{a}$. Condotte due rette AD, AE in angolo, prendo sopra AD le parti $AB = a$, $AD = c$, e sopra AE la parte $AC = b$; condotte CB, e DE parallela a CB, sarà AE la quarta proporzionale cercata. Poichè i triangoli simili ACB, AED danno $AB : AC :: AD : AE = \frac{bc}{a}$. Si ha lo stesso coll'intersezione di due rette fra due parallele (558). Che se si voglia una terza proporzionale a due date a, b, la costruzione sarà la stessa, e solo bisognerà prendere $AD = AC$. 57.

577. II. Trovar tra due rette a, b una media proporzionale $\sqrt{ab}$. Condotta l'indefinita APB, prendo in essa le parti $AP = a$, $BP = b$, 58.

58. e descritto un semicircolo del raggio $AC=\frac{1}{2}AB$, la perpendicolare PM condotta dal punto di divisione P, sarà la media proporzionale; poichè $PM^2=AP\times PB$ (563).

59. 578. III. Dividere una data retta *a* nella ragione in cui è divisa un'altra AB. Da A conduco AC eguale alla data *a*, che faccia con AB un angolo. Unisco i punti C, B, e dai punti di divisione I, F, D di AB conduco parallele a CB le rette DE, FG, IH che divideranno AC nella stessa maniera in cui è divisa AB. In fatti (553) $AB:AC::AI:AH::IF:HG::FD:GE::DB:EC$.

60. 579. IV. Dividere una retta AB in un numero *n* di parti eguali. Da A conduco l'indefinita AC, e preso sopra di essa un numero *n* di parti eguali AE, EG ec., conduco CB e le rette LK, IH ec. parallele a CB: dunque $AB:AC::AD:AE::DF:EG::FH:GI$ ec. Ora $AE=EG=GI$ ec. $=\frac{AC}{n}$; dunque $AD=DF=FH$ ec. $=\frac{AB}{n}$.

61. 580. V. Dividere una retta data AB in *media ed estrema ragione*, cioè in modo che il maggior segmento FB sia medio proporzionale tra l'intera AB e il minor segmento AF. Si alzi da A la normale $AC=\frac{1}{2}AB$, e condotta CB, prendasi $FB=CB-AC$. Avremo dunque $CB^2=(FB+AC)^2=AC^2+AB^2$ cioè $FB^2=AB^2-2AC\times FB=AB^2-AB\times FB=AB\times AF$; dunque $AB:FB::FB:AF$.

Costruzion geometrica dell' Equazioni determinate del primo e secondo grado.

Costruire geometricamente un'equazione è un trovare in linee i valori dell'incognita. Se l'equazione è del primo gra

do, il valor dell'incognita si determina sempre coll'intersezione di linee rette: se è del secondo grado, i due valori dell'incognita si trovano coll'intersezioni della circonferenza del circolo e d'una retta: ma se l'equazione è più alra, bisogna servirsi di differenti curve la cui descrizione è sì difficile, che i risultati danno radici assai meno approssimate di quelle de' metodi puramente algebrici.

581. Se si ha $\frac{ac}{b}=x$, si prenderà (576) una quarta proporzionale dopo b, a, c, e si avrà il valore di x. Se $x=\frac{abc}{de}$, si prenderà $m=\frac{ab}{d}$, e dipoi $n=\frac{cm}{e}$, e si avrà $n=x$: e nel modo stesso si costruirà $\frac{aa}{b}, \frac{a^3}{b^2}, \frac{a^4}{b^3}$ ec. Ma se il numerator della frazione sia complesso, come $\frac{abc+ccd+mnp}{rq}$, si prenderà come sopra, $k=\frac{abc}{rq}$, $i=\frac{ccd}{rq}$ ed $f=\frac{mnp}{rq}$, ed unendo insieme k, i, f, si avrà una retta eguale alla frazione proposta. Se poi sieno complessi il numeratore e il denominatore, come $\frac{abc+cfg}{mk+nh}$, si prenderà $l=k+\frac{nh}{m}$ e la frazione diventerà $\frac{abc+cfg}{lm}$, che si costruirà come sopra. Parimente avendo da costruire $x=\frac{abcc+q^3h+noqk-m^3p}{q^2i-klq+cmd}$, si prenderà $f=i-\frac{kl}{q}+\frac{cmd}{qq}$, e si avrà $x=\frac{abcc}{fqq}+\frac{qh}{f}+\frac{okn}{fq}-\frac{m^3p}{fqq}$ che si sa costruire.

Talora la costruzione è più facile. Sia $x=\frac{ab+bc}{c+d}$: una quarta proporzionale dopo $c+d, a+c, b$, dà il valor di x. Sia $x=\frac{a^2-b^2}{c}$: una quarta proporzionale dopo $c, a+b, a-b$ dà x. Sia anche $x=\frac{abc^2-a^2b^2}{abc+c^3}$, prendo $m=\frac{ab}{c}$, ed ho $x=\frac{cm-mm}{m+c}$, quarta proporzionale dopo $m+c, c-m, m$.

582. Passiamo al secondo grado. Se sia $xx=am$, cioè $x=\sqrt{am}$, prendo una media proporzionale tra a ed m, e questa dà x. Se $x=\sqrt{(ab+bc)}$, prendo una media proporzionale tra b e $a+c$; se $x=\sqrt{(a^2+bc)}$, fatto $m=\frac{bc}{a}$, sarà $x=\sqrt{a(a+m)}$ che si sa costruire.

583. Sia ora $x=\sqrt{(a^2-b^2)}$; una media proporzionale tra $a+b$ ed $a-b$ darà x. Si può anche costruirla descrivendo

FIG. 62. col diametro AB $= a$ un semicircolo ACB; applicatavi la corda AC $= b$ ed unita CB, questa sarà $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, per esser rettangolo il triangolo ACB. Dovendo costruire $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ si prenda $m = \frac{b^2}{a}$, e poi una media proporzionale tra a ed $a + m$: ma è più semplice il valersi d'un triangolo rettangolo ACB, i cui lati AC, CB sieno a e b; l'ipotenusa AB sarà $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Essendovi più termini sotto il radicale proposto, come $\sqrt{(ab + bc + df)}$, si prenderà (581) $m = \frac{ab}{d} + \frac{bc}{d} + f$, e il radicale diventerà $\sqrt{dm}$. Se $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$, si prenderà $n = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$, e si avrà $x = \sqrt{an}$.

584. Per costruir $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{ec.})}$ si prenda
63. AB $= a$, e condotta BC $= b$ normale ad AB, sarà $CA^2 = a^2 + b^2$; condotta pure CD $= c$ normale a CA, sarà $AD^2 = a^2 + b^2 + c^2$; condotta DE $= d$ normale a DA, sarà $AE^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ec. ec.; onde l'ultima ipotenusa AF $= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 \text{ ec.})}$. Se alcuni dei quadrati sieno negativi, si prenda un sol quadrato m^2 eguale ai positivi, e un altro n^2 eguale ai negativi, e si avrà $\sqrt{(m^2 - n^2)}$.

585. Posson ridursi a queste tutte l'altre quantità radicali. Sia $\sqrt{(bc + am + dn - cq)}$: si farà $bc = i^2$, $am = k^2$, $dn = l^2$, $cq = p^2$, e dovrà costruirsi $\sqrt{(i^2 + k^2 + l^2 - p^2)}$. Se il radical proposto ha dei rotti, è facile di liberarsene. Data $\sqrt{\left(\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}\right)}$, si farà $\frac{ab}{b + c} = m$, $\frac{cd^2}{b(b+c)} = n$, e si avrà $\sqrt{b(m + n)}$. Se si abbia $\sqrt{\left(a^2 - \frac{c^2 f^2 + d^2 f^2}{ab + cd}\right)}$, si farà $c^2 + d^2 = m^2$, $\sqrt{(ab + cd)} = n$, e si avrà $\sqrt{\left(a^2 - \frac{f^2 m^2}{n^2}\right)} = \sqrt{(a^2 - p^2)}$, fatto $\frac{fm}{n} = p$.

586. Avendo più radicali come $\sqrt{[f^2 + g\sqrt{(k^2 - b^2)}]}$, si fa $\sqrt{(k^2 - b^2)} = c$, quindi $\sqrt{(f^2 + gc)} = n$. Per costruire $\sqrt[4]{a^3 c}$, farei $ac = m^2$, e avrei $\sqrt[4]{a^2 m^2} = \sqrt{am} = \sqrt[4]{a^3 c}$. Così $\sqrt[4]{abcd}$ si costruisce prendendo $ab = m^2$, $cd = n^2$ onde $\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{mn}$. Infine $\sqrt[4]{(a^2 fg + bcfk - a^3 f)}$, fatto $m = \frac{fg}{a} + \frac{bcfk}{a^3} - f$, diviene $\sqrt[4]{a^3 m}$. In generale ogni quantità composta di radicali del secondo grado, del quarto, dell'ottavo ec., può sempre costruirsi col circolo.

587. Si è supposto fin quì 1°. che la quantità data fosse omogenea; non lo essendo, come $\frac{a^3 + b}{a^2 + c}$, si renderà tale col

$m = \frac{b^2}{a}$ $a + \frac{b^2}{a} = m$

$+ m$

moltiplicarne i termini per diverse potenze di $f=1$, ciò che non cangia il valor della data, e si avrà $\frac{a^3+f^2b}{a^2+fc}$.

FIG.

588 Abbiam supposto 2°. che la quantità data abbia una sola dimensione; se ne ha più, sarà facile di ridurla a una sola quantità monomia della stessa dimensione. Sia $\frac{abc+cfg}{m+n}$; prendo (581) $p=\frac{ab+fg}{m+n}$, ed ho $pc=\frac{abc+cfg}{m+n}$.

589. Prima di venire agli esempj, si noti che le quantità geometriche, come linee, superficie ec., son *date* o *di posizione*, o *di grandezza*, o *di posizione e di grandezza*, quando o la loro situazione, o la lor misura, o l'una e l'altra sono invariabilmente assegnate. Se una quantità dicasi solamente *data*, s'intende *di grandezza*; e se dicasi *dato* un punto, s'intende data la sua distanza da una quantità che è data almeno di posizione.

590. Debba dunque condursi dal punto dato A fuor delle parallele EB, CD la retta AK in modo che la parte KI intercetta da esse eguagli una data retta c. Condotta AF normale sopra le parallele EB, CD, pongo $AF=a$, $FG=b$, $FK=x$, e sarà AK $[\surd(a^2+x^2)]$: AF (a) :: IK (c) : FG (b), onde $\frac{ac}{b}=\surd(a^2+x^2)$, ed $x=\pm\frac{a}{b}\surd(c^2-b^2)$, il che dà questa costruzione. Col centro G e col raggio c si descriva un arco che tagli in H la retta FB, ed AK parallela a GH sarà la retta cercata. Poichè FG (b): AF (a) :: FH$(\surd[c^2-b^2])$: FK $(x)=\frac{a}{b}\surd(c^2-b^2)$. Quanto al valor negativo di x, osservo che l'arco HM taglia EB in M, H; onde anche AK' parallela ad MG, serve come AK a risolvere il problema; e però FK' eguale e direttamente opposta ad FK, dà $x=-\frac{a}{b}\surd(c^2-b^2)$ (566).

64.

591. Debba anche descriversi un circolo che passi per due punti dati A, B, e tocchi la retta CF data di posizione. Il problema si riduce a trovare il punto M di contatto, dopo di che basta far passare un circolo per A, B, M. Condotta ABF, che incontri in F la data CF, si divida AB in mezzo in D. Fatta $FM=x$, $FD=a$, $AD=DB=b$, sarà $x^2=BF\times AF=a^2-b^2$ (568) onde $x=\surd(a^2-b^2)$, il che dà questa costruzione. Sul diametro DF si descriva il semicircolo DGF, e vi si applichi la corda $DG=DB$; sarà FG eguale alla cercata FM; poichè $FG=\surd(a^2-b^2)=FM$.

65.

Figure simili.

592. Due figure son *simili* quando con un

numero eguale di lati hanno tutti gli angoli respectivamente eguali e tutti i lati omologhi proporzionali. Onde i poligoni regolari di un egual numero di lati, e perciò i circoli riguardati come poligoni regolari di un' infinità di lati, son figure simili.

66. 593. *I perimetri di due figure simili* ABCDE, abcde *son tra loro come i lati omologhi* AB, ab, *o come un egual numero di lati omologhi* AB + AE + DE ec., *ab* + *ae* + *de* ec. Essendo AB : *ab* :: BC : *bc* :: DC : *dc* :: DE : *de* ec., la somma degli antecedenti o il perimetro della prima figura, è alla somma de' conseguenti o al perimetro della seconda, come AB : *ab*, o come AB + AE + DE ec. : *ab* + *ae* + *de* ec. (261). Onde i contorni di

67. due poligoni regolari ABDEFG, *abdefg* son tra loro :: il lato AG all' omologo *ag* :: la porzione BAGF all' omologa *bagf* dei perimetri; e se C è il centro dei poligoni, attesi i triangoli isosceli e simili *aCg*, ACG, si avrà AG : *ag* :: CG : C*g* :: ABDEFG : *abdefg* :: BAGF : *bagf*.

68. 594 Dunque *le circonferenze son tra loro come i raggi*, o come due archi qualunque compresi tra due raggi CA, CM; ma CM : CN :: AM : BN; dunque AMF : BND :: AOM : BoN :: AM : BN :: CM : CN.

67. 595. Gli angoli A, B essendo tanto più distanti tra loro quanto AB è più grande, il poligono sarà tanto men curvo

68. quanto son maggiori i suoi lati, cioè (308) le curvature dei poligoni simili e perciò anche dei circoli sono in ragione inversa dei lati o dei raggi (593. 594).

596. Se dunque il raggio sia infinito, la curvatura sarà zero: ma un circolo di raggio infinito ha il centro ad infinita distanza dalla circonferenza; dunque (516) i raggi di un tal circolo son paralleli tra loro e perciò tutti normali alla tangente (496), che si confonde in tal caso con la circonferenza.

66. 597. *In due figure simili* ABCDE, abcde *le diagonali* AD, AC, ad, ac, *son proporzionali tra*

loro e a' lati omologhi AE, ae. I triangoli ADE, *ade* son simili avendo un angolo E=*e*, e intorno ad esso i lati proporzionali; dunque AD: *ad*::AE:*ae*; così si troverà AC:*ac*::BC:*bc*:: AE:*ae*::AD:*ad*. In generale *le figure simili hanno proporzionali tutte le lor dimensioni omologhe*. Onde per descriver sopra un lato omologo ad AB un poligono simile al dato ABCDEF, si prenderà in AB, prolungata se occorra, la retta A*b* eguale al dato lato, e condotte dal punto A le diagonali AC, AD, AE, le parallele *bc* a BC, *cd* a CD, *de* a DE, *ef* ad EF formeranno il poligono cercato: poichè le figure ABCDEF, A*bcdef* hanno gli angoli respettivamente eguali e i lati proporzionali, attesi i triangoli simili ABC, A*bc*, e ACD, A*cd* ec.

FIG. 66.

69.

SECONDA PARTE

DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRÌA

598. Si chiama *Superficie*, o *Area* tutto ciò che si concepisce con la sola lunghezza e larghezza. Se si supponga questo Libro diviso in due parti, e ognuna in altre due ec., si giungerà a dividerlo in ogni foglio, e se l'arte non possa più suddividere, si concepiranno però possibili altre divisioni senza fine, per cui il foglio diverrebbe sempre più sottile, benchè sempre eguale al primo in lunghezza e in larghezza. Ma le molte suddivisioni confondon l'idee e non si comprende bene ciò che chiamasi *infinitamente grande* e *infinitamente piccolo*. E' però assai chia-

ro 1°. che col suddividere, uno si accosta sempre al termine ove quel foglio non avrebbe più grossezza alcuna: 2°. che per giungere a questo termine vi vorrebbe un numero veramente infinito di divisioni: 3°. che questo numero è impossibile e che non si arriverà mai al termine per quanto uno vi si accosti sempre. Ora diconsi *Limiti* della divisione quelle quantità verso cui altre tendono senza potervi mai giungere: così *la superficie è il limite del corpo*, la linea è il limite della superficie, e il punto è il limite della linea. Può dirsi ancora che la superficie d'un corpo è l'inviluppo esteriore che lo ricuopre, e su cui cadono i nostri sguardi. Per determinarne la grandezza, cerchiamo la misura naturale delle superficie.

Bisogna 1°. che sia essa medesima una superficie a cui possano riferirsi l'altre, e serva in certo modo di base a tutte le valutazioni, come l'unità è la base di tutti i calcoli: 2°. che sia la più semplice di tutte ed abbia perciò lunghezza e larghezza eguali; or la larghezza si misura prendendo la distanza dell'estremità parallele, che è la perpendicolare (489); dunque *la misura della superficie è un quadrato più o men grande, che sempre si prende per unità di superficie*: così la superficie di un pollice in lungo e in largo è la misura delle superficie valutate a pollici quadri, e la superficie di un piede quadro ha 144 pollici quadri. Di quì è che si nomina *Quadratura* la valutazion d'una superficie qualunque, ed il problema sì celebre della quadratura del circolo consiste in trovare un quadrato eguale in superficie ad un dato circolo. In generale quando vuol misurarsi una superficie, si

dee cercar quante volte essa contiene il *quadrato unità*.

599. *Misurare il quadrato* ABCD, *diverso* da *abcd* che è il *quadrato unità*. Presa $BF = bc$ e condotta a BA la parallela FE, il rettangolo BE contiene tante volte il quadrato *abcd*, quante la base AB contiene la base *ab*. Dunque se $abcd = s$, sarà $BE : s :: AB : 1$, e $BE = AB \times s$: ma la superficie del quadrato totale AC contien tante volte il rettangolo BE, quante la linea AD o AB contiene AE o *ad*; dunque $AC : BE (= AB \times s) :: AB : 1$, e però $AC = AB^2 \times s$, e poichè $s = 1$, sarà $AC = AB^2$: cioè *il quadrato è il prodotto del* quadrato unità *per il quadrato delle unità di un de' suoi lati*. Non eguaglia dunque *il quadrato d'un de' suoi lati*, mentre non si moltiplica mai una linea per un'altra: ma poichè quest'espressione è usata, noi pure l'adopreremo. 70.

600. Posto ciò, *il rettangolo* AD *è il prodotto della sua base* AB *per la sua altezza* AC; poichè il quadrato AE descritto sul lato maggiore AB, conterrà tante volte il rettangolo AD, quante AF contiene AC; dunque $AE : AD :: AF : AC$, ed $AD = \frac{AE \times AC}{AF} = \frac{AB^2 \times AC}{AB} = AB \times AC$. Così se $AB = 7$ pollici, $AC = 3$ poll., sarà $AD = 21$ pollici quadri. 71.

601. Onde 1°. il triangolo rettangolo ABC è il prodotto della sua semialtezza per la base, perchè il triangolo $BDC = ABC$ (536): 2°. *un triangolo qualunque* ABC *è il prodotto d'un de' suoi lati* AC *per la seminormale* BD *condotta dall' angolo opposto* B *su questo lato prolungato, se è necessario*; perchè $ABD = \frac{1}{2} BD \times AD$, e $CDB =$ 72.

FIG. 72. $\frac{1}{2}BD \times DC$; dunque $CDB \pm ABD = ABC = \frac{1}{2}BD\,(DC \pm AD) = \frac{1}{2}BD \times AC$.

602. Dunque *un parallelogrammo* AD *è il prodotto della base* AE *per la distanza* BC *dei lati paralleli* AE, BD. Infatti condotta la diagonale BE, si ha $AD = 2AEB$ (537) $= AE \times BC$. (73.)

603. *Il trapezio* ABCD *è il prodotto della semisomma delle sue basi parallele* AD, BC *per la lor distanza* CF; poichè condotta la diagonale AC, si avrà $ABC = \frac{1}{2}AE \times BC = \frac{1}{2}BC \times CF$, e $ACD = \frac{1}{2}AD \times CF$; dunque $ABC + ACD = \frac{1}{2}CF\,(BC + AD) = ABCD$. (74.)

604. *Il poligono regolare è il prodotto del suo perimetro per la seminormale condotta dal centro sopra un de' lati*; poichè i raggi dal centro agli angoli dividono il poligono in tanti triangoli eguali e simili quanti sono i lati: ma ciascun di questi triangoli è il prodotto del lato del poligono per la seminormale; dunque il poligono è il prodotto del perimetro per la seminormale stessa. Onde una porzione BCG del poligono, compresa tra due raggi CB, CG e i lati BA, AG, è il prodotto di $BA + AG$ per la seminormale. (67.)

605. Dunque *il circolo è il prodotto della circonferenza per il semiraggio, e il settore è il prodotto del semiraggio per l'arco che lo termina*. Perciò per aver la quadratura del circolo bisognerebbe conoscer la ragione del raggio alla circonferenza, la quale non si è potuta determinare che per approssimazione; e si è trovato che il diametro d'un circolo sta alla sua circonferenza presso a poco come 7 a 22, o come 113 a 355, o più esattamente come 1 a 3,14159 26535897932384626433832795028841971693993

75105820974944592307816406286208998628034
8253421170679821480865132723066470938446,
approssimazione quasi infinita.

Poichè l'uso di questo numero è frequentissimo, ne aggiunghiamo il logaritmo, cioè

$l3,1415$ ec. $= 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435$

606. Sia $\pi = 3,14159$ ec.; sarà $1 : \pi$ la ragion del diametro alla circonferenza. Sia r il raggio d'un circolo qualunque, e si avrà $1 : \pi :: 2r : 2r\pi$, sua circonferenza. La superficie è πr^2 (605).

607. Come per il diametro 1 si ha la circonferenza $\pi = 3.1415926$, così per il raggio 1 si avrà una semicirconferenza espressa parimente per π. Chiamato dunque γ il numero dei gradi o minuti o secondi ec. della semicirconferenza, g il numero dei gradi ec. di un arco dato, ed x l'arco stesso in parti di raggio, sarà $\gamma : \pi :: g : x = \frac{g\pi}{\gamma}$. Perciò fatto $\gamma = 180, = 10800, = 648000$, secondochè g sarà espresso in gradi o minuti o secondi, avremo $\frac{\pi}{\gamma} = arc.1^{\circ}, = arc.1', = arc.1''$, in parti del raggio 1, ed $x = g\,arc.1^{\circ}$. ec. La Tavola degli archi ridotti in parti di raggio si troverà sul fine di questo Libro, pag. XXXVI. Osservisi però, che se il raggio è a, si ha $x = ag.arc.1^{\circ}$. ec. Così troveremo $360^{\circ} = 360.a.arc\ 1^{\circ}$. ec.

608. All'incontro se dato l'arco x in parti di raggio, si cerchi l'arco stesso in gradi e minuti, si avrà $g = \frac{\gamma x}{\pi}$.

Chiamando r°, r', r'' il raggio 1 espresso in gradi o minuti ec. ed essendo $\pi : 1 :: \gamma^{\circ} : r^{\circ} :: \gamma' : r' :: \gamma'' : r''$, ovvero generalmente $r = \frac{\gamma}{\pi} = \frac{1}{arc.}$ (607), si avrà $g = xr^{\circ}, = xr'$ ec. oppure se il raggio è a, $g = \frac{xr^{\circ}}{a}, = \frac{xr'}{a}$ ec. come è chiaro.

Per facilitar questi calcoli, ecco i logaritmi degli archi ridotti in parti di raggio, e del raggio ridotto in archi.

$l\,arc.\,1^{\circ} = 8,24187\ 73675\ 90827\ 78455$	$l\,r^{\circ} = col.\,arc.\,1^{\circ} = 1,75812\ 26324$ ec.
$l\,arc.\,1' = 6,46372\ 61172\ 07184\ 15204$	$l\,r' = col.\,arc.\,1' = 3,53627\ 38827$ ec.
$l\,arc.\,1'' = 4,68557\ 48668\ 23540\ 51953$	$l\,r'' = col.\,arc.\,1'' = 5,31442\ 51331$ ec.

Di quì si trova, fatto $x = 1$, che il raggio 1 diventa $g = 57^{\circ},296 = 57^{\circ}, 17', 44'', 8 = 206265''$.

609. Un poligono irregolare si divide in triangoli, e la loro somma è il poligono pro-

posto; ciò è evidente. Ma se si voglia un triangolo eguale al dato poligono ABCDE, condotta la diagonale CE, la parallela CE a DG che incontri in G il lato AE prolungato, e poi CG, sarà il triangolo CGE=CDE per la base ed altezza eguali; dunque ABCDE=ABCG. Condotta ora la diagonale CA, la parallela BF e congiunta CF, si proverà egualmente il triangolo FCG=BCGA, e perciò eguale al pentagono dato: e poichè con questo metodo si può ridurre qualsivoglia poligono in un triangolo, ed è facile di far d'un triangolo un parallelogrammo, d'un parallelogrammo un rettangolo, e d'un rettangolo un quadrato, *può sempre trovarsi la quadratura esatta di tutte le figure rettiline*. Ecco ora alcuni evidenti teoremi, molto utili nella Sintesi.

75.

I. *Se la retta* FE *sia divisa comunque in* A, *il rettangolo* FE×EA *sarà eguale al rettangolo* FA×AE *col quadrato di* AE; cioè fatta FA$=a$, AE$=b$, sarà $(a+b)b=ab+b^2$.

II Poste le stesse cose, *il quadrato di* FE *sarà eguale ai quadrati di* FA, AE *col doppio rettangolo* FA×AE: cioè $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Onde se sia $b=a$, verrà $(a+a)^2=a^2+2a^2+a^2=4a^2$, cioè *se* FE *sia divisa in mezzo, il quadrato di* FE *sarà quadruplo del quadrato di* FA, *e i quadrati di* FA, AE *saranno eguali al doppio rettangolo* FA×AE.

Ma se $a>b$, fatto $a-b=c$, si avrà $a^2-2ab+b^2=c^2$, onde $a^2-2ab+b^2>0$, e quindi $a^2+b^2>2ab$: cioè *se* FE *non sia divisa in mezzo, i quadrati di* FA, AE *saranno maggiori del doppio rettangolo* FA×AE.

III. Poste le stesse cose, *il quadrato di* FE

sarà eguale ai rettangoli FE×EA *ed* EF×FA: cioè $(a+b)^2=(a+b)a+(a+b)b$.

IV. Poste le stesse cose, *i quadrati di* FE, AE *saranno eguali al doppio rettangolo* FE×EA, *e al quadrato di* FA: cioè $(a+b)^2+b^2=2b(a+b)+a^2$.

V. *Se la retta* DA *sia divisa in mezzo in* G *e comunque in* F, *il rettangolo* AF×FD *col quadrato di* FG *sarà eguale al quadrato della metà* DG: cioè fatto $AG=a$, $GF=b$, sarà $(a+b)(a-b)+b^2=a^2$. 74.

VI. Poste le stesse cose, *i quadrati* di AF, FD *saranno doppj dei quadrati di* AG, GF: cioè $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

VII. E *la differenza dei quadrati di* AF, FD *sarà quadrupla del rettangolo di* AG×FG: cioè $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

VIII. *Se alla retta* FE *divisa in mezzo in* A *si unisca la retta* EG, *i quadrati di* FG, GE *saranno doppj dei quadrati di* FA, AG: cioè fatta $FE=a$, $EG=b$, sarà $(2a+b)^2+b^2=2(a^2+(a+b)^2)$. 75.

IX. Poste le stesse cose, *il rettangolo* FG×GE *col quadrato di* AE *sarà eguale al quadrato di* AG: cioè $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$.

Paragone delle superficie.

610. Se B, b sono le basi, ed A, a l'altezze di due triangoli, la loro superficie sarà $S=\frac{BA}{2}$, $s=\frac{ba}{2}$; dunque $S:s::BA:ba$. Onde I°. le superficie di due triangoli sono in ragion composta delle basi e delle altezze: II°. due triangoli con la stessa base o basi eguali son come l'altezze; poichè $B=b$ dà $S:s::A:a$. III°. due triangoli con altezze eguali son come le basi; poichè $A=a$ dà $S:s::B:b$. IV°. due triangoli sono eguali in

E e

superficie 1°. se tra due lati eguali a due lati abbian l' angolo supplemento l' un dell' altro; poichè uniti i due angoli insieme, sarà $BA=ba$, onde $S=s$: 2°. se le lor basi e le loro altezze sono in ragione inversa; poichè $B:b::a:A$ dà $ba=BA$ ed $S=s$. V°. *due triangoli simili stanno come i quadrati delle lor dimensioni omologhe;* poichè in questo caso $B:b::A:a$; dunque $S:s::B^2:b^2::A^2:a^2$.

611. Onde 1°. il triangolo equilatero circoscritto è quadruplo dell' iscritto, poichè il lato dell' uno è doppio del lato dell' altro (550): 2°. il quadrato circoscritto è doppio dell' iscritto, perchè chiamato r il raggio del circolo, i lor lati sono $2r$, $r\sqrt{2}$ (545. 550); ora $(2r)^2$ è doppio di $(r\sqrt{2})^2$.

76. 612. Se due triangoli BAC, bac hanno un angolo eguale A, a, saranno tra loro come i prodotti de' lati intorno all' angolo eguale. Poichè condotte le normali BD, bd sui lati AC, ac, sarà $BAC:bac::BD\times AC:bd\times ac::AC::ac\times\frac{bd}{BD}$; ma i triangoli simili ABD, abd danno $\frac{bd}{BD}=\frac{ab}{AB}$; dunque $BAC:bac::AC:\frac{ac\times ab}{AB}::AC\times AB:ac\times ab$.

77. Per farne un' applicazione, debba condursi dal dato punto B la retta BF in modo che il triangolo ACD resti diviso in due parti AEF, EFDC nella ragione di $m:n$. Poichè $AEF:EFDC::m:n$, sarà $AEF+EFDC\ (=ACD):AEF::m+n:m::AC\times AD:AE\times AF$. Condotta ora BI parallela ad AC, e fatte $BI=a$, $AI=c$, $AC=b$, $AD=d$ e $AF=x$, i triangoli simili AEF, BIF daranno $FI\ (x+c):IB\ (a)::FA\ (x):AE=\frac{ax}{x+c}$; onde $m+n:m::bd:\frac{ax^2}{x+c}$ e però $x^2-\frac{bdmx}{a(m+n)}=\frac{bdcm}{a(m+n)}$; dunque $x=\frac{bdm\pm\sqrt{[b^2d^2m^2+4abdmc\,(m+n)]}}{2a\,(m+n)}$.
Di questi due valori il solo positivo scioglie il Problema. Per saper ciò che l' altro significa, si osservi che se AC, AD (b, d) fossero negative, cioè divenissero AC′, AD′, non si cangierebbe l' equazione trovata; onde ella insegna anche a condurre dal punto B la retta BF′E′ che divide il triangolo A′D′C′ nella ragione di $m:n$. Dunque il valor negativo significa AF′ direttamente opposta ad AF (566). Se il punto B fosse sul lato AC come in E, sarebbe AI $(c)=0$, e $AF=x=\frac{bdm}{a(m+n)}$; e se questo punto fosse dentro al triangolo, si farebbe c negativa.

613. *In due figure simili l'aree son proporzionali ai quadrati delle loro dimensioni omologhe*. Poichè se A, B ed a, b sieno le due dimensioni omologhe il cui prodotto dà l'aree S, s delle figure, sarà $S : s :: AB : ab$: ma per la natura delle figure simili, $A : a :: B : b$; dunque $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$.

614. Onde 1°. *I circoli sono come i quadrati de' raggi, de' diametri, delle circonferenze, in generale delle loro dimensioni omologhe*: 2°. Una figura qualunque ALMNC (a) costruita sull'ipotenusa AC d'un triangolo rettangolo, eguaglia la somma delle due figure simili ADFGB (b), BHIKC (c) costruite sui lati. Poichè $a : AC^2 :: b : AB^2 :: c : BC^2$; dunque $a : b + c :: AC^2 : AB^2 + BC^2$: ma $AC^2 = AB^2 + BC^2$; dunque $a = b + c$. Onde il semicircolo ACB sull'ipotenusa AB eguaglierà i semicircoli ACD, BCF sui lati AC, CB, e tolte le parti comuni AECA, CGBC, gli spazj curvilinei ADCEA + CFBGC sono eguali al triangolo ABC. Questi spazj si chiamano le *Lunule d'Ippocrate*. Ecco altri teoremi. 78. 79.

I. *Di due poligoni regolari* 2mCZX, 2nCZF *circoscritti ad un circolo, il maggiore è* 2mCZX *che ha il minor numero* m *di lati*. Chiamo T, t, t' i triangoli CZX, CZF, CFX, ed S, s, s' i settori CZr, CZf, Cfr, onde $T = t + t'$, $S = s + s'$: e poichè $t' >$ CFR e CTF $> t$, sarà (192) $t' : t >$ CFR : CTF; ma CFR : CTF $:: s' : s$ (614); dunque $t' : t > s' : s$ e $t' + t : t > s' + s : s$, cioè $T : t > S : s$ ovvero $2mT : 2nt > 2mS : 2ns$; ed essendo $2mS = 2ns$ perchè i poligoni son circoscritti allo stesso circolo, avremo $2mT > 2nt$. 36.

II. *Il circolo è medio proporzionale tra due poligoni regolari simili, l'uno circoscritto, l'altro isoperimetro*. Posto r il raggio del circolo e $2q$ il perimetro del poligono circoscritto, saranno $r^2\pi$, qr le lor superficie. Sia p l'isoperimetro al circolo, e chiamata r' la sua normale dal centro, sarà $p = \frac{qr'^2}{r}$ (613) $= rr'\pi$ (604), onde $r' = \frac{r^2\pi}{q}$ e $p = \frac{r^3\pi^2}{q}$: ora $:: qr : r^2\pi : \frac{r^3\pi^2}{q}$. Onde come $qr > r^2\pi$, anchè $r^2\pi > \frac{r^3\pi^2}{q}$, cioè *il circolo è il massimo di tutti i poligoni isoperimetri*.

III. *Di due poligoni regolari isoperimetri quello che ha più lati è maggiore*. Sieno p, p' due isoperimetri d' uno stesso circolo $r^2\pi$, e P, P' due a lui circoscritti relativamente simili agli isoperimetri: avremo (II) $r^2\pi = Pp = P'p'$ e supposti i più lati in p, P, sarà (I) $P' > P$; dunque $P' : P'p' > P : Pp$, cioè $1 : p' > 1 : p$ e $p > p'$. D' onde pur si deduce che il circolo avendo infiniti lati, è il massimo de' suoi isoperimetri.

615. Sciogliamo ora alcuni problemi. I. *Trovare una figura* ALMNC *simile a due date* ADFGB, BHIKC *e loro somma*. Posti in angolo retto i lati omologhi AB, BC, sarà AC il lato omologo della figura cercata, che con ciò si descriverà facilmente (597). Onde un circolo è eguale a due dati se essendo AB, BC i lor diametri, l'ipotenusa AC sia il suo.

78.

II. *Trovare una figura simile a due date e loro differenza*. Sul lato AC della maggiore si descriva un semicircolo, in cui si applichi il lato omologo BC della minore, e sarà AB l'omologo della cercata; poichè $AB^2 = AC^2 - BC^2$. Onde può aversi un circolo eguale alla differenza di due dati.

III. *Trovare una figura simile a molte date e loro somma e differenza*. Sieno A, B, D ec. i lati delle figure da sommarsi, omologhi ad a, b, d ec. di quelle da sottrarsi, ed x l' omologo della richiesta; sarà $x^2 = A^2 + B^2 + D^2$ ec. $- a^2 - b^2 - d^2$ ec. quantità facile a costruire (584). Può dunque farsi un circolo che sia somma o differenza di quanti circoli si vorrà.

IV. *Trovare una figura simile a una data che sia a quella nella ragione* m : n. Chiamo a un lato della data, ed x l' omologo della cercata: dunque $a^2 : x^2 :: m : n$, ed $x = \sqrt{\frac{a^2 n}{m}} = \frac{a}{m}\sqrt{mn}$. Onde possono aversi due circoli in una ragione anche incommensurabile $m : n$.

71. V. *Dato il perimetro* p *e la diagonale* a *d' un rettangolo* AD, *trovarne la superficie e i lati*. Sia $AB = x$, $BD = y$, e si avrà $x + y = \frac{p}{2}$, $x^2 + y^2 = a^2$, onde $y = \frac{p}{2} - x = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; quadrando e risolvendo si trova $x = \frac{p}{4} + \sqrt{(\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{16})}$, $y = \frac{p}{4} - \sqrt{(\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{16})}$.

VI. *Dati i tre lati d' un triangolo, trovarne la superficie.* Sia $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$, la normale $BD = x$, sarà $AD = \sqrt{(b^2 - x^2)}$, $DC = \sqrt{(c^2 - x^2)}$, $AD + DC = a = \sqrt{(b^2 - x^2)} + \sqrt{(c^2 - x^2)}$, e però $x = \frac{1}{2a} \sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]}$, e la superficie cercata $\frac{ax}{2} = s = \frac{1}{4} \sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]} =$ (476. XXXI.) $\frac{1}{4} \sqrt{[(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)(a + b + c)]}$. Sia la semisomma dei tre lati $\frac{a + b + c}{2} = q$, e sarà $2q - 2a = b + c - a$, $2q - 2b = a + c - b$, $2q - 2c = a + b - c$; onde $s = \sqrt{[q(q - a)(q - b)(q - c)]}$. Se C′N è il raggio del circolo iscritto nel triangolo ABC, condotte C′B, C′A, C′C e le normali C′M, C′P, sarà il triangolo $ABC = AC'B + BC'C + CC'A = s = C'N \frac{(a + b + c)}{2}$; dunque $C'N = \frac{s}{q} = \ldots\ldots \sqrt{\frac{[(q - a)(q - b)(q - c)]}{q}}$, e poichè se l' angolo A è retto, $C'N = q - c$ (531), sarà $q : q - a :: q - b : q - c$. 80.

VII. *Data l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo e la ragion dei due lati, trovarne l' area.* Sia $AC = a$, $BC : AB :: m : n$, $AB = x$, sarà $BC = \frac{mx}{n}$ e si avrà $x^2 + \frac{m^2x^2}{n^2} = a^2$, onde $x^2 = \frac{a^2n^2}{m^2 + n^2}$, e l' area richiesta $\frac{mx^2}{2n} = \frac{a^2mn}{2(m^2 + n^2)}$. 81.

VIII. *Data la ragione e la somma dei tre lati d' un triangolo, trovar l' area.* Sia $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$, il perimetro $p = x + y + z$, la ragione dei lati $x : y : z :: a : b : c$, sarà $x + y + z (= p) : a + b + c :: x : a :: y : b :: z : c$, e perciò $x = \frac{ap}{a + b + c}$, $y = \frac{bp}{a + b + c}$, $z = \frac{cp}{a + b + c}$, e di quì l'area (VI). 80.

IX. *Dato il perimetro d' un triangolo rettangolo e la ragion dell' ipotenusa alla somma dei lati, trovar l' area.* Sia p il perimetro, $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$; sarà $x : y + z :: m : n$; e però $x + y + z (= p) : x :: m + n : m$, onde $x = \frac{mp}{m + n}$, $y + z = \frac{np}{m + n}$, $y^2 + 2yz + z^2 = \frac{n^2p^2}{(m + n)^2}$; ma $y^2 + z^2 = x^2 = \frac{m^2p^2}{(m + n)^2}$; dunque l' area cercata $\frac{yz}{2} = \frac{p^2}{4}\left(\frac{n - m}{m + n}\right)$. 81.

Superficie Piane.

616. *La Superficie piana* o il *Piano* è quello in cui posson condursi per ogni verso delle linee rette: onde il piano è tra le superficie ciò

che la retta è tra le linee. Ma per farne un'idea distinta, concepisco il triangolo rettangolo *subli-*
82. *me* ABF che giri intorno ad AB: se nella sua rivoluzione la retta BF lasci le vestigia del suo passaggio, queste saranno tutte in un piano circolare, mentre quelle dell'obliqua AF formeranno una superficie convessa.

617. Da questa descrizione risulta 1°. che se una retta ha due punti comuni con un piano, tutti gli altri ancora son nel medesimo piano, e che perciò la retta e il piano prolungati son sempre confusi: 2°. che una retta AB normale a un piano, lo è a tutte le rette FB, GB, DB, HB, LB che sono in esso e passano per l'estremità B della retta; onde da un punto A fuori del piano una sola normale AB può condursi sul piano stesso, altrimenti si potrebbero dal medesimo punto A condurre due normali AB, AF sulla medesima retta FB, il che è assurdo: si proverà egualmente che da un punto B del piano una sola normale può alzarsi sopra di esso: 3°. che la distanza da un punto a un piano si misura dalla normale condotta da questo punto sul piano: 4°. che due rette AB, MN inclinate egualmente dalla medesima parte sul piano PQ, son parallele, perchè gli angoli ABC, MNC sono eguali.

618. *Se due piani si tagliano, la lor intersezione comune è una linea retta*: è una linea, perchè i due piani son superficie e non hanno grossezza; ed è retta, perchè se per due punti A,
83. B comuni ai piani si conduca la retta AB, questa dovrà essere nell'uno e nell'altro piano; dunque è la loro intersezione comune.

619. Dunque *tre punti* B, A, C *non posti in*

FIG. 83.

linea retta determinano la posizione d' un piano BC; poichè può esservi un' infinità di piani diversi HA, BC, coi due punti comuni A, B, ma un solo di questi piani può passar per il punto determinato C. Onde 1°. tre punti non posson esser comuni a più d' un piano, se non sieno in linea retta: 2°. due rette CA, AD che si tagliano, sono in un medesimo piano PQ, poichè i tre punti C, A, D determinano la posizione delle due rette CA, AD; onde un angolo CAD determina la posizione d' un piano: 3°. una retta AB normale a due rette FB, GB nel loro punto d' intersezione, è normale al piano PQ che esse determinano. 82.

620. Suppongo ora che due piani si seghino nella retta AB, e condotte CA, DA normali ad AB nei piani CG, DH, l'angolo CAD misurerà l' inclinazione dei due piani DH, CG, la quale perciò si misura come quella delle rette; onde 1°. un piano che ne incontra un altro fa con esso due angoli, la cui somma è 180°: 2°. nell' intersezion di due piani gli angoli al vertice son eguali: 3°. se più piani si taglino sulla stessa retta, la somma di tutti gli angoli sopra e sotto l' intersezione è di 360°: 4°. un piano che ne taglia due o più paralleli, fa con essi gli angoli alterni eguali ec. 83.

621. Se un piano tagli due o più piani paralleli, le rette d' intersezioni saran tutte parallele, altrimenti prolungate s' incontrerebbero, e i loro piani non sarebbero più paralleli.

622. Se il piano CG è normale al piano PQ, e da un punto B di CG si conduca la normale BA sull' intersezione comune FC, sarà BA normale al piano PQ; poichè se nel piano PQ si

FIG. 83. conduca da A la DA normale a CA; l'angolo BAD sarà retto a cagione dei piani normali: dunque BA sarà normale alle due rette CA, AD, e perciò (619) al loro piano PQ.

623. *Se due piani* DH, CG *son normali ad un terzo* PQ, *lo sarà anche la loro intersezione* BA; poichè in tal caso BA è normale alle due rette CA, AD; dunque anche al piano PQ.

Linee rette tagliate da Piani paralleli.

624. Se da un punto A si conducano a tra- 84. verso di due piani paralleli PQ, *pq* quante rette si voglia A*d*D, A*f*F ec., saranno tutte tagliate proporzionalmente; e le figure DFGEH, *dfgeh* saranno simili; poichè 1°. fatto passare un piano per i tre punti A, D, F, le sue intersezioni coi piani paralleli PQ, *pq* saranno le rette parallele DF, *df* (621); dunque i triangoli ADF, A*df* saranno simili. Lo stesso si proverà de' triangoli AFG, A*fg*, AEG, A*eg* ec.; onde AD : A*d* :: DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg* :: AG : A*g* ec. :: le perpendicolari AB, A*b* condotte da A sui piani PQ, *pq*; 2°. essendo DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg* :: ec., si ha DF : *df* :: FG : *fg* :: EG : *eg*, ec. Ora se si conducano DG, *dg*, si proverà (556) che i triangoli ADG, A*dg* son simili, e perciò AD : A*d* :: DG : *dg* :: DF : *df* :: FG : *fg*; dunque i triangoli DFG, *dfg* hanno tutti i lati omologhi proporzionali, e perciò son simili, onde l'angolo F = *f*; si proverà lo stesso degli angoli G, *g*, ed E, *e*, ec.; dunque tutti gli angoli della figura DFGEH son respettivamente eguali a quelli della figura *dfgeh*: ma per altra parte tutti i loro lati omologhi son proporzionali; dunque esse son simili.

625. Dall'esser l'angolo F = *f* si deduce che

FIG. 84.

se due angoli DFG, *dfg* hanno i loro lati respettivamente paralleli, saranno eguali benchè situati in diversi piani. E dall'esser simili le figure DFGEH, *dfgeh* segue che le lor superficie stanno fra loro: : $DF^2 : df^2 :: AD^2 : Ad^2 ::$ il quadrato BA^2 della distanza del punto A dal piano PQ, al quadrato bA^2 della distanza del medesimo punto A dal piano *pq*; e perchè la ragione di $AB^2 : Ab^2$ è costante per lo stesso punto A qualunque sia il numero delle rette AD, AF ec., le superficie delle figure DFGEH, *dfgeh* saranno sempre fra loro nella ragione costante di $AB^2 : Ab^2$, e i loro perimetri nella ragione parimente costante di AB : A*b*. Che se le rette A*d*D, A*f*F ec. in vece di partir dal punto A sieno parallele, tutte le rette *d*D, *f*F, *g*G ec. saranno eguali, e le figure diverranno eguali e simili.

TERZA PARTE

DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRÌA.

626. SI chiama *Solido* ciò che ha le tre dimensioni dell' estensione. Un solido può formarsi con varj piani talmente uniti ne'loro angoli, da chiuder per ogni parte uno spazio; allora si avrà un *Poliedro* le cui *faccie* saranno i piani che concorrono a formarlo, e i cui *angoli solidi* risulteranno dal concorso degli angoli piani. Se il poliedro ha quattro faccie, si nomina *Tetraedro*, se ne ha sei, *Esaedro* ec. Quando tutti gli angoli d'un poliedro son eguali, e tutte le sue faccie son piani eguali e simili, il poliedro è *regolare*.

627. Si misurano gli angoli solidi col prender la somma degli angoli piani che gli formano. L'angolo solido B per esempio, ha per misura la somma dei gradi degli angoli piani ABC, CBD, DBE, EBA. Bisognano per lo meno tre angoli piani per formarne un solido C, e la somma di due di questi angoli ACB+BCD è sempre maggiore del terzo ACD, poichè i due piani ABC, CBD unendosi nella retta sublime CB, necessariamente si soprapporranno se si abbassino sull'angolo o sul piano ACD.

85.

628. Dunque *un angolo solido è minore di* 360°: poichè nel solido quadrangolare BACDE i due angoli AEB+DEB son maggiori dell'angolo AED con cui formano l'angolo solido E (627); dunque il lor supplemento è minore di quello dell'angolo AED. Lo stesso è del supplemento di EAB+CAB relativamente a quello dell'angolo CAE ec. Dunque la somma de' supplementi degli otto angoli inferiori delle faccie del solido (somma eguale all'angolo solido B) è minore della somma de' supplementi dei quattro angoli della base che è 360°; dunque l'angolo solido è minor di 360°.

629. Onde *cinque soli sono i Poliedri regolari, cioè tre le cui faccie son triangoli equilateri, uno le cui faccie son quadrati, ed uno le cui faccie son pentagoni*. Poichè bisognando almeno tre angoli per fare un angolo solido, che intanto non può esser di 360°, in cinque soli casi può farsi un angolo solido con piani di poligoni regolari: 1°. l'angolo d' un triangolo equilatero essendo di 60°. tre de' suoi angoli fanno un angolo solido di 180°, e quattro di questi triangoli posson fare un *Tetraedro*: 2°. quattro triangoli equilateri fanno un angolo solido di 240°, e formano un corpo regolare d' otto faccie detto *Ottaedro*: 3°. cinque triangoli equilateri fanno un angolo solido di 300°, e può comporsene un corpo regolare di 20 faccie chiamato *Icosaedro*; ma sei farebbero 360°, e questo non può essere un angolo solido: 4°. l'angolo del quadrato essendo 90°, tre faranno un angolo solido di 270°, e potrà comporsene un corpo regolare di sei faccie che si chiama *Esaedro*; ma quattro farebbero 360°, i quali non posson formare un

FIG.

angolo solido: 5°. l'ango[illegible] pentagono regolare valendo 108°, tre formeranno un a[illegible] solido di 324°, e potrà farsene un corpo regolare di 12 faccie nominato *Dodecaedro*; ma quattro farebbero 432°, angolo solido impossibile. In fine l'angolo dell'esagono essendo 120°, tre fanno 360°, che non può essere un angolo solido: molto meno tre Ettagoni, tre Ottagoni ec.; dunque i corpi regolari non son più di cinque.

630. Occorrendo almen tre angoli per fare un angolo solido, e lasciando essi un vuoto nella base, vi vuole un altro piano per chiuderli. Perciò il più semplice de' poliedri è la piramide triangolare o il tetraedro. Se ella abbia per base un poligono d'un maggior numero di lati, le faccie cresceranno, finchè la base divenuta un circolo, la piramide diventa un *Cono*. La piramide ed il cono son *retti* quando una perpendicolare partendo dal vertice passa per il centro della base, e sono *obliqui* se non vi passa. 86.

631. Altro modo di formare i solidi. Se la base DGKH salga parallelamente a se stessa lungo una linea DA, la somma di tutti gli elementi eguali a questa base forma un solido che si chiama *Prisma*. Egli è *retto* o *obliquo* secondo che DA è perpendicolare o inclinata sulla base. Dunque *il prisma è un solido terminato da basi eguali e parallele, e da faccie che son parallelogrammi*: è *triangolare* quando il poligono generatore è un triangolo, *quadrangolare* quando è un quadrilatero; e se questo quadrilatero è un parallelogrammo, il prisma si chiama *Parallelepipedo*, che sarà *rettangolo* quando la base è rettangola, e la linea lungo la quale si fa il movimento, è normale a questa base. Se la base fosse un quadrato, il cui lato fosse eguale alla linea d'altezza, il prisma sarebbe un esaedro regolare, che si chiama anche *Cubo*: onde il cubo è un prisma di sei faccie eguali e quadrate. Ma se

87. 91. 87. 96.

FIG. 88. e 89. il poligono generatore è un circolo, il prisma divien rotondo e si chiama *Cilindro*, che è *retto* o *obliquo* secondo la posizion della linea di movimento riguardo alla base.

632. Terzo modo di formare i solidi. Se intorno a una linea immobile CA giri una figura 90. qualunque AFBC, ella genererà un solido chiamato *solido di rivoluzione*, il cui *asse* è la linea CA: onde un punto qualunque B di questa figura segna nel muoversi la circonferenza d'un circolo, il cui raggio BP è normale all'asse e il cui centro è P; perciò *tutte le sezioni fatte in un solido di rivoluzione con piani normali al suo asse, son circoli*. Se il poligono generatore è un rettangolo, il solido sarà un cilindro retto; se è un triangolo rettangolo, sarà un cono retto; se è la metà d'un poligono di molti lati, sarà una *Sferoide*; e se è la metà d'un circolo, sarà una *Sfera*.

633. *La sfera è* dunque *un solido, tutti i punti della cui superficie sono egualmente lontani da un punto interno, che si chiama* centro. Onde ogni retta che passa per il suo centro e termina da ambedue le parti alla sua superficie, è eguale all'asse. Può dunque prendersi per asse della sfera ogni retta che passando per il centro, ha le sue estremità nella superficie. Onde tutte le sezioni fatte in una sfera con piani che passano per il centro, son circoli eguali e si chiamano *circoli massimi*.

634. In generale, la sezione d'una sfera tagliata da un piano sarà sempre un circolo: poichè un diametro normale al piano segante può riguardarsi come l'asse della sfera, nel qual caso la sezione è un circolo (632). Questi circoli che non passano per il centro, diconsi *minori*, e sono tanto più piccoli quanto più son lontani dal centro.

Misura delle superficie de' Solidi.

635. La superficie d'un solido senza le basi si chiama semplicemente *superficie*, e *superficie totale* quella delle basi e delle faccie.

636. La superficie d'un prisma è il prodotto della lunghezza BC nel contorno GIHG della sezione fatta nel prisma da un piano normale a BC: poichè ella risulta dai parallelogrammi BCED + ABCF + AFED = BC×GI + BC×IH + BC×GH = BC×GIHG. 91.

637. Onde *la superficie d'un prisma retto, e però anche quella di un cilindro retto, è il prodotto del contorno della sua base per la sua altezza.*

La superficie del cilindro obliquo ABCD è pure il prodotto della sua lunghezza AB nel contorno GMIMG della sezione fatta da un piano normale ad AB, e questa sezione è un' *ellisse*; poiche se per un punto P dell' asse GI passi il circolo LMK parallelo ad AD, la sua intersezione col piano GMI sarà la retta MPM normale all' asse GI. Sia dunque $GP = x$, $PM = y$, $LP = z$, $GI = a$, $LK = BC = AD = b$, e per la proprietà del circolo si avrà $y^2 = bz - z^2$: ma i triangoli simili LPG, PKI danno $z = \frac{bx}{a}$; dunque $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$, equazione all' *ellisse*. Vedete le Sezioni Coniche. 89.

638. La superficie della piramide *regolare* retta è eguale al semiperimetro del poligono *regolare* che le serve di base, moltiplicato per la normale o *apotema* condotto dal vertice sopra un lato della base. Ciò è manifesto. Onde la superficie del cono retto è il prodotto della semicirconferenza della sua base per l'apotema condotto a qualunque punto della circonferenza.

639. Debba misurarsi la superficie del *cono retto troncato* ACED il cui piano DE è parallelo alla base AC. Fatta $AC = a$, $DE = b$, EC (resto dell' apotema BC) $= d$, $BE = x$, sarà $x + d : a :: x : b$, onde $x = \frac{bd}{a - b}$ ed $x + d = BC = \frac{ad}{a - b}$. Sia 92.

92. π il numero 3,141 ec. (606) e saranno $b\pi$, $a\pi$ le circonferenze delle basi DE, AC, e $BC\times\frac{a\pi}{2}$, $BE\times\frac{b\pi}{2}$ le superficie de' coni retti ABC, BDE (638); perciò la lor differenza o la superficie del cono troncato $=\frac{ad}{a-b}\times\frac{a\pi}{2}-\frac{bd}{a-b}\times\frac{b\pi}{2}=\frac{\pi d}{2}\times\frac{a^2-b^2}{a-b}=d\times\frac{1}{2}\pi(a+b)$; ma $\frac{1}{2}\pi(a+b)$ è la circonferenza del circolo medio tra le basi DE, AC; dunque *la superficie del cono troncato è eguale al prodotto del resto dell'apotema per la circonferenza media proporzional-aritmetica tra quelle delle basi.*

93. 640. Giri il semipoligono regolare SAN intorno all'asse SN e cerchiamo la superficie della sferoide da lui generata. Condotte sull'asse SN le normali BQ, AR, EK, IL, è chiaro che i due lati BS, IN del poligono descrivono dei coni retti (632), il lato AE descrive un cilindro, e gli altri BA, IE descrivon tronchi di cono retto: onde se dal centro C si conducano sui lati SB, BA, AE le normali CV, CM, CZ che gli dividono in mezzo e son tutte eguali (539), i triangoli rettangoli CVS, BQS con l'angolo in S comune, saranno simili e si avrà VS : QS :: CV : BQ :: $2CV\pi$: $2BQ\pi$ (606), e però $VS\times 2BQ\pi$ (cioè la superficie del cono descritto da BS (638)) $=QS\times 2CV\pi$. Di nuovo condotte da B, M sopra AR, SC le normali BD, MP, i triangoli CMP, ABD con tutti i lati omologhi normali, son simili (521), e però AB : BD (= QR) :: CM (= CV) : MP :: $2CV\pi$: $2MP\pi$, ed $AB\times 2MP\pi$ (cioè la superficie del cono troncato descritto da AB (639)) $=QR\times 2CV\pi$. Infine il cilindro descritto da AE =

FIG. 93.

RK e da $EK = CV$, ha per superficie $RK \times 2CV\pi$. Perciò *la superficie della sferoide* $= (SQ + QR + RK + KL + LN) 2CV\pi = SN \times 2CV\pi$, *cioè è eguale al prodotto del suo asse per la circonferenza del circolo al quale è circoscritta*. Or la sfera è una sferoide d'infiniti lati; dunque *la superficie della sfera è* $4r^2\pi$, *prodotto dell'asse* $2r$ *per la circonferenza* $2r\pi$ *d'un suo circolo massimo*. *E' la superficie d'un* segmento sferico *nato dalla rivoluzione del semisegmento circolare* BCP, *è* $2r\pi x$, *prodotto dell' altezza* $CP = x$ *del segmento per la circonferenza* $2r\pi$ *del circolo massimo della sfera*.

90.

641. Dunque la superficie della sfera 1°. è quadrupla di quella del suo circolo massimo; poichè un circolo massimo del diametro $2r$ è $r^2\pi$ (606): 2°. è eguale alla superficie del cilindro circoscritto; perchè questa è $FA \times 2AK\pi = 2r.2r\pi = 4r^2\pi$: 3°. sta alla superficie totale del cilindro circoscritto :: 2 : 3; poichè le due basi del cilindro sono ciascuna $r^2\pi$.

94.

642. La superficie totale del cono equilatero DIL circoscritto alla sfera, sta a quella della sfera :: 9 : 4; poichè nel cono avendosi $DI = IL = 2r\sqrt{3}$ (550), la sua base sarà $3r^2\pi$ (606), la sua superficie $6r^2\pi$ (638), e la totale $9r^2\pi$; ora $9r^2\pi : 4r^2\pi :: 9 : 4$. Perciò le superficie totali della sfera, del cilindro e del cono equilatero circoscritti sono $\div$ 4 : 6 : 9. Si proverebbe nel modo stesso che le superficie totali della sfera e del cilindro e cono equilateri iscritti stanno $\div$ 16 : 12 : 9. E se concepito il cono ACB e il solido scavato HAKBMKH, si conduca una retta qualunque NT parallela ad AB, sarà $NQ^2\pi = r^2\pi$, $OQ^2\pi = (2rx - x^2)\pi$ (564), ed $NQ^2\pi - OQ^2\pi = (r - x)^2\pi = CQ^2\pi = PQ^2\pi$, cioè la base del solido generato dalla rivoluzion del curvilineo HNO, eguaglierà la base del cono corrispondente PCR.

643. Il paragone delle superficie di due solidi è facile. Poichè chiamando S, s queste superficie, A, B i fattori della prima, a, b quelli della seconda, si avrà sempre $S : s :: AB : ab$. Onde 1°. se $A = a$, si avrà $S : s :: B : b$; 2°. se $A : a ::$

$b:B$, avremo $S=s$; 3°. se $A:a::B:b$, sarà $S:s::A^2:a^2::B^2:b^2$. Quest'ultimo caso ha luogo nei solidi *simili*, le cui dimensioni omologhe son proporzionali: per esempio le superficie delle sfere, che son solidi simili, stanno tra loro come i quadrati dei raggi o delle circonferenze o in generale delle dimensioni omologhe dei loro circoli massimi.

Misura dei Solidi.

644. La *solidità* d'un corpo è la porzion d'estensione compresa tra le sue faccie. Così due cilindri della grossezza ed altezza medesima, hanno una stessa solidità, qualunque sia la materia di cui son fatti, come per esempio, l'uno di piombo e l'altro di sughero. Non bisogna dunque confonder la *massa* nè il *peso* d'un corpo colla sua solidità.

645. Per misurar la solidità bisogna prender per unità di misura il solido più semplice, quello cioè le cui tre dimensioni sono eguali all'unità di lunghezza: *il cubo* perciò *è la misura naturale della solidità*. Quindi si dice indifferentemente o la *cubatura* o la solidità d'un corpo, la cui determinazione perciò si riduce a trovar quante volte il *cubo unità* si contenga nel dato corpo: così per valutare un solido in piedi cubi, basta determinar quante volte egli contenga il *piede cubo unità*.

95. e 96. 646. *Misurare il cubo* ABCDF, diverso da $abcdf=s$ che prendo per *cubo unità*. Tagliato nel cubo un parallelepipedo P eguale in base ad ac, è chiaro che egli contien tante volte il cubo s, quante l'altezza DI o AD contiene l'al-

tezza *di* o *ad*; dunque $ad:s::AD:P=\frac{AD.s}{ad}$: ma 95. il cubo AG contien tante volte il parallelepipedo P, quante la base AC contiene la base e 96. HM o *ac*; dunque $AG:P\left(=\frac{AD.s}{ad}\right)::AC:ac::AD^2:ad^2$, onde $AG=\frac{AD^3.s}{ad^3}$, e poichè $s=1=ad^3$, sarà $AG=AD^3$, cioè *il cubo è il prodotto del* cubo unità *per il cubo delle unità di un de' suoi lati*. Così un piede cubo $=1728$ pollici cubi; una tesa cuba $=216$ piedi cubi $=216\times1728$ pollici cubi ec.

Dunque *il parallelepipedo rettangolo è il prodotto della sua base per la sua altezza*. Poichè 96. il cubo AG descritto sul maggior lato DI contien tante volte il parallelepipedo HN, quante AC contiene HM; dunque $AG\ (=DI^3):HN::AC\ (=DI^2):HM\ (=DH.DM)$, ed $HN=\frac{DI^3.DH.DM}{DI^2}=DI\times DH\times DM$.

647. Onde *un prisma retto o obliquo è il prodotto della sua base per la normale abbassata dalla base superiore sull'inferiore, prolungata se bisogni*. Infatti ridotta' la base del prisma ABCDEF retto o obliquo ad un rettangolo *abcd*, 97. sul quale si formi un parallelepipedo rettangolo *abcdf* dell'altezza GO del prisma, posson dividersi due solidi con piani paralleli alle basi per aver delle sezioni IKLMNI, *ikli* eguali alle basi e fra loro. Ma la somma di queste sezioni è eguale in ambedue i solidi; dunque il prisma è eguale al parallelepipedo, e si misura come lui. Dunque anche il cilindro la cui base è un circolo, è il prodotto della sua altezza per questo circolo.

Onde poste a, a' l'altezze di due cilindri, r, r' i raggi delle lor basi, saranno $2ar\pi$, $2a'r'\pi$ le lor superficie, $ar^2\pi$, $a'r'^2\pi$ le lor solidità; dunque 1°. se $ar^2\pi = a'r'^2\pi$ onde $r' = r\sqrt{\frac{a}{a'}}$, avremo $2ar\pi : 2a'r'\pi :: \sqrt{a} : \sqrt{a'}$; 2°. se $2ar\pi = 2a'r'\pi$ onde $r' = \frac{ar}{a'}$, avremo $ar^2\pi : a'r'^2\pi :: a' : a$, cioè due cilindri eguali in solidità, hanno le superficie come le radici dell'altezze, ed eguali in superficie, hanno le solidità in ragione inversa dell'altezze.

98. 648. Due piramidi SABCDE, *sabc* d'altezze eguali stanno fra loro come le basi ABCDE, *abc*. Infatti tagliandole in egual distanza dai vertici parallelamente alle basi, si avrà (625) $SF^2 : SP^2 :: ABCDE : IKLMN :: sf^2 : sp^2 :: abc : ikl$; onde $ABCDE : abc :: IKLMN : ikl$, e però la somma di tutti gli elementi IKLMN o la prima piramide, sta alla somma di tutti gl'*ikl* o alla seconda, come la base ABCDE alla base *abc*.

649. Date ora due piramidi d'una stessa altezza a, sieno X, x le lor solidità, B, b le lor basi; ed avremo $X : x :: B : b$, e però $X = \frac{Bx}{b}$, onde conosciuta la solidità d'una sola piramide, si avrà subito quella di tutte l'altre egualmente alte. Ora un cubo è l'aggregato di sei piramidi eguali che col vertice si uniscono nel centro del cubo, ed hanno ciascuna per base una delle sue faccie. La loro altezza sarà dunque la metà di quella del cubo, che supposta $2a$, dà $8a^3$ per la solidità del cubo, e perciò $\frac{8a^3}{6} = \frac{4a^3}{3}$ per la solidità x di ciascuna piramide: e poichè la base $b = 4a^2$, la formula $X = \frac{Bx}{b}$ diviene $X = \frac{1}{3}aB$, cioè *la piramide, e perciò anche il cono, è il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza*. Onde la piramide e il cono sono il ter-

zo del prisma o del cilindro di egual base ed altezza.

650. Per misurare il cono troncato ADEC, condotta la normale BF sulle sue basi, e fatta $AC=a$, $DE=b$, $GF=d$, la ragion del diametro alla circonferenza $1:\pi$, e $BG=x$, si avrà $x:x+d::b:a$, onde $x=\frac{db}{a-b}$, $x+d=BF=\frac{ad}{a-b}$, e i circoli delle basi DE, AC saranno (606) $\frac{b^2\pi}{4}$, $\frac{a^2\pi}{4}$; dunque i coni ABC, BDE sono $\frac{ad}{a-b}\times\frac{a^2\pi}{3\cdot 4}$ e $\frac{bd}{a-b}\times\frac{b^2\pi}{3\cdot 4}$, onde la lor differenza o il cono troncato $ACDE=\frac{d\pi}{3\cdot 4}\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)=\frac{\pi d}{3\cdot 4}(a^2+b^2+ab)$. 92.

651. Un poliedro si divide in piramidi, che si calcolano separatamente, e la somma di esse è la solidità del poliedro. Se egli è regolare, condotte dal centro a tutti gli angoli del poliedro delle rette che lo dividano in tante piramidi eguali quante ha faccie, una di queste piramidi è il prodotto del terzo della sua base (che è una faccia del poliedro) per la normale condotta dal centro su questa faccia; onde il poliedro è il prodotto del raggio della sfera iscritta per il terzo della sua superficie.

652. Dunque anche *la sfera*, poliedro regolare d'infinite faccie, *è il prodotto del terzo della sua superficie per il suo raggio.*

653. Fatto r il raggio della sfera, sarà $r^2\pi$ il suo circolo massimo (606) e $\frac{4}{3}r^2\pi$ la sua solidità: ma quelle del cilindro e cono equilatero circoscritti sono $2r^3\pi$ (647) e $3r^3\pi$ (550. 649); dunque le tre solidità son tra loro $::\frac{4}{3}r^3\pi:2r^3\pi:3r^3\pi::4:6:9$, appunto come le superficie. Se il cono abbia l'altezza e base stessa del cilindro, sarà il terzo di esso (649), e il cilindro, la sfera e il cono staranno $::2r^3\pi:\frac{4}{3}r^3\pi:\frac{2}{3}r^3\pi::6:4:2::3:2:1$; onde il cilindro AM meno l'emisfero HKM, cioè il solido scavato HAKBMKH, eguaglia il cono ACB. 94.

FIG. 90.

654. Un settore sferico è dunque il prodotto della superficie descritta da BC nel terzo del raggio BD (652). Onde fatta $BD=r$, $CP=x$ altezza del *segmento sferico* BCM, ed $1:\pi$ la ragione del diametro alla circonferenza, sarà $2r\pi x$ la superficie descritta da BC (640); dunque il settore sferico $BCDM=\frac{2r^2\pi x}{3}$. Perciò in una stessa sfera, i settori son tra loro come l'altezze de' segmenti su cui posano.

655. Onde essendo $PD=r-x$ e $BP=\sqrt{(2rx-x^2)}$, sarà il cono retto $BDM=\frac{\pi}{3}(2rx-x^2)(r-x)$, e BCMD − BDM, cioè il segmento sferico $BPMC=\frac{\pi}{3}(2r^2x-(2rx-x^2)(r-x))=\pi x^2(r-\frac{x}{3})$.

656. Dunque fatta $DP=z$, altezza del trapezio DPBF, si ha $CP=x=r-z$, e sottraendo dall'emisfero $\frac{2r^3\pi}{3}$ il segmento, viene $\pi z(r^2-\frac{z^2}{3})$, solidità della porzione sferica generata dal trapezio DPBF. Così si trova che fatta l'altezza $DQ=u$, la porzione sferica descritta dal trapezio DQNF ha per espressione $\pi u(r^2-\frac{u^2}{3})$. Onde la solidità della *Zona* generata dal trapezio QPBN è $\pi(r^2(z-u)+\frac{u^3-z^3}{3})$, e fatta la sua altezza $PQ=g$, il suo maggior raggio $QN=y$, il minore $PB=y'$, si ha $z=u+g$, il che dà la sua solidità $\pi g(r^2-u^2-gu-\frac{g^2}{3})$. Si ha poi $y^2=r^2-u^2$, e però $y^2+u^2=r^2=y'y'+u^2+2gu+g^2$; onde $gu=\frac{y^2-y'y'-g^2}{2}$, e però una zona qualunque $=\pi g\left(\frac{y^2+y'y'+g^2}{2}-\frac{g^2}{3}\right)=\frac{\pi g}{6}(3y^2+3y'y'+g^2)$: onde la zona può conoscersi benchè sia ignoto il raggio della sua sfera. Del resto, poichè il trapezio HOSM genera la porzione $\pi z(r^2-\frac{z^2}{3})$, ed è il cilindro $NM=rz^2\pi$, il cilindro

94.

meno la porzione, cioè la parte NHO del solido scavato

HAKBMKH, sarà $\frac{z^3\pi}{3}$, eguale al cono corrispondente FCR, come le loro basi (642). 94.

657. Ora per paragonar due solidi insieme, chiamo S, s le lor solidità, e A, B, C, a, b, c i loro fattori; dunque $S:s::ABC:abc$; onde 1°. se $A=a$, $S:s::BC:bc$; 2°. se $A:a::bc:BC$, $S=s$; 3°. nei solidi simili $S:s::A^3:a^3::B^3:b^3::C^3:c^3$. Onde, per esempio, *le sfere sono come i cubi dei raggi, de' diametri, o delle loro dimensioni omologhe*.

Ecco alcuni Problemi per esercizio dei Principianti che potranno sciogliergli o nel primo o nel secondo anno dei loro Studj, or per sintesi or per analisi ed or nell'una e nell'altra maniera.

658. I. Dati gli angoli contigui e contrariamente posti $EBC=a$, $BCD=b$, $CDH=c$ ec., trovar l'espressione dell'angolo fatto sull'ultimo lato CD o DH da FN normale al lato BE del primo. *Ris.* Se l'angolo è uno, l'espressione cercata sarà $90^\circ \mp a$; se son due, $90^\circ \mp a \pm b$; se son tre, $90^\circ \mp a \pm b \mp c$ ec.: i segni di sopra son per l'angolo superiore, quei di sotto per l'inferiore. 122.

659. II. Supposto ora che FN si pieghi in I per IP e si accosti ad IO normale sopra BC, e poi di nuovo si pieghi per PQ e si scosti da PR normale sopra CD, e così continui a scostarsi per un numero qualunque d'angoli, determinare in qual caso sarà PQ sopra o sotto la normale PR, e l'angolo che faranno tra loro le due FN, PQ: si osservi che oltre gli angoli a, b, c ec. dati come nel passato problema, si suppongon dati anche gli angoli $PIO=r'$, $QPR=r''$ ec.. *Ris.* Se i dati angoli son due e si abbia $b>r'$, la retta PQ sarà sotto PR: se $b<r'$ sarà sopra, e l'angolo che fanno tra loro le due FN, PQ, sarà nei due casi $b-a\mp r''$. Se i dati angoli son tre e si abbia $c>r''$, la retta sarà sopra la normale; se $c<r''$, sarà sotto, e l'angolo cercato sarà nei due casi $b-a-c=r'''$. Non importa che questi angoli si trovino negativi.

660. III. Condotte sui lati CG, GD d'un angolo $G=a$ le normali CF, DF e la retta CD che fa con esse gli angoli $DCF=r$, $CDF=i$, supponendo noti gli angoli a, r, trovare in tutti i casi l'espressione dell'angolo i. *Ris.* Vi sono cinque casi: 1°. se $a>r$ e CD è sopra la normale CF, sarà $i=a+r$: 2°. se $a>r$ e CD è sotto CF, sarà $i=a-r$: 3°. se $r=0$, CD si confonderà con CF e sarà $i=a$; 4°. se $a=r$, CD sarà sotto CF e si avrà $i=0$; 5°. se $a<r$, CD sarà sotto CF e si avrà $i=r-a$. 124.

124. 661. IV. Condotte nell'angolo stesso $G = a$ due altre normali CF', D'F' con un'altra retta C'D' onde si abbiano gli angoli $DCF = p$, $D'C'F = u$, $CDF = g$, $C'D'F' = h$, supponendo p, u dalla parte medesima delle loro normali, $g + h$ un angolo assai grande, $p - u$ un angolo piccolissimo, e $p > u$, determinare i casi in cui sarà g maggiore o minore di h, e la ragion degli angoli $p - u$ e $\pm h \mp g$. *Ris.* Di 11 combinazioni, 5 sole non si oppongono alle condizioni del problema: 1ª. quando CD, C'D son di là dalle loro normali CF, C'F', si avrà $g = a + p$, $h = a + u$ e $g > h$: 2ª. quando sono al di quà, se $g = a - p$ ed $h = a - u$, sarà $g < h$: 3ª. se $g = 0$ ed $h = a - u$, sarà $g < h$: 4ª. se $g = p - a$ ed $h = 0$, sarà $g > h$: 5ª. se $g = p - a$ ed $h = u - a$, sarà $g > h$. In generale si avrà sempre $p - u = \pm h \mp g$.

662. V. Condotte da un punto qualunque d'un triangolo equilatero tre normali ai tre lati, assegnar la ragione della lor somma alla normale che dal vertice del triangolo va alla base. *Ris.* La ragione è d'egualità.

663. VI. Descritti tre quadrati sui lati d'un triangolo qualunque e congiunte le loro estremità con linee rette, e di nuovo sopra queste descritti tre altri quadrati, e unite con tre rette le quattro estremità corrispondenti di ciascuna lor coppia, assegnar la ragione del dato triangolo a ciascun dei nove che ne risulteranno. *Ris.* Ciascun dei nove triangoli eguaglia il dato.

664. VII. Data l'altezza a d'un triangolo e le differenze b, c dei lati e dei segmenti dalla base, trovare il triangolo. *Ris.* Chiamato x il segmento minore, sarà $x = -\frac{c}{2} \pm \frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{4a^2 + c^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)}$.

665. VIII. Dato un lato a intorno all'angolo retto d'un triangolo rettangolo e l'aggregato b degli altri due, trovar questi lati. *Ris.* L'ipotenusa $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$.

122. 666. IX. Determinar la figura contenuta dalle quattro rette che partono dal mezzo di ciascun lato d'un quadrilatero, e la sua ragione al quadrilatero. *Ris.* La figura è un parallelogrammo che è metà del quadrilatero.

667. X. I quadrati dei lati d'un parallelogrammo qual ragione hanno ai quadrati delle diagonali? *Ris.* D'egualità.

123. 668. XI. Condotte da un punto E della diagonale AB d'un parallelogrammo HC le normali EF, EI sui lati AH, AC, assegnar la ragione del rettangolo $BA \times AE$ ai rettangoli $CA \times AF + HA \times AI$. *Ris.* La ragione è d'egualità.

64. 669. XII. Prolungati i lati KI, IG d'un parallelogrammo HI, e da un punto qualunque come vertice descritti tre triangoli sui lati KI, IG e sulla diagonale HI condotta per l'angolo contenuto dai lati KI, IG, assegnar la ragione di quelli

a questo 1°. quando il vertice è dentro l'angolo CIA o FIK; 2°. quando è dentro l'angolo KIG o DIA: 3°. quando è in uno dei due lati, o nella diagonale, o nel prolungamento degli uni o dell'altra. *Ris.* 1°. il triangolo sulla diagonale eguaglia la somma di quelli sui lati: 2°. ne eguaglia la differenza: 3°. i tre triangoli divengon due e sono eguali. FIG. 64.

670. XIII. Descrivere un quadrato in un semicircolo. *Ris.* Chiamato $2a$ il diametro, l'incognita presa dal vertice sarà $x = a \pm \sqrt{\frac{a^2}{5}}$.

671. XIV. Il quadrato del lato del trigono regolare iscritto nel circolo, qual ragione ha al quadrato del raggio? *Ris.* Tripla.

672. XV. I quadrati del lato del pentagono, dell'esagono e del decagono regolari iscritti in un circolo qual ragione hanno tra loro? *Ris.* Il quadrato dell'uno eguaglia quelli degli altri due.

673. XVI. Qual ragione hanno tra loro le differenze degli esagoni regolari circoscritto ed iscritto ad un circolo, dell'esagono e trigono iscritti, del trigono ed esagono circoscritti, e dell'esagono circoscritto e trigono iscritto? *Ris.* Continua aritmetica.

674. XVII. Qual ragione hanno tra loro tre poligoni regolari di lati $m, 2m, m$, il primo circoscritto e gli altri due iscritti al circolo? *Ris.* Continua geometrica.

675. XVIII. Qual ragione hanno tra loro tre poligoni regolari di lati $m, 2m, 2m$, i primi due circoscritti e il terzo iscritto al circolo? *Ris.* Continua armonica.

676. XIX. Iscritto e circoscritto al circolo uno stesso poligono regolare, trovare il raggio del circolo a cui circoscrivendo o iscrivendo un poligono simile, il nuovo poligono eguagli la differenza dei dati. *Ris.* Il raggio cercato è nel primo caso la metà del lato del dato poligono iscritto, nel secondo la metà del lato del circoscritto.

677. XX. Alzata nel semicircolo ACD l'ordinata EB per cui passi una corda AC condotta dall'estremità del diametro, trovar la ragione dei rettangoli DA × AE e CA × AH. *Ris.* La ragione è d'egualità. 124.

678. XXI. Condotte da un punto M della circonferenza il cui centro è C, la tangente MT e l'ordinata MP, assegnar la ragione delle quattro linee TA, TP, TC, TB prese sul diametro dall'origine della tangente. *Ris.* La ragione è geometrica. 50.

679. XXII. Data l'area AN $= a$ ed il solo contorno laterale ALMNC $= c$ d'una figura, trovare un rettangolo che la eguagli in area e con tre de' suoi lati anche in contorno. *Ris.* Se l, p sieno la larghezza e l'altezza del rettangolo cercato, si avrà $p = \frac{c + \sqrt{(c^2 - 8a)}}{4}$, $l = \frac{4a}{c + \sqrt{(c^2 - 8a)}}$. 78.

680. XXIII. Trovare un circolo eguale alla superficie d'un dato cilindro o cono retto. *Ris.* Se a sia il lato del soli-

FIG. do, r il raggio della sua base, x quello del circolo cercato, si avrà $x = \sqrt{2ar}$ per il cilindro, $x = \sqrt{ar}$ per il cono.

92. 681. XXIV. Dato un tronco di cono retto CD con le basi AC, DE parallele, farvi una sezione HI parallela alle basi in modo che la circonferenza di essa sia media proporzionale aritmetica tra le circonferenze delle basi. *Ris.* Se sia EC $= d$, EI $= x$, si avrà $x = \frac{d}{2}$.

682. XXV. Trovare un circolo eguale alla superficie d' un dato segmento sferico. *Ris.* Se sia a l' altezza del segmento, r il raggio della sua sfera, quello del circolo cercato sarà $x = \sqrt{2ar}$.

683. XXVI. Trovare una sfera eguale in solidità ad un dato segmento sferico. *Ris.* Prese le denominazioni del passato problema, il raggio della sfera sarà $x = \sqrt[3]{\left(\frac{3a^2r - a^3}{4}\right)}$, equazione che son la seguente s' insegna a costruire a suo luogo.

684. XXVII. Trovare una sfera eguale alla somma d' un cono e d' un tronco di cono retti. *Ris.* Se a, a' sieno l' altezze del cono e del tronco, ed r, r', r'' i raggi delle lor basi, quello della sfera cercata sarà $x = \sqrt[3]{\left[\frac{ar^2 + a'(r'^2 + r''^2 + r'r'')}{4}\right]}$.

685. XXVIII. Data una sfera formarne un cono retto 1°. della data base; 2°. della data altezza; 3°. o un tronco di cono retto delle date basi, o d' una base e d' una altezza date. *Ris.* 1°. Se r, r' sieno i raggi della sfera e del cono, l' altezza di esso sarà $x = \frac{4r^3}{r'^2}$; 2°. se sia a l' altezza del cono, il raggio della sua base sarà $y = 2r\sqrt{\frac{r}{a}}$: 3°. se r', r'' sieno i raggi delle basi del tronco, la sua altezza sarà $z = \frac{4r^3}{r'^2 + r''^2 + r'r''}$; 4°. se sia r' il raggio della base del tronco, a la sua altezza, il raggio dell' altra base sarà $u = -\frac{r'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4r^3}{a} - \frac{3r'^2}{4}\right)}$.

FINE DELLA GEOMETRIA.

APPLICAZIONE DEI PRINCIPJ

DI GEOMETRIA E D' ALGEBRA

AL CALCOLO DEI SENI E ALLA TRIGONOMETRIA.

LA *Trigonometrìa* risolve i Triangoli, a cui posson ridursi tutte l'altre figure. Ella è di due sorte; la *rettilinea* misura gli angoli e i lati de' triangoli rettilinei; la *sferica* risolve i triangoli formati da archi di circolo. L'una e l'altra son di grande utilità; ma per giudicarne bisogna conoscere a fondo la teorìa dei *Seni* che son metà di corde calcolate in parti di raggio del circolo, in cui si suppone iscritto il triangolo da risolversi. Vedremo poi per qual motivo si sieno introdotti i Seni nella risoluzion dei Triangoli.

CALCOLO DEI SENI.

686. LA normale BD condotta dall' estremità B dell' arco BA sul diametro A*a*, si chiama il *seno* dell' arco AB o dell'angolo ACB misurato da quest'arco. 99.

687. Se EB è il complemento dell'arco BA, il suo seno GB è il seno del complemento o il *coseno* dell' arco AB, ed è chiaro che CD=BG e BD=GC.

688. La tangente AT condotta da A fino all' incontro del raggio CB prolungato, si chiama la *tangente* dell'arco AB, e CT ne è la *secante*. Così EM è la tangente del complemento EB o la *co-*

FIG. 99. *tangente* dell'arco AB, e CM ne è la *cosecante*. Si chiamano ancora *seno-verso* e *coseno-verso* le linee AD, EG; ma ne è raro l'uso. In vece di *raggio*, *seno*, *coseno* ec., noi scriveremo *r*, *sen*, *cos*, *tang*, *cot*, *sec*, *cosec*, *sen v*, *cos v*.

689. Segue da queste nozioni 1°. che *il seno d'un arco è la metà della corda dell'arco doppio*; poichè prolungata BD in F, BD è metà di FB corda del doppio dell'arco AB. Dunque *il seno di 30° è metà del raggio*, per esser metà della corda di 60° eguale al raggio (542).

690. 2°. Che il seno d'un angolo BCA o dell'arco BA è lo stesso che quello dell'angolo *a*CB o dell'arco *a*B suo supplemento.

691. 3°: Che il coseno d'un angolo ottuso è negativo: così è la sua tangente, cotangente e secante.

692. 4°. Che i seni crescono da 0° ove $cos = r$, fino a 90°; quì $sen = r$ e $cos = 0$. Dipoi decrescono da 90° a 180° ove $sen = 0, cos = -r$. Dai 180° in poi divengono negativi e crescono nuovamente fino a 270° ove $sen = -r$, $cos = 0$. Di quì fino a 360° serbandosi negativi, diminuiscono un'altra volta finchè a 360° si ha di nuovo $sen = 0, cos = r$. I coseni decrescono quando i seni crescono ed all'opposto; son negativi da 90° a 270° e positivi da 0° a 90°, e da 270° a 360°. E poichè dai seni e coseni si determinano le tangenti, cotangenti, secanti, cosecanti, seni-versi e coseni-versi, come presto vedremo, anche queste *funzioni circolari* son soggette a dei cangiamenti relativi a quelli dei seni e coseni, di cui ecco il compendio

	a 0°	da 0° a 90°	a 90°	da 90° a 180°	a 180°	da 180° a 270°	a 270°	da 270° a 360°	a 360°	ec.
sen	0	+	+*r*	+	0	−	−*r*	−	0	
cos	+*r*	+	0	−	−*r*	−	0	+	+*r*	

693. 5°. Che i seni e coseni d'archi maggiori di 360° son gli stessi che quelli della lor differenza da 360° tolti quante volte si può: così $sen\, 7.90^\circ = sen\, 3.90^\circ = sen\, 270^\circ = -r$, $sen\, 12.90^\circ = sen\, 0^\circ = 0$, $cos\, 10.90^\circ = cos\, 180^\circ = -r$ ec. e generalmente $sen\, n.90^\circ = sen(n-4h)90^\circ$, e $cos\, n.90^\circ = cos(n-4h)90^\circ$, preso per h qualunque numero intero.

694. 6°. Che *la tangente di* 45° *è eguale al raggio* come la cotangente, perchè allora i triangoli rettangoli CEM,CTA son eguali ed isosceli. 99.

695. Posto ciò; sia l'arco $BA = A$, il raggio $CB = CA = 1$ (supposizione che d'ora in poi farò sempre per facilitare il calcolo, avvertendo che quando il raggio sia r, l'espressioni debbon moltiplicarsi o partirsi per quella potenza di r che le renda *omogenee*) ed i triangoli rettangoli e simili CBD,CGB,CTA,CEM daranno le proporzioni e equazioni seguenti:

696. I. $BD^2 + CD^2 = CB^2$; ovvero $sen^2 A + cos^2 A = 1 = sen^2 B + cos^2 B$ (posto B un altr' arco qualunque). Dunque $sen\, A + sen\, B : cos\, B + cos\, A :: cos\, B - cos\, A : sen\, A - sen\, B$, e $sen\, A + cos\, B : sen\, B + cos\, A :: sen\, B - cos\, A : sen\, A - cos\, B$.

697. II. $CT^2 - TA^2 = CA^2 \ldots sec^2 A - tang^2 A = 1$: onde $sec\, A + tang\, A : 1 :: 1 : sec\, A - tang\, A$.

698. III. $CE^2 = CM^2 - EM^2 \ldots\ldots 1 = cosec^2 A - cot^2 A = sec^2 A - tang^2 A$. Dunque $cosec\, A - cot\, A : 1 :: 1 : cosec\, A + cot\, A$, e $cosec\, A - cot\, A : sec\, A - tang\, A :: sec\, A + tang\, A : cosec\, A + cot\, A$.

699. IV. $CD : BD :: CA : AT \ldots\ldots cos\, A : sen\, A :: 1 : tang\, A$; dunque $sen\, A = cos\, A \times tang\, A \ldots\ldots cos\, A = \frac{sen\, A}{tang\, A} \ldots\ldots tang\, A = \frac{sen\, A}{cos\, A}$.

700. V. $CB : BD :: CT : TA \ldots 1 : sen\, A :: sec\, A$;

$tang\,A$; dunque $sen\,A \times sec\,A = tang\,A = \frac{sen\,A}{cos\,A}$ .... $sen\,A = \frac{tang\,A}{sec\,A}$ .... $sec\,A = \frac{tang\,A}{sen\,A} = \frac{1}{cos\,A}$ .... $sec\,A \times cos\,A = 1$.

99. 701. VI. $CG : GB :: CE : EM$ .... $sen\,A : cos\,A :: 1 : cot\,A = \frac{cos\,A}{sen\,A} = \frac{1}{tang\,A}$; dunque $cot\,A \times tang\,A = 1 = sec\,A \times cos\,A$:

702. VII. $GB : EM :: CE : CM$.... $cos\,A : cot\,A :: 1 : cosec\,A = \frac{cot\,A}{cos\,A} = \frac{1}{sen\,A}$; dunque $sen\,A \times cosec\,A = 1 = cot\,A \times tang\,A = sec\,A \times cos\,A$.

100. 703. Dati ora i seni EG, BD e i coseni CG, CD di due archi a, b, per avere il seno e il coseno della lor somma o differenza, sia r il raggio, ed m, n, d le corde o i doppj di questi seni (689), onde $sen\,a = \frac{m}{2}$ e (696) $cos\,a = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}m^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - m^2)}$, $sen\,b = \frac{n}{2}$ e $cos\,b = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - n^2)}$; dunque (571) $sen(a+b) = \frac{d}{2} = \frac{m}{2r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - n^2)} + \frac{n}{2r} \cdot \frac{1}{2} \times \sqrt{(4r^2 - m^2)}$, e fatto $r = 1$,

I. $sen(a+b) = sen\,a\,cos\,b + sen\,b\,cos\,a$.

Che se sia $sen\,a = \frac{1}{2}d$, $sen\,b = \frac{1}{2}n$, avremo (572) $sen(a-b) = \frac{m}{2} = \frac{d}{2r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - n^2)} - \frac{n}{2r} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - d^2)}$, e fatto $r = 1$,

II. $sen(a-b) = sen\,a\,cos\,b - sen\,b\,cos\,a = -sen(b-a)$.

Posti ora questi valori in $cos(a+b) = \sqrt{(1 - sen^2(a+b))}$ e in $cos(a-b) = \sqrt{(1 - sen^2(a-b))}$, riflettendo (696) che $1 = sen^2 a + cos^2 a$, verrà

III. $cos(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sen\,a\,sen\,b$,

IV. $cos(a-b) = cos\,a\,cos\,b + sen\,a\,sen\,b = cos(b-a) = cos(a \backsim b)$.

704. Si osservi 1°. che l'equazioni $sen(a-b) = -sen(b-a)$ e $cos(a-b) = cos(b-a)$ danno (699. 701)

$tang(a-b)=-tang(b-a)$, $cot(a-b)=-cot(b-a)$, $sec(a-b)=sec(b-a)$ e $cosec(a-b)=-cosec(b-a)$.

2°. Che dalle formule generali, fatto $a=90°, =180°, =270°, =360°$, si ottiene

$sen(90°\pm b)=+cos\ b$	$cos(90°\pm b)=\mp sen\ b$
$sen(180°\pm b)=\mp sen\ b$	$cos(180°\pm b)=-cos\ b$
$sen(270°\pm b)=-cos\ b$	$cos(270°\pm b)=\pm sen\ b$
$sen(360°\pm b)=\pm sen\ b$	$cos(360°\pm b)=+cos\ b$

e di quì si ricava (699, 701)

$tang(90°\pm b)=\mp cot\ b$	$cot(90°\pm b)=\mp tang\ b$
$tang(180°\pm b)=\pm tang\ b$	$cot(180°\pm b)=\pm cot\ b$
$tang(270°\pm b)=\mp cot\ b$	$cot(270°\pm b)=\mp tang\ b$
$tang(360°\pm b)=\pm tang\ b$	$cot(360°\pm b)=\pm cot\ b$

3°. Che còn ciò si determinano ancora gli archi dei seni, coseni ec. negativi, poichè si ha

$-sen\ b=sen(180°+b)=sen(360°-b)$	$-cos\ b=cos(180°\pm b)$
$-tang\ b=tang(180°-b)=tang(360°-b)$	$-cot\ b=cot(180°-b)$

4°. Che essendo $cos\ b$ (a precisione del segno) $=cos(180°-b)$, sarà $cos(b+n)<cos\ b$ ogni volta che $b+n<180°-b$, cioè quando $b+n$ è un arco intermedio tra b e il suo supplemento. E se si chiami m il prodotto di un numero qualunque di seni o coseni, sarà sempre (64) anche $m\,cos(b+n)<cos\ b$.

5°. Infine se gli angoli a, b molto piccoli abbian per seni s, σ, sarà $sen(a\pm b)=s\surd(1-\sigma^2)\pm\sigma\surd(1-s^2)$, o prossimamente $=s\surd(1-\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2)\pm\sigma\surd(1-s^2+\frac{s^4}{4})$ (per esser $\frac{\sigma^4}{4}, \frac{s^4}{4}$ quantità piccolissime (64)) $=s(1-\frac{\sigma^2}{2})\pm\sigma(1-\frac{s^2}{2})=s\pm\sigma-\frac{s\sigma}{2}(\sigma\pm s)$.

705. Se ora nelle formule I^a. e III^a. (703) sia $a=b$, avremo $sen\,2a=2sen\,a\,cos\,a$, e $cos\,2a=cos^2a-$

$sen^2 a = 2cos^2 a - 1$ (posto per $sen^2 a$ il suo valore $1 - cos^2 a$ (696)) $= 1 - 2sen^2 a$, seno e coseno del doppio d'un arco, di cui si conosce seno e coseno. Per trovare il seno e il coseno della metà di quest'arco, fatto $2a = c$, si ha $sen\, c = 2 sen \frac{1}{2} c \times cos \frac{1}{2} c$, e $cos\, c = 2cos^2 \frac{1}{2} c - 1 = 1 - 2sen^2 \frac{1}{2} c$; dunque $cos \frac{1}{2} c = \frac{sen\, c}{2 sen \frac{1}{2} c} = \sqrt{\left(\frac{1 + cos c}{2}\right)}$, e sen $\frac{1}{2} c = \frac{sen\, c}{2 cos \frac{1}{2} c} = \sqrt{\left(\frac{1 - cos\, c}{2}\right)}$. Se $c = 90°$, sarà $sen\, 45° (= cos\, 45°) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

706. Per applicar taluna di queste formule, si cerchino i valori di $sen\, n.120°$ e di $cos\, n.120°$. I°. se $n = 1$, sarà $sen\, n.120° = sen\, 60°$ (690). II. se $n = 2$, verrà $sen\, n.120° = sen\, 240° = sen\, (180° + 60°) = sen\, 180°\, cos\, 60° + sen\, 60°\, cos\, 180° = - sen\, 60°$ (692): III°. se $n = 3$, avremo $sen\, n.120° = sen 360° = 0$. Ora dopo 360° ricominciano i gradi con l'ordine stesso di prima, e fatto $n = 4, = 5, = 6$ ec. si ha come prima $sen\, 480° = sen\, 60°$, $sen\, 600° = - sen\, 60°$, $sen\, 720° = 0$; dunque $sen\, n.120° = sen\, 60, = - sen\, 60°, = 0$. Con lo stesso raziocinio si trova che $cos\, n.120°$ ha tre valori o piuttosto due, cioè se $n = 1, = 2, = 3$ ovvero $n = 4, = 5, = 6$ ec. viene $cos\, n\, 120° = - cos\, 60°, = - cos\, 60°, = 1$. Onde anche l'espressione $sen\, (2n + 1)\, 60°$ ($= sen\, (n.120° + 60°) = sen\, n.120°\, cos\, 60° + sen\, 60°\, cos\, n.120°$) nei tre casi di $n = 1, = 2, = 3$, ha i tre valori $0, - sen\, 60°, sen\, 60°$, e l'espressione $cos\, (2n + 1)\, 60°$ ($= cos\, (n.120° + 60°) = cos\, n.120° \times cos\, 60° - sen\, n.\, 120°\, sen\, 60°$) ha i due valori $- 1$, $cos\, 60°$, che nel solo segno differiscono da quei di sopra. E però la quantità $sen\, (a \pm n.120°) = sen\, a\, cos\, n.120° \pm sen\, n\, 120°\, cos\, a$ ha cinque valori che si riducono a tre: 1° e 2°. $- sen\, a\, cos\, 60° \pm sen 60°\, cos\, a = \pm sen (60° \mp a)$: 3° e 4°. $- sen\, a\, cos\, 60° \mp sen\, 60° \times cos\, a = \mp sen\, (60° \pm a)$: 5°. $sen\, a$. Del pari la quantità $\pm sen\, [\, (2n + 1)\, 60° \mp a\,] = \pm [\, sen\, (2n + 1)\, 60°\, cos\, a \mp sen\, a \times cos\, (2n + 1)\, 60°\,]$ ha cinque valori che si riducono ai tre medesimi; 1°. $\pm [0 \mp sen\, a \times -1] = sen\, a$: 2° e 3°. $\pm [- sen\, 60° \times cos\, a \mp sen\, a\, cos\, 60°\,] = \mp ten\, (60° \pm a)$: 4° e 5°. $\mp [\, sen\, 60° \times cos\, a \mp sen\, a\, cos\, 60°\,] = \pm sen\, (60° \mp a)$.

707. Ma prima di andar più oltre, ecco il modo di conoscere i seni e i coseni che queste formule suppongon noti.

I°. Calcolati una volta i seni dall'arco di 1″ fino a 90°, si conosceranno anche tutti i se-

ni da 1″ fino a 180° (690). Ora da 180° fino a 360° i seni sono i medesimi che da 0° fino a 180° a riserva del segno che è negativo; dunque *il calcolo dei seni si riduce ai soli del primo quadrante d'un circolo*. Inoltre i coseni si determinano colla formula $\cos a = \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 a)}$ (696); basta dunque calcolare i seni.

II°. Si sa (606) che essendo il raggio 1, l'arco di 90° si esprime per 1,5707963267948966; dunque l'arco di 1″ è di 0,000004848136811095; ec. parti del raggio; e siccome un arco sì piccolo non differisce sensibilmente dal suo seno, si è preso 0,000004848 ec. per seno dell'arco 1″. Si è raddoppiata, triplicata ec. questa frazione, e si son avuti i seni di 2″, di 3″ ec. Potean calcolarsi questi seni per mezzo delle formule $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$ e $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$; ma la differenza tra archi sì piccoli e i loro seni è troppo insensibile per non prender ciascun arco per il suo seno respettivo. Così continuando il calcolo dai secondi fino ai primi, e da questi fino ai gradi per mezzo delle due formule precedenti, si arriva al seno di 30°. Dovendo questo esser la metà del raggio, posson verificarsi con esso i calcoli antecedenti, e si han così tutti i seni da 1″ fino a 30°. Ma per non render troppo voluminose le tavole, vi si fanno entrar per lo più i soli seni dei gradi e dei minuti.

III°. Suppongo ora $a = 30°$; sarà $\operatorname{sen}(30° + b) = \operatorname{sen} 30° \cos b + \cos 30 \operatorname{sen} b$: ma $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dunque $\operatorname{sen}(30° + b) = \frac{1}{2} \cos b + \frac{1}{2} \operatorname{sen} b.\sqrt{3}$, e $\operatorname{sen}(30° - b) = \frac{1}{2} \cos b - \frac{1}{2} \operatorname{sen} b.\sqrt{3}$. Dunque $\operatorname{sen}(30° + b) = \operatorname{sen}(30° - b) + \operatorname{sen} b.\sqrt{3}$. Onde i seni da 0° a 30° danno quelli da 30° a 60°.

IV°. Sia $a = 60°$; si avrà $sen(60° + b) = \frac{1}{2} cos\, b.\sqrt{3} + \frac{1}{2} sen\, b$, e $sen(60° - b) = \frac{1}{2} cos\, b.\sqrt{3} - \frac{1}{2} sen\, b$; dunque $sen(60° + b) = sen(60° - b) + sen\, b$: così $sen\, 66° = sen\, 54° + sen\, 6°$: onde i seni da 30° a 60° dando quegli da 60° a 90°, il calcolo è compito.

708. Riprendendo le formule del n°. 703. e sommando la I^a. e la II^a., si ha

$$sen\, a\, cos\, b = \frac{1}{2} sen(a + b) + \frac{1}{2} sen(a - b),$$

sommando la III^a. e IV^a., poi sottraendole, si ha

$$cos\, a\, cos\, b = \frac{1}{2} cos(a + b) + \frac{1}{2} cos(a - b)$$

$$sen\, a\, sen\, b = \frac{1}{2} cos(a - b) - \frac{1}{2} cos(a + b)$$

E queste formule servono a trasformar prodotti di seni in seni semplici. Le seguenti vagliono a cangiar somme o differenze di seni in prodotti d' altri seni, onde applicarvi il calcolo coi logaritmi.

709. Sia $a + b = p$, $a - b = q$, sarà $a = \frac{1}{2}(p + q)$, $b = \frac{1}{2}(p - q)$: perciò

$$sen\, p + sen\, q = 2\, sen \tfrac{1}{2}(p + q) cos \tfrac{1}{2}(p - q)$$

$$sen\, p - sen\, q = 2\, sen \tfrac{1}{2}(p - q) cos \tfrac{1}{2}(p + q)$$

$$cos\, p + cos\, q = 2\, cos \tfrac{1}{2}(p + q) cos \tfrac{1}{2}(p - q)$$

$$cos\, q - cos\, p = 2\, sen \tfrac{1}{2}(p + q) sen \tfrac{1}{2}(p - q)$$

Per le somme o differenze di tangenti si ha

$$tang\, p \pm tang\, q = \frac{sen\, p}{cos\, p} \pm \frac{sen\, q}{cos\, q} = (703)\ \frac{sen(p \pm q)}{cos\, p\, cos\, q}$$

$$cot\, q \pm cot\, p = \frac{sen(p \pm q)}{sen\, p\, sen\, q}.$$

710. Danno queste formule tutti gli archi che hanno lo stesso seno. Sieno x questi archi, e preso ad arbitrio un arco a il minimo di tutti gli x, dovrà esser $sen\, a = \pm sen\, x$, giacchè i seni posson essere e positivi e negativi: avremo perciò $sen\, x - sen\, a = 0$ e anche $-(sen\, x + sen\, a) = 0$. Dunque 1°. $sen\, x - sen\, a = 2\, sen \frac{1}{2}(x - a)\, cos \frac{1}{2}(x + a) = 0$, e potrà esser del pari e $sen \frac{1}{2}(x - a) = 0$, e $cos \frac{1}{2}(x + a) = 0$. Nel caso di $sen \frac{1}{2}(x - a) = 0$, sarà $\frac{1}{2}(x - a) = 0, = 180°, = 360°, = 540°$ ec. onde fatto $180° = \pi$, verrà $x = a, = 2\pi + a, = 4\pi + a, = 6\pi + a, \ldots\ldots = 2n\pi + a$, posto n un numero intero qualunque cominciando da zero; e quindi in generale $sen\, a = sen(2n\pi + a)$. Nel caso

poi di $\cos\frac{1}{2}(x+a)=0$, sarà $\frac{1}{2}(x+a)=90^\circ,=90^\circ+180^\circ=90^\circ+2.180^\circ,=90^\circ+3.180^\circ$ ec., cioè $x=\pi-a,=\pi+2\pi-a,=\pi+4\pi-a,\ldots=\pi+2n\pi-a=(2n+1)\pi-a$, onde in generale $sen\,a=sen[(2n+1)\pi-a]$. Dunque 2°. $-(sen\,x+sen\,a)=-(2sen\frac{1}{2}(x+a)\cos\frac{1}{2}(x-a))=0$, e potrà esser del pari e $sen\frac{1}{2}(x+a)=0$ e $\cos\frac{1}{2}(x-a)=0$. Nel caso di $sen\frac{1}{2}(x+a)=0$, sarà $\frac{1}{2}(x+a)=0,=180^\circ,=360^\circ$ ec., cioè $x=-a,=2\pi-a,=4\pi-a,\ldots=2n\pi-a$, e però $-x=-(2n\pi-a)$ ed in generale $sen\,a=-sen(2n\pi-a)$. Nel caso poi di $\cos\frac{1}{2}(x-a)=0$, sarà $\frac{1}{2}(x-a)=90^\circ,=90^\circ+180^\circ$ ec., cioè $x=\pi+a,=\pi+2\pi+a,=\pi+4\pi+a,\ldots=(2n+1)\pi+a$, e però $-x=-[(2n+1)\pi+a]$ onde in generale $sen\,a=-sen[(2n+1)\pi+a]$. Pertanto le formule che esprimono gli archi a cui conviene lo stesso seno, si contengono in $sen\,a=\pm sen(2n\pi-a)=\pm sen[(2n+1)\pi\mp a]$. Trattando nel modo stesso $\cos a\pm\cos x=0$, viene $\cos a=-\cos[(2n+1)\pi\pm a]=\cos(2n\pi\pm a)$: ove se $a=\pi$, sarà in generale $\cos\pi=-\cos 2n\pi=\cos(2n+1)\pi=-1$, e se $a=2\pi$, si avrà $\cos 2\pi=-\cos(2n+1)\pi=\cos 2n\pi=1$ (692).

711. Torniamo alle quattro formule primitive (709) e facciasi nella prima e terza $p=nA$, $q=(n-2)A$; avremo dalla prima $sen\,nA=2\cos A\,sen(n-1)A-sen(n-2)A$ e dalla terza $\cos nA=2\cos A\cos(n-1)A-\cos(n-2)A$ e quindi fatto $n=2,=3,=4$ ec., si avranno i valori dei seni e coseni degli archi multipli per mezzo dei loro inferiori. La seconda e quarta equazione darebbero

$$sen\,nA=sen(n-2)A+2\,sen\,A\cos(n-1)A$$
$$\cos nA=\cos(n-2)A-2\,sen\,A\,sen(n-1)A$$

equivalenti alle prime, come è facile il dimostrare.

712. Sia ora nelle due prime formule di sopra (709) $p=90^\circ$, e nelle due ultime $q=0$; avremo

$$1+sen\,q=2sen(45^\circ+\tfrac{1}{2}q)\cos(45^\circ-\tfrac{1}{2}q)=\ldots\ldots$$
$$2sen^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}q)\,(687)=2\cos^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}q).$$
$$1-sen\,q=2sen(45^\circ-\tfrac{1}{2}q)\cos(45^\circ+\tfrac{1}{2}q)=\ldots\ldots$$
$$2sen^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}q)=2\cos^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}q)=\cos v.\,q.$$
$$1+\cos p=2\cos^2\tfrac{1}{2}p\;\ldots\ldots\;1-\cos p=2sen^2\tfrac{1}{2}p=sen\,v.\,p.$$

713. Dividiamo ora le formule stesse (709) l'une per l'altre e avremo

$$\frac{sen\,p+sen\,q}{sen\,p-sen\,q}=\frac{sen\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)\,sen\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{tang\frac{1}{2}(p+q)}{tang\frac{1}{2}(p-q)}.$$

$$\frac{sen\,p+sen\,q}{\cos p+\cos q}=tang\frac{1}{2}(p+q)\qquad\frac{sen\,p-sen\,q}{\cos p+\cos q}=tang\frac{1}{2}(p-q)$$

$$\frac{sen\,p+sen\,q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p-q)\qquad\frac{sen\,p-sen\,q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{1}{2}(p+q)$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{\tang \frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cot \frac{1}{2}(p-q)}{\tang \frac{1}{2}(p+q)}=\frac{\sec p+\sec q}{\sec p-\sec q}$$

$$\frac{\tang p+\tang q}{\tang p-\tang q}=\frac{\sen(p+q)}{\sen(p-q)}=\frac{\cot p+\cot q}{\cot q-\cot p}$$

$$\frac{\tang p+\tang q}{\cot q+\cot p}=\tang p \tang q=\frac{\tang p-\tang q}{\cot q-\cot p}$$

$$\frac{\tang p+\tang q}{\cot q-\cot p}=\tang p \tang q \times \frac{\sen(p+q)}{\sen(p-q)}$$

$$\frac{\tang p-\tang q}{\cot q+\cot p}=\tang p \tang q \times \frac{\sen(p-q)}{\sen(p+q)}$$

714. Divido pur l'une per l' altre le formule del n°. 712, ed ho

$$\frac{1+\sen q}{1-\sen q}=\tang^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)=\cot^2(45^\circ-\frac{1}{2}q)$$

$$\frac{1-\sen q}{1+\sen q}=\tang^2(45^\circ-\frac{q}{2})=\cot^2(45^\circ+\frac{q}{2})$$

$$\frac{1+\cos p}{1-\cos p}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}p}{\sen^2\frac{1}{2}p}=\cot^2\frac{p}{2} \quad\Big|\quad \frac{1+\sen q}{1+\cos p}=\frac{\sen^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\cos^2\frac{1}{2}p}$$

$$\frac{1-\sen q}{1-\cos q}=\frac{\cos v.\, q}{\sen v.\, q}=\frac{\sen^2(45^\circ-\frac{1}{2}q)}{\sen^2\frac{1}{2}q}$$

Ripiglio anche le formule del n°. 703 e fatto $\sen a=s$, $\cos a=c$, $\sen b=\sigma$, $\cos b=k$, ne deduco

715. 1°. $\sen(a+b)\times\sen(a-b)=s^2k^2-\sigma^2c^2=s^2(1-\sigma^2)-\sigma^2(1-s^2)=s^2-\sigma^2=\sen^2 a-\sen^2 b=(696)\cos^2 b-\cos^2 a$.

716. 2°. $$\frac{\sen(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{sk+\sigma c}{ck+s\sigma}=\frac{\frac{k}{\sigma}+\frac{c}{s}}{\frac{ck}{s\sigma}+1}= \dots\dots$$

$$\frac{\cot b+\cot a}{1+\cot b\cot a}=\frac{\tang a+\tang b}{\tang a\tang b+1}.$$

717. 3°. $$\frac{\sen(a-b)}{\cos(a+b)}=\frac{sk-\sigma c}{ck-s\sigma}=\frac{\cot b-\cot a}{\cot b\cot a-1}= \dots\dots$$

$$\frac{\tang a-\tang b}{1-\tang a\tang b}.$$

718. 4°. $$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{ck-s\sigma}{ck+s\sigma}=\frac{\frac{ck}{\sigma c}-\frac{s\sigma}{\sigma c}}{\frac{ck}{c\sigma}+\frac{s\sigma}{c\sigma}}=\frac{\frac{ck}{sk}-\frac{s\sigma}{sk}}{\frac{ck}{sk}+\frac{s\sigma}{sk}}=$$

$$\frac{1-\tang a\tang b}{1+\tang a\tang b}=\frac{\cot b-\tang a}{\cot b+\tang a}=\frac{\cot a-\tang b}{\cot a+\tang b}.$$

719. 5°. $tang(a+b) = \frac{sk+\sigma c}{ck-s\sigma} = \frac{tang\, a + tang\, b}{1 - tang\, a\, tang\, b} = \frac{cot\, b + cot\, a}{cot\, b\, cot\, a - 1}$.

720. 6°. $cot(a+b) = \frac{1 - tang\, a\, tang\, b}{tang\, a + tang\, b} = \frac{cot\, b\, cot\, a - 1}{cot\, b + cot\, a}$.

721. 7°. $tang(a-b) = \frac{tang\, a - tang\, b}{1 + tang\, a\, tang\, b} = \frac{cot\, b - cot\, a}{cot\, b\, cot\, a + 1}$.

722. 8°. $cot(a-b) = \frac{1 + tang\, a\, tang\, b}{tang\, a - tang\, b} = \frac{cot\, b\, cot\, a + 1}{cot\, b - cot\, a}$.

723. Sia $a = 45°$, e sarà $tang(45° + b) = cot(45° - b) = \frac{1 + tang\, b}{1 - tang\, b} = \frac{cot\, b + 1}{cot\, b - 1}$; e $tang(45° - b) = -tang(b - 45°) = \frac{1 - tang\, b}{1 + tang\, b} = cot(45° + b) = \frac{cot\, b - 1}{cot\, b + 1}$.

724. Se si fa $a = b = \frac{1}{2}c$, sarà $tang\, 2a = \frac{2\, tang\, a}{1 - tang^2 a} = \frac{2\, cot\, a}{cot^2 a - 1}$ ovvero $tang\, c = \frac{2\, tang \frac{1}{2} c}{1 - tang^2 \frac{1}{2} c}$, e $cot 2a = \frac{1 - tang^2 a}{2\, tang\, a} = \frac{cot^2 a - 1}{2\, cot\, a} = \frac{1}{2} cot\, a - \frac{1}{2} tang\, a$. Dunque $cot\, c = \frac{1}{2} cot \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} tang \frac{1}{2} c$; e $cot \frac{1}{2} c = 2\, cot\, c + tang \frac{1}{2} c$. Ora (705) $tang \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{1 - cos\, c}{1 + cos\, c}\right)} = \frac{1 - cos\, c}{sen\, c}$. Di quì viene ancora $tang(45° + a) - tang(45° - a)$ ovvero $tang(45° + a) + tang(a - 45°) = \frac{(1 + tang\, a)^2 - (1 - tang\, a)^2}{1 - tang^2 a} = \frac{4\, tang\, a}{1 - tang^2 a} = 2\, tang\, 2a$.

725. Poichè $sec\, a = \frac{1}{c}$ $cosec\, a = \frac{1}{s}$, sarà $sec(a+b) = \frac{1}{ck - s\sigma} = \frac{\frac{1}{ck}}{1 - \frac{s\sigma}{ck}} = \frac{sec\, a\, sec\, b}{1 - tang\, a\, tang\, b} = \frac{cosec\, a\, cosec\, b}{cot\, a\, cot\, b - 1}$; ...

$sec(a-b) = \frac{sec\, a\, sec\, b}{1 + tang\, a\, tang\, b}$; $cosec(a+b) = \frac{cosec\, a\, cosec\, b}{cot\, b + cot\, a}$; $cosec(a-b) = \frac{cosec\, a\, cosec\, b}{cot\, b - cot\, a}$..

726. Sia $a = b$, e si avrà $cosec\, 2a = \frac{cosec^2 a}{2\, cot\, a} = \frac{1 + cot^2 a}{2\, cot\, a} = \frac{1}{2}(cot\, a + tang\, a)$: dunque $cosec\, a = \frac{1}{2}(cot \frac{1}{2} a + tang \frac{1}{2} a)$: ma $cot \frac{1}{2} a = 2\, cot\, a + tang \frac{1}{2} a$ (724); dunque $cosec\, a = cot\, a +$

$tang \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} (cot \frac{1}{2} a + tang \frac{1}{2} a) = cot \frac{1}{2} a - cot a$, posto in luogo di $tang \frac{1}{2} a$ il suo valore $cot \frac{1}{2} a - 2cot a$.

Si ha ancora $sec\, 2a = \frac{sec^2 a}{1 - tang^2 a} = \frac{1 + tang^2 a}{1 - tang^2 a} = \ldots$ $\frac{(1 + tang\, a)^2}{1 - tang^2 a} - \frac{2\, tang\, a}{1 - tang^2 a} = \frac{1 + tang\, a}{1 - tang\, a} - \frac{2\, tang\, a}{1 - tang^2 a}$: ma $\frac{1 + tang\, a}{1 - tang\, a} = tang(45^\circ + a)$ e $\frac{2\, tang\, a}{1 - tang^2 a} = tang\, 2a$; dunque $sec\, 2a = tang(45^\circ + a) - tang\, 2a$, e $sec\, a = tang(45^\circ + \frac{1}{2} a) - tang\, a = cot(45^\circ - \frac{1}{2} a) - tang\, a$.

Poichè $sec\, a = \frac{1}{cos\, a}$, e $cosec\, a = \frac{1}{sen\, a}$, sarà $sec\, a = tang\, a \times cosec\, a$; e sostituendo tutti i valori di $cosec\, a$ trovati quì sopra, si avrà $sec\, a = \frac{tang\, a}{2} (cot \frac{1}{2} a + tang \frac{1}{2} a) = tang\, a \times (cot\, a + tang \frac{1}{2} a) = 1 + tang\, a\, tang \frac{1}{2} a = tang\, a\, (cot \frac{1}{2} a - cot\, a) = tang\, a\, cot \frac{1}{2} a - 1 = \frac{tang\, a}{tang \frac{1}{2} a} - 1$.

Del resto queste formule posson variarsi all' infinito sommandole, sottraendole, dividendole ec.

Calcolo delle Tavole de' Seni per mezzo delle Serie.

727. Poichè (696) $sen^2 a + cos^2 a = 1 = \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2$ (385) e l'arco $a = 0$ dà $cos\, a = \ldots$ $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, sarà $sen\, a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$: ma supposto $le = 1$ (361), abbiamo (360) $e^{a\sqrt{-1}} = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} +$ ec. $= 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} -$ ec. $+ (a - \frac{a^3}{2.3} +$ ec.$) \times \sqrt{-1}$, ed $e^{-a\sqrt{-1}} = 1 - a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} +$ ec. $= 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} -$ ec. $- (a - \frac{a^3}{2.3} +$ ec.$) \sqrt{-1}$; dunque sostituendo e riducendo, verrà

$$sen\, a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{a^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{ec.}$$

$$cos\, a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{ec.}$$

$$tang\, a = \frac{sen\, a}{cos\, a} = a + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{3.5} + \frac{17a^7}{3^2.5.7} + \frac{62a^9}{3^2.5.7.9} + \text{ec. (324)}$$

$$cot\, a = \frac{1}{tang\, a} = \frac{1}{a} - \frac{a}{3} - \frac{a^3}{3^2.5} - \frac{2a^5}{3^3.5.7} - \frac{a^7}{3^3.5^2.7} - \text{ec. (324)}.$$

Si ossetvi che se il raggio dell' arco quì supposto 1, sia r, 1°. volendo calcolar queste serie, dovrà moltiplicarsene per r il risultato finale (594): 2°. volendo usar di esse come stanno, dovrà supplirsi il raggio r secondo la regola già data (695). Si osservi ancora che posto $a = \frac{\pi}{m}$, se m sia infinito o grandissimo, sarà a infinitesimo o piccolissimo, e molto più a^2, a^3 ec. che spariranno in confronto di a; onde in tal caso $sen\, a = a = tang\, a$, $cos\, a = 1$, $cot\, a = \infty$.

728. Ma sia $a = \frac{90^\circ}{m}$; poichè $90^\circ = 1{,}5707963267948966$, chiamando c questo numero, si avrà

$$sen \frac{90^\circ}{m} = \frac{c}{m} - \frac{c^3}{2.3m^3} + \frac{c^5}{2.3.4.5m^5} - \frac{c^7}{2.3.4.5.6.7m^7} + \frac{c^9}{2.3.4....9m^9} - \text{ec.} =$$

Tèrmini Positivi		Termini Negativi	
$\frac{1}{m}$	1,5707963267948966	$\frac{1}{m^3}$	0,6459640975062462
$\frac{1}{m^5}$	0,0796926262461670	$\frac{1}{m^7}$	0,004681754135318
$\frac{1}{m^9}$	0,000160441184787	$\frac{1}{m^{11}}$	0,000003598843235
$\frac{1}{m^{13}}$	0,000000056921729	$\frac{1}{m^{15}}$	0,000000000668803
$\frac{1}{m^{17}}$	0,000000000006066	$\frac{1}{m^{19}}$	0,000000000000043
ec.		ec.	

$$cos \frac{90^\circ}{m} = 1 - \frac{c^2}{2m^2} + \frac{c^4}{2.3.4m^4} - \frac{c^6}{2.3.4.5.6m^6} + \text{ec.}$$

E lo stessso dicasi per $tang \frac{90^\circ}{m}$, e per $cot \frac{90^\circ}{m}$.

729. Per mezzo di queste serie si calcolano i seni, coseni ec. di tutti gli archi con sostituire i valori convenienti di m: così per calcolare il seno di 30°, si fa $m = 3$, e si ha

$$
\begin{aligned}
Sen\,30^\circ = & \;0{,}523\,598\,775\,598\,299 \\
& + 0{,}000\,327\,953\,194\,428 \\
& + 0{,}000\,000\,008\,151\,256 \\
& + 0{,}000\,000\,000\,000\,036 \\
\hline
& + 0{,}523\,926\,736\,944\,019 \\
\hline
& - 0{,}023\,924\,596\,203\,935 \\
& - 0{,}000\,002\,140\,719\,769 \\
& - 0{,}000\,000\,000\,020\,315 \\
\hline
& - 0{,}023\,926\,736\,944\,019, \text{ cioè } sen\,30^\circ = 0,5.
\end{aligned}
$$

730. Del resto, poichè basta calcolare i seni fino a 30° per aver tutti gli altri, sarà sempre $m > 3$ e la serie eguale a $sen\,\frac{90^\circ}{m}$ sarà convergentissima. Per esempio, se si vuole il seno di 9°, si farà $m = 10$, e si troverà subito $sen\,9^\circ = 0,156434465040231$. Il seno d'un arco d'un certo numero di gradi con minuti e secondi ec., si avrà collo stesso metodo.

731. Nelle Tavole ordinarie si suppose in principio il raggio $= 10\,000\,000\,000$ e ciò per calcolarle con maggiore esattezza: ora che son già calcolate, il raggio si suol supporre $= 1$. Per facilitare il calcolo, vi si trovano anche i logaritmi dei seni, coseni, tangenti e cotangenti; anzi con questi soli e con le Tavole dei logaritmi ordinarj può farsi qualunque calcolo. Non si son fatte Tavole particolari per le secanti e cosecanti perchè è raro l'uso di esse, ed è facile di calcolarle colle formule $sec\,a = \frac{1}{cos\,a}$ e $cosec\,a = \frac{1}{sen\,a}$.

732. Sciolghiamo ora il problema inverso, e dato il seno, il coseno, la tangente ec. d'un arco, troviamone la lunghezza: 1°. se si risale al valore di $sen\,a$, se ne dedurrà per il metodo inverso delle serie (346), $a = sen\,a + \frac{sen^3\,a}{2.3} + \frac{3 sen^5\,a}{2.4.5} + \frac{3.5.sen^7\,a}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.sen^9\,a}{2.4.6.8.9} +$ ec.: 2°. dall'equazioni (727) $sen\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $cos\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$ si ricava $e^{a\sqrt{-1}} = cos\,a + \sqrt{-1}.sen\,a = cos\,a\,(1 + \sqrt{-1}.tang\,a)$, ed $e^{-a\sqrt{-1}} = cos\,a - \sqrt{-1}.sen\,a = cos\,a\,(1 - \sqrt{-1}.tang\,a)$; e presi i logaritmi (361), $a\sqrt{-1} = l\,cos\,a + l(1 + \sqrt{-1}.tang\,a)$ e $-a\sqrt{-1} = l\,cos\,a + l(1 - \sqrt{-1}.tang\,a)$; dunque sottraendo, $2a\sqrt{-1} = l\left(\frac{1+\sqrt{-1}.tang\,a}{1-\sqrt{-1}.tang\,a}\right)$, e (356) $a = tang\,a - \frac{tang^3\,a}{3} + \frac{tang^5\,a}{5} -$ ec.

Applichiamo queste serie alla ricerca della ragion del dia-

metro alla circonferenza. Fatto $sen\, a = \frac{1}{2}$, si avrà la lunghezza dell' arco di $30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} +$ ec. che moltiplicata per 12 darebbe la circonferenza e perciò la ragion cercata; ma poichè questa serie è lunga a calcolarsi, sarebbe migliore la seconda, che posto $a = 45^\circ$, dà $a = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ ec., se non fosse anche più spedito il decompor l'arco di 45° in due altri a, b, e cercar separatamente la lor lunghezza. Ora in questa supposizione, $tang(a+b) = 1 = \frac{tang\, a + tang\, b}{1 - tang\, a\, tang\, b}$; dunque $tang\, a = \frac{1 - tang\, b}{1 + tang\, b}$. Sia $tang\, b = \frac{1}{3}$, sarà $tang\, a = \frac{1}{2}$: onde la somma degli archi a, b, o sia la quarta parte della semicirconferenza π, sarà

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \text{ec.} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \text{ec.} \end{array} \right\} = 0,7853981633974483$$

d' onde $\pi = 3,1415926535897932$, come si è detto (605).

733. Con l' equazioni di sopra (732. 2°.) una quantità esponenziale immaginaria si riduce a dei seni; poichè posto $a^{\pm x\sqrt{-1}} = e^{\pm z\sqrt{-1}} = cos\, z \pm \sqrt{-1}.sen\, z$, sarà $x\, l\, a = z$ ed $a^{\pm x\sqrt{-1}} = cos\, x \times la \pm \sqrt{-1}.sen\, x.la$. Le stesse equazioni $\pm z\sqrt{-1} = l(cos\, z \pm \sqrt{-1}.sen\, z)$, se si faccia $z = \pm(2n+1)\pi$ essendo n un numero intero e π la semicirconferenza 3,1415 ec., danno $sen\, z = 0$, $cos\, z = -1$ (693) e $\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1} = l - 1$; dunque il logaritmo di -1 e però anche quello di qualunque numero o raggio negativo $-r$ (730), ha infiniti valori tutti immaginarj, e in generale sono immaginarj i logaritmi dei numeri negativi, Anche quelli dei positivi hanno un' infinità di valori immaginarj ed un solo reale, che perciò si usa nel calcolo; poichè fatto $z = 2n\pi$, viene $\pm 2n\pi\sqrt{-1} = l\,1$, ove se $n = 0$, si ha $l\,1 = 0$, valor reale, mentre tutti gli altri sono immaginarj.

734. Ma sia $l(a \pm b\sqrt{-1})$ il logaritmo d' una quantità immaginaria; fatta $\sqrt{(a^2+b^2)} = c$ e $\frac{b}{a} = tang\, h$, avremo $l(a \pm b\sqrt{-1}) = la(1 \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}) = la + l(1 \pm \sqrt{-1}.tang\, h) = la - l\, cos\, h \pm h\sqrt{-1}$ (732. 2°.): ora $cos\, h = \frac{sen\, h}{tang\, h} = \frac{a}{b}\sqrt{(1 - cos^2 h)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{a}{c}$; dunque $l(a \pm b\sqrt{-1}) = lc \pm h\sqrt{-1} = lc + l(cos\, h \pm \sqrt{-1}.sen\, h)$ (732. 2°.) $= lc(cos\, h \pm \sqrt{-1}.sen\, h)$, e perciò $a \pm b\sqrt{-1} = c(cos\, h \pm \sqrt{-1}.sen\, h)$, cioè le quantità

immaginarie e i lor logaritmi posson ridursi a seni e coseni d'archi reali.

735. Infine se nelle consuete formule (732. 2°.) in vece di a si scriva ma, avremo $e^{ma\sqrt{-1}} = \cos ma + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, ma = (\cos a + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, a)^m$, ed $e^{-ma\sqrt{-1}} = \cos ma - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, ma = (\cos a - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, a)^m$: ove di passaggio si noti che se $a = 90°$, si avrà $\cos m.90° + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, m\, 90° = (\sqrt{-1})^m$ e $\cos m.90° - \sqrt{-1} \times \mathrm{sen}\, m.90° = (-\sqrt{-1})^m = (\sqrt{-1})^{3m}$ (385); onde sommando e sottraendo le due equazioni, si ha 1°. $2\cos m.90° = (\sqrt{-1})^m + (\sqrt{-1})^{3m} = (1 + (\sqrt{-1})^{2m})(\sqrt{-1})^m = (385)\ (1 \pm 1)(\sqrt{-1})^m$; 2°. $2\,\mathrm{sen}\, m.\,90° = (\sqrt{-1})^{m-1} - (\sqrt{-1})^{3m-1} = (385)(\sqrt{-1})^{m-1} + (\sqrt{-1})^{3(m-1)} = (1 - (\sqrt{-1})^{2m})(\sqrt{-1})^{m-1} = (1 \mp 1)(\sqrt{-1})^{m-1}$.

Tornando alle formule generali si troverà

$$\mathrm{sen}\, ma = \frac{(\cos a + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, a)^m - (\cos a - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, a)^m}{2\sqrt{-1}} = \ldots$$

$m \cos^{m-1} a\, \mathrm{sen}\, a - m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} \cos^{m-3} a\, \mathrm{sen}^3 a + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5} \cos^{m-5} a\, \mathrm{sen}^5 a$ — ec.. e $\cos ma = \frac{1}{2}[(\cos a + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, a)^m + (\cos a - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}\, a)^m] = \cos^m a - m.\frac{m-1}{2} \cos^{m-2} a\, \mathrm{sen}^2 a + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4} \cos^{m-4} a\, \mathrm{sen}^4 a$ — ec. con che si cangiano i seni e coseni d'archi multipli in potenze di seni e coseni d'archi semplici; poichè fatto $m = 2, = 3, = 4$ ec., si ha

$$\cos 2a = \cos^2 a - \mathrm{sen}^2 a$$
$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\,\mathrm{sen}^2 a \cos a$$
$$\cos 4a = \cos^4 a - 6\,\mathrm{sen}^2 a \cos^2 a + \mathrm{sen}^4 a$$

ec. ec.

$$\mathrm{sen}\, 2a = 2\,\mathrm{sen}\, a \cos a$$
$$\mathrm{sen}\, 3a = 3\,\mathrm{sen}\, a \cos^2 a - \mathrm{sen}^3 a$$
$$\mathrm{sen}\, 4a = 4\,\mathrm{sen}\, a \cos^3 a - 4\,\mathrm{sen}^3 a \cos a$$

ec. ec.

sostituendo ora successivamente $1 - \cos^2 a$ a $\mathrm{sen}^2 a$ (696), ed $1 - \mathrm{sen}^2 a$ a $\cos^2 a$, avremo

A $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 a$
B $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \qquad = (1 - 4\,\mathrm{sen}^2 a)\sqrt{(1 - \mathrm{sen}^2 a)}$
C $\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 \qquad = 1 - 8\,\mathrm{sen}^2 a + 8\,\mathrm{sen}^4 a$
ec. ec. ec.

E $\mathrm{sen}\, 2a = 2\cos a\sqrt{(1 - \cos^2 a)} \qquad = 2\,\mathrm{sen}\, a\sqrt{(1 - \mathrm{sen}^2 a)}$
F $\mathrm{sen}\, 3a = (4\cos^2 a - 1)\sqrt{(1 - \cos^2 a)} = 3\,\mathrm{sen}\, a - 4\,\mathrm{sen}^3 a$
G $\mathrm{sen}\, 4a = (8\cos^3 a - 4\cos a)\sqrt{(1 - \cos^2 a)} = (4\,\mathrm{sen}\, a - 8\,\mathrm{sen}^3 a)\sqrt{(1 - \mathrm{sen}^2 a)}$
ec. ec. ec.

Queste ultime formule danno i valori delle potenze dei seni e coseni d'un arco, espresse in seni e coseni semplici d'archi multipli. Ci contenteremo di accennar solamente colle lettere marginali l'equazioni onde nascono; rammentando che

$sen - ma = - sen\, ma$ (704), $cos\, ma = cos - ma = \frac{1}{2} cos\, ma + \frac{1}{2} cos - ma$, ec.: si ha dunque

$(A)\ 2cos^2 a = cos\, 2a + 1 \qquad = \frac{1}{2}[cos 2a + 2 cos 0° + cos - 2a]$.

$(B)\ 4cos^3 a = cos\, 3a + 3 cos\, a \qquad = \frac{1}{2}[cos 3a + 3 cos a + 3 cos - a + cos - 3a.]$

$(C,B)\ 8cos^4 a = cos 4a + 4 cos 2a + 3 = \frac{1}{2}[cos 4a + 4 cos 2a + 6 cos 0° + 4 cos - 2a + cos - 4a]$

ec. ec. ec.

dal che si ricaverà generalmente

$2^m cos^m a = cos\, ma + m\, cos\,(m-2)a + m.\frac{m-1}{2} cos(m-4)a + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} cos\,(m-6)\,a + ec.$

Operando in un modo simile sulle formule dei seni avremo

$(A)\ 2sen^2 a = - cos\, 2a + 1 \qquad = \frac{1}{2}[\ cos\, 2\, 90°. cos\, 2a + 2\, cos\, 0°. cos\, 0° + cos\text{-}2\, 90°. cos\text{-}2a]$.

$(F)\ 4sen^3 a = - sen\, 3a + 3 sen\, a \qquad = \frac{1}{2}[\ sen\, 3.90°. sen\, 3a + 3\, sen\, 90°. sen\, a + 3\, sen\text{-}90°. sen\text{-}a + sen\text{-}3\, 90°. sen\text{-}3a]$.

$(C,A)\ 8sen^4 a = cos 4a - 4cos^2 a + 3 \qquad = \frac{1}{2}[\ cos\, 4\, 90°. cos\, 4a + 4\, cos\, 2.90°. cos\, 2a + 6\, cos\, 0°. cos\, 0° + 4\, cos\text{-}2\, 90°. cos\text{-}2a + cos\text{-}4.90°. cos\text{-}4a]$.

ec. ec.

dal che pure si avrà generalmente

$2^m sen^m a = 1\,[\ cos\, m.90°\ cos\, m\, a + sen\, m.90°\ sen\, m\, a\ ] + m\,[\,cos\,(m-2)\,90°\, cos\,(m-2)a + sen\,(m-2)\,90°\, sen(m-2)a] + m.\frac{m-1}{2}[cos(m-4)90°\, cos\,(m-4)a + sen\,(m-4)90°\, sen\,(m-4)a] + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}[cos(m\text{-}6)90° cos(m\text{-}6)\, a + sen(m\text{-}6)90° sen(m\text{-}6)a] + ec.$

736. La formula primitiva $sen\, ma = m\, cos^{m-1} a\, sen\, a$ ec. (735) dà l'equazioni che servono a dividere un arco o un angolo in un dato numero di parti eguali; poichè in tal caso si ha $sen\, ma$ e si cerca $sen\, a$. Sia $sen\, ma = b$, $sen\, a = x$, $cos\, a = z = \sqrt{(1-x^2)}$, e la formula diverrà $b = mz^{m-1}x - m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} z^{m-3} x^3 + ec.$, e però facendo $m = 2, 3, 4, 5$ ec. le seguenti equazioni serviranno a dividere un arco in altrettante parti eguali

$b = 2zx = 2x\sqrt{(1-x^2)}$ . . . . per 2 parti

$b = 3z^2 x - x^3 = 3x - 4x^3$ 3

$b = 4z^3 x - 4zx^3 = (4x - 8x^3)\sqrt{(1-x^2)}$ 4

$b = 5z^4 x - 10z^2 x^3 + x^5 = 5x - 20x^3 + 16x^5$ . . 5

737. Con ciò si risolvono per approssimazione l'equazioni

del terzo grado nel caso irriducibile. Infatti l'arco $3a$ si divide in tre parti eguali per mezzo dell' equazione $3x - 4x^3 = b = sen\,3a$: ma $sen\,3a = sen(3a \pm 2n\pi) = \pm sen[(2n+1)\pi \mp 3a]$ (710); dunque posto $\pi = 180°$, con la stessa equazione si divideranno in tre parti eguali anche gli archi $3a \pm 2n\pi$ e $\pm [(2n+1)\pi \mp 3a]$, che di fatto divisi, danno le tre radici dell'equazione $sen\,a$, $sen(a \pm n.120°)$, e $\pm sen[(2n+1)60° \mp a]$, cioè (706) $sen\,a$, $sen(60° - a)$, e $-sen(60° + a)$. Ridotta dunque l'equazione a $x^3 - \frac{3r^2x}{4} + \frac{r^3 sen\,3a}{4} = 0$ (695), e paragonata con quella da risolversi $x^3 - px + q = 0$ (se q fosse negativo si farebbe $x = -y$) avremo $\frac{3}{4}r^2 = p$, $\frac{1}{4}r^3 sen\,3a = q$, onde $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ e $sen\,3a = \frac{3q}{p}$; e poichè $r > sen\,3a$, sarà $2\sqrt{\frac{p}{3}} > \frac{3q}{p}$ e $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, ciò che nella nostra ipotesi di p negativo costituisce il caso irriducibile (392); onde *tutte l'equazioni del terzo grado nel caso irriducibile son risolubili con questo metodo*. Quindi riducendo queste espressioni al raggio r, si avrà 1°. $\frac{3q}{p}$ ($= sen\,3a$) $= r.sen\,3a$ (727) onde $sen\,3a = \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$ con che si conoscerà $3a$ ed a: 2°. $x (= sen\,a) = r.sen\,a = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \times sen\,a$: 3°. $x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \times sen(60° - a)$: 4°. $x = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \times sen(60° + a)$.

Esempj I. Sia l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$, che dà $p = 3$, $q = 1$; onde $sen\,3a = \frac{1}{2}$, e $3a = 30°$: dunque $x = 2sen\,10° = 0,347296$, $x = 2sen\,50° = 1,532089$, $x = -2sen\,70° = -1,879385$.

II. Sia $x^3 - x + \frac{1}{3} = 0$, si avrà $p = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $sen\,3a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $L sen\,3a = \frac{1}{2}L3 - L2 = 9,9375306 = L\,sen\,60°$; dunque $3a = 60°$, ed $x = \frac{2\,sen\,20°}{\sqrt{3}} = 0,394931$, $x = \frac{2sen\,40°}{\sqrt{3}} = 0,742227$, $x = -\frac{2\,sen\,80°}{\sqrt{3}} = -1,137158$.

III. Sia anche l'equazione $x^3 - 5x + 3 = 0$, che dà $p = 5$, $q = 3$, $sen\,3a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3^5}{5^3}}$; dunque $3a = 44°\ 11'\ 52''$, ed $x = \frac{2\sqrt{5}\,sen(14°\ 43'\ 57'')}{\sqrt{3}} = 0,656617$, $x = \frac{2\sqrt{5}\,sen(45°\ 16'\ 3'')}{\sqrt{3}} = 1,834246$, $x = \frac{-2\sqrt{5}\,sen(74°\ 43'57'')}{\sqrt{3}} = -2,490863$.

Risoluzione de' Triangoli Rettilinei.

738. LA Trigonometrìa risolve questo problema generale: Date in un triangolo tre di queste cinque cose, due angoli e tre lati, trovar le due altre. La soluzione è fondata sul principio che *in ogni triangolo i seni degli angoli son come i lati opposti*. In fatti iscritto il triangolo al circolo, ogni lato sarà doppio del seno dell'angolo opposto; dunque i lati del triangolo saranno come i seni degli angoli opposti misurati in questo circolo, e perciò come i seni degli angoli stessi misurati nel circolo delle Tavole.

739. Dunque 1°. in ogni triangolo rettangolo BAC chiamato r il seno dell' angolo retto o il raggio, l'ipotenusa $BC=h$, il lato $AB=g$, l'angolo adjacente $B=a$, l'altro lato $AC=g'$, l'angolo adjacente $C=a'$, si avrà $r:h::sen\,a':g::sen\,a:g'$; 2°. poichè nel triangolo rettangolo il seno e la tangente d'un angolo acuto a' sono il coseno e la cotangente dell'altro acuto a, onde $sen\,a'=cos\,a$, $tang\,a'=cot\,a$ e reciprocamente, verrà $sen\,a:sen\,a'::g':g::sen\,a:cos\,a::(699.701)\,tang\,a:r::r:cot\,a$. 101.

Perciò si è formata con le due analogìe

I^a. $r:h::sen\,a'(=cos\,a):g::sen\,a(=cos\,a'):g'$

II^a. $g':g::tang\,a(=cot\,a'):r::r:tang\,a'(=cot\,a)$

la seguente Tavola per risolvere il triangolo ABC, ove oltre l'angolo retto son date due delle cinque cose h, g, g', a, a', purchè queste non sieno i due angoli, nel qual caso si ha la sola ragion dei lati:

TAVOLA PER LA RISOLUZ. DEI TRIANG. RETTANG.

	Dati	Trovare	FORMULE
740	g, g'	h	$h = \sqrt{(g^2 + g'^2)}$
741		a	$tang\, a = r.g' : g$
742		a'	$tang\, a' = r.g : g'$
743	g, h	g'	$g' = \sqrt{(h^2 - g^2)}$
744		a	$cos\, a = r.g : h$
745		a'	$sen\, a' = r.g : h$
746	g', h	g	$g = \sqrt{(h^2 - g'^2)}$
747		a	$sen\, a = r.g' : h$
748		a'	$cos\, a' = r.g' : h$
749	g, a	g'	$g' = g.tang\, a : r$
750		h	$h = r.g : cos\, a$
751	g', a	g	$g = g'.cot\, a : r$
752		h	$h = r.g' : sen\, a$
753	g, a'	g'	$g' = g.cot\, a' : r$
754		h	$h = r.g : sen\, a'$
755	g', a'	g	$g = g'.tang\, a' : r$
756		h	$h = r.g' : cos\, a'$
757	h, a	g	$g = h\, cos\, a : r$
758		g'	$g' = h \cdot sen\, a : r$
759	h, a'	g,	$g = h.sen\, a' : r$
760		g'	$g' = h\, cos\, a' : r$

761. Convien quì avvertire che se nelle formule 744, 745, 747 e 748 i seni e coseni di a, a' fossero molto grandi, le Tavole darebbero gli angoli poco esatti. Così se fosse $g = 9648893$, $h = 9648900$ ed $r = 1$, si avrebbe (744) $l\,cos\, a$ (= $l\,sen\, a'$ (745)) $= lg - lh = 6{,}9844775 - 6{,}9844778 = 9{,}9999997$, nè si saprebbe qual fosse l'angolo tra $0°.3'.45''$ e $0°.4'.25''$. Ecco perciò un compenso che somministrano le stesse formule. Poichè (744) $cos\, a = \frac{g}{h}$, sarà $h : g :: 1 : cos\, a$ e perciò $1°$. $h : h - g :: 1 : 1 - cos\, a :: 1 : 2\, sen^2\, \frac{1}{2} a$ (705) e quindi

FIG.

$sen\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{h-g}{2h}\right)}$: 2°. $h+g:h-g::1+\cos a:1-\cos a::1:\frac{1-\cos a}{1+\cos a}::1:tang^2\frac{a}{2}$ (714) e però ... $tang\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{h-g}{h+g}\right)}$. Così la proporzione $h:g'::1:\cos a'$ (748)($=sen\ a$ (747)) darà $sen\frac{a'}{2}=\sqrt{\left(\frac{h-g'}{2h}\right)}$ e $tang\frac{a'}{2}=\sqrt{\left(\frac{h-g'}{h+g'}\right)}$. Applicando al caso di sopra la prima di queste formule, si avrà $l\,sen\frac{a}{2}=6,7797951=l\,sen\,0°.2'.4'',2$, ed $a=0°.4'.8'',4$.

Le tangenti o cotangenti benchè grandi non conducono all'istessa incertezza perchè crescono o scemano con differenze sempre notabili.

Risoluzione de' triangoli obliquangoli.

762. I. *Dati due angoli* B, A (cioè tutti e tre (510.690)) *e un lato* BC, *trovare i due altri lati* BA, AC. Sarà dunque (738) $sen\,A:BC::sen\,B:AC=\frac{BC\times sen\,B}{sen\,A}::sen\,C(=sen(A+B)):AB=\frac{BC\,sen(A+B)}{sen\,A}$. Dato AB, si avrebbe $sen(A+B):BA::sen\,B:AC::sen\,A:BC$ e generalmente 102.

$$lato\ cercato=\frac{lato\ dato\times sen\ angolo\ opposto\ al\ lato\ cercato}{sen\ ang.\ opposto\ al\ lato\ dato}$$

D'ora in poi chiameremo per brevità *l*, *a* il lato e angolo *dato*; *l.c.*, *a.c.* il lato e angolo *cercato*; *l.adj.*, *a.adj.* il lato e angolo *adjacente*; *l.op.*, *a.op.* il lato e angolo *opposto*. Se *op.*, *adj.* non hanno altro aggiunto, si riferiscon sempre a ciò che immediatamente precede. Così $sen\,a.c.=sen\,l.\,op.\times sen\,a.adj.:l.op.a$ si leggerebbe: *il seno dell'angolo cercato è eguale al prodotto del seno del lato opposto* all'angolo cercato, *nel seno dell'angolo adjacente*

al detto lato opposto, *diviso per il lato opposto, all' angolo* dato. Ciò sia detto ora per sempre.

102. 763. II. *Dati i lati* AB, AC *e l' angolo* B *opposto ad* AC, *trovar l' angolo* C *opposto ad* AB. Si ha (738) AC : *sen* B :: AB : *sen* C, e quindi generalmente $sen\, a.c. = \frac{l.op. \times sen\, a}{l.op.\, a}$: e si noti che *l' angolo cercato è* $< 90°$ *quando è opposto al minor dei due lati dati*; poichè se AB < AC, anche C < B (514) e perciò C < 90° (513). In caso diverso, l'angolo cercato è dubbio (690) se d'altronde non se ne sappia la specie.

III. *Dati i lati* AB, AC *e l' angolo* B *opposto ad* AC, *trovar l' angolo contenuto* A. Si cerchi C e si avrà A (510).

764. IV. *Dati i lati* AB, AC *e l' angolo* B, *trovar l' altro lato* BC. Si cerchi A, e si ha *sen* B : AC :: *sen* A : BC.

Ma per trovar BC direttamente, condotta la normale AD sopra BC, sia AB $= a$, AC $= b$, *sen* B $= s$, *cos* B $= c$: avremo AD $= \frac{as}{r}$ (758) e BD $= \frac{ac}{r}$ (757); dunque DC $= \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(b^2 - \frac{a^2 s^2}{r^2})}$ e DB + DC = BC $= \frac{ac}{r} + \sqrt{(b^2 - \frac{a^2 s^2}{r^2})}$; ove se B è ottuso, il primo termine sarà negativo (691), e se è ottuso C, sarà negativo il secondo (562).

765. V. *Dati i lati* AB, AC *e l' angolo contenuto* A, *trovar gli altri angoli* B e C. Si avrà (738) AB : AC :: *sen* C : *sen* B, e perciò AB + AC : AB ∽ AC :: *sen* C + *sen* B : *sen* C ∽ *sen* B :: $tang \frac{1}{2}(C + B) : tang \frac{1}{2}(C \backsim B)$ (713): ma $tang \frac{1}{2}(C+B) = tang(90° - \frac{1}{2}A)$ (perchè $B + C = 180° - A$) $= cot \frac{1}{2} A$; dunque $tang \frac{1}{2}(C \backsim B) = \frac{AB \backsim AC}{AB + AC} \times cot \frac{A}{2}$ e quindi generalmente, chiamando a', a'' gli angoli cercati ed l, l' i lati loro opposti,

$$tang \frac{1}{2} (a' \backsim a'') = cot \frac{1}{2} a \times \frac{l \backsim l'}{l + l'}$$

di quì si hanno subito (196) gli angoli B e C. FIG. 102.

766. Fatto ora AB$=a$, AC$=b$ e supponendo che $\frac{ar}{b}=\frac{a}{b}$ rappresenti la tangente d'un arco u (741),

sarà $\frac{AB \backsim AC}{AB+AC}=\frac{a \backsim b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}\backsim 1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{tang\, u \backsim 1}{tang\, u+1}=tang\,(u \backsim 45°)$ (723), e quindi fatta questa proporzione: il minor lato b al maggiore $a::1:$ tangente d' un arco u, si avrà 1 alla tangente della differenza di u da $45°::tang\,\frac{1}{2}(C+B)(=cot\,\frac{1}{2}A):tang\,\frac{1}{2}(C\backsim B)=cot\,\frac{1}{2}A\times tang\,(u\backsim 45°)$. Nel modo stesso si troverebbe $cot\,\frac{1}{2}(C\backsim B)=tang\,\frac{1}{2}A\times tang\,(u+45°)$.

Per risolver direttamente il problema, condotta sul lato AC la normale FB e fatto AB$=a$, AC$=b$, sen A$=s$, cos A $=c$, si avrà FB$=\frac{as}{r}$, AF$=\frac{ac}{r}$; dunque FC$=b-\frac{ac}{r}$, e perciò (742) $tang$ C$=\frac{asr}{br-ac}$, e condotta da C una normale sul lato AB si troverebbe del pari $tang$ B$=\frac{bsr}{ar-bc}$. Se l'angolo A fosse ottuso, c diverrebbe negativa e sarebbe $tang$ C$=\frac{asr}{br+ac}$, e $tang$ B$=\frac{bsr}{ar+bc}$.

767. VI. *Dati due lati* AB, AC *e l'angolo contenuto* A, *trovar l'altro lato* BC. Trovato (765) l' un degli angoli B, o C, si ha sen B : AC $::$ sen A : BC.

Ma presi i valori di sopra (766), il triangolo rettangolo BFC dà direttamente BC$=\sqrt{\left[\frac{a^2s^2}{r^2}+\left(b-\frac{ac}{r}\right)^2\right]}=\sqrt{\left(a^2+b^2-\frac{2abc}{r}\right)}$, ovvero$=\sqrt{\left(a^2+b^2+\frac{2abc}{r}\right)}$ se l'angolo A è ottuso. Ora fatto $r=1$ e $c=1-2\,sen^2\frac{1}{2}A$(705), si avrà BC $=\sqrt{(a^2+b^2-2ab+4ab\,sen^2\frac{1}{2}A)}=\sqrt{[(a\backsim b)^2+4ab\,sen^2\frac{1}{2}A]}=(a\backsim b)\sqrt{\left(1+\frac{4ab\,sen^2\frac{1}{2}A}{(a\backsim b)^2}\right)}$ ovvero (facendo $\frac{2sen\frac{1}{2}A}{a\backsim b}\times\sqrt{ab}=tang\,u$), BC$=\frac{a\backsim b}{cos\,u}$.

FIG.

102.

768. VII. *Dati i tre lati d'un triangolo trovarne gli angoli*. Condotta da un angolo A la normale AD, sia $BC=a$, $AB=b$, $AC=d$; si avrà (562) $BD = \frac{a^2+b^2-d^2}{2a}$ e perciò (744) $\cos B = \frac{r}{2ab}(a^2+b^2-d^2) = \frac{r}{2ab}(a^2+2ab+b^2-d^2)-1$ cioè (fatto $r=1$ ed $a+b+d=2q$), $\cos B = \frac{2q(q-d)}{ab}-1$, onde $\sqrt{\left(\frac{1+\cos B}{2}\right)} = \cos\frac{B}{2}$ (705) $= \sqrt{\frac{q(q-d)}{ab}}$. Similmente perchè $-\cos B = \frac{d^2-a^2-b^2}{2ab} = \frac{d^2-(a-b)^2}{2ab}-1 = \frac{2(q-b)(q-a)}{ab}-1$, si avrà $\sqrt{\left(\frac{1-\cos B}{2}\right)} = \operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(q-a)(q-b)}{ab}}$, onde in generale (chiamati l', l'' i lati adjacenti all'angolo cercato ed l il lato opposto) $\cos\frac{1}{2}a.c = \sqrt{\frac{q(q-l)}{l'\times l''}}$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a.c = \sqrt{\frac{(q-l')(q-l'')}{l'\times l''}}$.

Finiremo con alcuni Problemi per esercizio dei Principianti.

769. I. Trovare un angolo x la cui tangente sia n^{pla} del suo seno. *Ris*. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n}$.

770. II. Dividere un dato angolo a in due angoli $x, a-x$ tali che i loro seni sieno nella ragion data di $m:n$ . . . . . . *Ris*. $\operatorname{tang} x = \frac{m \operatorname{sen} a}{n+m\cos a}$.

771. III. Data la differenza d di due angoli $x, x+d$ e la ragione $m:n$ dei loro seni, trovare gli angoli. *Ris*. $\operatorname{tang} x = \frac{n \operatorname{sen} d}{m-n\cos d}$.

772. IV. Date le ragioni $n:1$ dei seni ed $m:1$ delle tangenti di due angoli x, z, trovare gli angoli. *Ris*. $\operatorname{tang} x = \sqrt{\left(\frac{m^2-n^2}{n^2-1}\right)}$, $\operatorname{tang} z = \frac{1}{m}\sqrt{\left(\frac{m^2-n^2}{n^2-1}\right)} = \frac{1}{m}\operatorname{tang} x$.

773. V. Supposti aritmeticamente proporzionali i seni di tre angoli p, m, u, determinare quali debbano essere gli angoli estremi p, u affinchè anche i coseni di tutti e tre sieno nella medesima proporzione. *Ris*. Gli angoli debbono esser tali che $p-u$ sia piccolissimo.

774. VI. Data l'equazione $(n+N)\operatorname{sen} u = (n-N)\operatorname{sen} p$

ove n, N son note e $sen\,m$ è medio proporzionale aritmetico tra $sen\,p$ e $sen\,u$, trovar l'angolo $p-u$ che si suppone piccolissimo. *Ris.* $p-u=\frac{1}{n}(2N\,tang\,m)$.

775. VII. Date l'equazioni $(n+N)\,sen\,h=sen\,u'$ ed $(n-N)\,sen\,g=sen\,p'$ ove si ha $\pm h\mp g=p-u$, N è nota, e son noti $sen\,m$, $sen\,i'$, $sen\,m'$ medj proporzionali aritmetici tra $sen\,p$ e $sen\,u$, tra $sen\,g$ e $sen\,h$, e tra $sen\,u'$ e $sen\,p'$, trovar l'angolo $u'-p'$ che si suppone piccolissimo. *Ris.* $u'-p'=\frac{2N\,sen(i'\pm m)}{cos\,m\,cos\,m'}$.

776. VIII. Con la regola di doppia falsa posizione trovare un arco x che sia metà della sua tangente, o calcolar l'equazione $2x=tang\,x$. *Ris.* $x=66°\,46'\,54''\,14'''$.

777. IX. Con la regola stessa ricavare il valor dell'angolo x dall'equazione $sen\;16'=\frac{2sen\,x\,sen^2\frac{1}{2}x}{cos\,2x}$, *Ris.* $x=11°\,44'\,42''$ incirca.

778. X. Con le formule del N°. 727. sommare in generale la serie $S=sen\,a+sen(a+b)+sen(a+2b)+\ldots+sen(a+nb)$, e determinar particolarmente S nel caso di $a+nb=(n+1)a=90°$. *Ris.* In generale $S=\ldots\ldots\ldots$ $\frac{cos(a-\frac{1}{2}b)-cos[a+(n+\frac{1}{2})b]}{2\,sen\frac{1}{2}b}$, in particolare $S=\frac{1}{2}(1+cot\frac{1}{2}a)$.

779. XI. Risolver l'equazioni della forma $x^m\pm a^m=0$. *Ris.* Il fattor generale della prima equazione si troverà $x^2-2ax\,cos\frac{2n+1}{m}\pi+a^2$, della seconda $x^2-2ax\,cos\frac{2n\pi}{m}+a^2$, ove $n=0,=1,=2,=3$ ec. e $\pi=180°$.

780. XII. Un vascello si avanzò di 50 mig. a Levante e di 116 a Tramontana. Qual'è la posizione e la lunghezza della linea retta per cui ha camminato? *Ris.* Ella fa un angolo di 23° 19' 3'' con la linea di tramontana, ed è lunga 126 mig. incirca.

781. XIII. Data l'area s e uno degli angoli acuti a d'un triangolo rettangolo trovarne i lati x, y e l'ipotenusa z. *Ris.* $x=\sqrt{\frac{2s\,tang\,a}{r}}$, $y=\sqrt{\frac{2s\,cot\,a}{r}}$, $z=2\sqrt{\frac{rs}{sen\,2a}}$.

782. XIV. Dati i lati $CA=a$, $AH=b$ e gli angoli $ACB=m$, $AHB=n$, $CBH=r$ d'un quadrilatero, trovar l'angolo CBA e la diagonale AB. *Ris.* 1°. $cot\,CBA=\frac{a\,sen\,m\,cos\,r\pm b\,sen\,n}{a\,sen\,m\,sen\,r}$, ove il segno — vale per il quadrilatero ACBH': 2°. $AB=\frac{a\,sen\,m}{sen\,CBA}$. 123.

783. XV. Dati due circoli concentrici NPK, QRF con la tangente in Q e la corda QR nel minore, e condotta dal punto N la NK parallela a QR, la NE normale ad NP e la NE 9.

FIG. che formi l'angolo LNE = ENK, trovar la razione di NK + 9. NL a QR. *Ris.* La ragione è dupla.

123. 784. XVI. Data la retta AC comune sezione di due piani triangolari ACB, ACD tali che la retta BD condotta per i due vertici sia normale al piano ACD, e dati oltre al triangolo ACB gli angoli d'inclinazione BCD = m, BAD = n, determinare il triangolo ACD, o sia *trovare sul piano indeterminato* MAR *il piano o triangolo di riduzione* ACD *del triangolo* ACB. *Ris.* Fatti gli angoli CAB = a, ABC = b, ACB = c, si troverà $\cos \text{ACD} = \frac{\cos c}{\cos m}$, $\cos \text{CAD} = \frac{\cos a}{\cos n}$, $\text{sen} \frac{1}{2}\text{CDA} = \sqrt{\left(-\frac{\text{sen} \frac{1}{2}(b+m-n) . \text{sen} \frac{1}{2}(b+n-m)}{\cos m \cos n}\right)}$, e poichè è data AC, si avrà di quì tutto il resto.

TRIANGOLI SFERICI

104. SE il semicircolo generatore PAp forma la sfera APAp (632), il solo raggio AC descrive un *circolo massimo* (633) detto *Equatore*, e l'altre ordinate descrivon circoli *paralleli* tanto minori quanto più son lontani da AC (634); perciò i circoli minori equidistanti dal centro sono eguali. Ogn'altro semicircolo APA eguale al primo genererebbe la stessa sfera, e ogni sfera ha un'infinità di circoli massimi (633) Ve ne è pure un'infinità di minori di cui non si fa uso attesane l'ineguaglianza: onde col nome di *circoli* e d'*archi* intenderemo sempre i circoli massimi e i loro archi. Ora la Trigonometrìa *sferica* risolve i triangoli formati sulla superficie d'una sfera da tre circoli che si segan tra loro; e però ciascun lato d'un triangolo sferico è l'arco d'un circolo che ha per centro il centro stesso della sfera, e a traverso del quale può condursi normalmente un diametro di essa.

785. Questo diametro normale al piano d'un circolo ACA è l'*Asse* di questo circolo, e le sue estremità P.p ne sono i *Poli*. Ogni circolo ha poli diversi, perchè ha diverso asse.

786. E poichè l'asse passa per il centro del circolo e gli è normale, è chiaro 1°. che vi fa tanti angoli retti quanti son raggi nel piano del circolo: 2°. che gli archi che misuran

105. questi angoli son tutti di 90° e perciò eguali, appartenendo a circoli eguali: onde *l'arco compreso tra il polo d'un circolo e ogni punto della sua circonferenza è sempre di* 90°: 3°. che i due punti B, D bastando a determinar la posizione d'un circolo che dee passar per C (619), *due archi* AB, AD *di* 90° *determinano il polo* A *di* BD. Col compasso sferico è facile di segnar sulla superficie di una sfera il circolo di cui è dato un polo, o di trovare i poli di un circolo dato.

787. Poichè tutti i circoli della sfera hanno un centro comune, la loro intersezione è necessariamente un diametro sì della sfera, come di questi circoli: ma ogni diametro taglia il suo circolo in mezzo; dunque due o più circoli si tagliano in parti eguali. Onde 1°. se due circoli si son tagliati una volta, non si taglieranno più che a 180° di distanza dalla prima intersezione: 2°. perciò due soli archi non chiudon superficie, se non è ciascuno di 180°; del resto qualunque sia il numero dei loro gradi, si formerà sulla superficie sferica un angolo di cui bisogna conoscer la misura.

788. Siano i due archi AB, AD di 90° ciascuno, e col loro incontro in A formino l'angolo sferico BAD. E' chiaro 1°. che i raggi BC, DC sono ambedue perpendicolari ad AC (786): 2°. che questi raggi hanno tra loro la stessa inclinazione che i piani circolari ACB, ACD in cui sono (620): 3°. che la misura di questa inclinazione è l'arco BD, poichè l'angolo BCD è al centro: 4°. che condotti gli assi di questi circoli (785), il loro angolo o che lo stesso, l'arco compreso tra i loro poli è la misura della loro *inclinazione*. 105.

Dunque 1°. *la misura d'un angolo sferico è l'arco del circolo compreso tra i suoi lati a 90° di distanza dal vertice di quest' angolo:* e in generale se dal vertice d'un angolo sferico come polo si descriva un circolo, la sua porzione compresa tra i lati dell'angolo, ne sarà sempre la misura.

789. Dunque 2° ogni angolo sferico è $< 180°$; 3°. i due angoli fatti da un arco che cada sopra di un altro eguagliano 180°; 4°. prolungati questi archi, gli angoli opposti sono eguali; onde la somma di tutti gli angoli sferici intorno a un punto è $= 360°$; 5°. prolungato BD fino a 90°, l'angolo B avrebbe per misura un arco di 90° (788), onde ogn' arco di 90° che scende dal polo d'un altro, gli è sempre normale; 6°. e se $AB = 90°$ sia normale a BD, potranno condursi da A sopra BD due archi di 90°, e sarà A il polo di BD (786).

790. Se per due punti *b*, *d* della superficie sferica sian condotte diverse sezioni o archi, il minor di tutti appartiene a un circolo massimo: poichè tra quanti archi può sottender la corda comune *bd*, si sa (595) che il minimo ha il massimo raggio; dunque gli archi dei circoli massimi o i loro angoli son la sola misura delle distanze prese sulla superficie sferica, che perciò si dicono anche *distanze angolari*.

791. Sia il triangolo sferico ACB; conduco dai suoi angoli i raggi AD, CD, BD; è chiaro che gli angoli al centro D misurano i lati del triangolo, e che l'angolo solido D misura la loro somma (788); dunque 1°. in ogni triangolo sferico ogni lato è $< 180°$ (787); 2°. la somma di due lati qualunque supera il terzo (627), 3°. la somma di tutti i lati è sempre $< 360°$ (628); 4°. e poichè ogni angolo sferico è $< 180°$ (789), *la somma di tutti gli angoli sarà minor di sei retti*, cioè ha un *limite in più* che è 540°. Vediamo se ne ha uno *in meno*. 106.

FIG. 108. 792. Dai tre angoli A, B, C presi successivamente per poli, si descrivano gli archi EF, DF, DE che col loro incontro formano il triangolo esteriore FDE. Dunque 1°. il punto A è lontano di 90° da tutti punti dell'arco EF (786. 789); 2°. il punto B è parimente a 90° da tutti i punti dell'arco DF: dunque F è il polo dell'arco AB (786). Così si prova che i punti E, D sono respettivamente i poli degli archi CA, CB.

Posto ciò, si prolunghino i due archi CA, CB fino all'arco DE, e sarà EG = 90° = DH; onde EG + DH = EG + DG + GH = ED + GH = 180°: dunque l'arco ED è il supplemento dell'arco GH, e perciò dell'angolo C di cui GH è la misura (788). Così si proverebbe che gli archi EF, DF sono i respettivi supplementi degli angoli A, B. Prolunghiamo ora l'arco GC fino all'arco EF, e GI sarà la misura dell'angolo E, e la parte AC ne sarà il supplemento, giacchè GC + AI ovvero GI + AC = 180°: così AB sarà il supplemento dell'angolo F, e BC dell'angolo D: onde in generale *se dai tre angoli di un triangolo sferico, presi per poli, si descrivan tre archi coi quali si formi un nuovo triangolo, gli angoli e i lati di quest' ultimo saranno reciprocamente i supplementi dei lati e degli angoli che son loro opposti nel primo*. Così angolo E + arco AC = 180° = arco DE + angolo C ec. Il triangolo esteriore DEF si chiama *polare* o *supplementario* del Triangolo ABC: lo applicheremo alla ricerca del limite in meno.

793. I tre angoli A, B, C hanno per supplementi respettivi i tre lati del triangolo supplementario, onde formano con essi il valor di sei retti; ma la somma di questi tre lati è sempre $< 360°$ (791); dunque la somma dei tre angoli A, B, C è $> 180°$. Onde 1°. *la somma degli angoli di un triangolo sferico può variare da 180° fino a 540° esclusivamente*, nè può dedursi il valor del terzo angolo da quello degli altri due come nei triangoli rettilinei; 2°. i tre angoli d'un triangolo sferico posson dunque esser tutti retti o ottusi, o anche acuti purchè in quest' ultimo caso la somma loro superi 180°: 3°. *la somma di due angoli d'un triangolo sferico è sempre $> 90°$, ogni volta che l'altr' angolo è eguale o minor di un retto*: 4°. poichè $DE < FE + FD$ (791), sarà (792) $180° - C < 180° - A + 180° - B$, cioè $A + B - C < 180°$ e $\frac{1}{2}(A + B - C)[= \frac{1}{2}(A + B + C) - C]$ $< 90°$; onde *in ogni triangolo sferico la differenza tra un angolo e la semisomma dei tre è $< 90°$.*

106. 794. Se i tre lati di due triangoli sferici siano respettivamente eguali tra loro, saranno eguali le loro corde (482) e i triangoli che esse formano (526); perciò condotti dagli angoli i raggi (791), si avranno eguali piramidi, eguali angoli solidi al centro, ed eguali inclinazioni dei loro piani; dunque anche gli angoli sferici respettivi saranno eguali (788) e perciò *i triangoli sferici che hanno i tre lati respettivamente eguali, hanno eguali anche gli angoli e sono eguali tra loro*.

Reciprocamente se avranno eguali i tre angoli l'uno all'al-

tro, i loro triangoli supplementarj avran lati respettivamente eguali (792): dunque saranno eguali tra loro ed avranno eguali anche gli angoli e i supplementi di essi; ma questi supplementi sono i lati stessi de' triangoli proposti; dunque anche *due triangoli sferici son eguali ogni volta che i loro tre angoli siano respettivamente eguali*, proprietà che nei triangoli rettilinei indica solo la somiglianza.

Due triangoli sferici son parimente *eguali o quando due lati respettivamente eguali formano un angolo eguale nell'uno e nell'altro, o quando sopra d'un lato eguale posano due angoli parimente eguali ai loro corrispondenti*. E' facile dimostrarlo come nei triangoli rettilinei.

795. Dato il triangolo sferico CAB in cui CA, CB sieno eguali, e prese due porzioni qualunque eguali CD, CE, conduco gli archi BD, AE, ed ho due triangoli eguali ACE, BCD; dunque AE = BD, e perciò il triangolo ABD = EAB (794) e l'angolo A = B; onde *in ogni triangolo sferico i lati eguali sono opposti ad angoli eguali*. La proposizione inversa si dimostra col triangolo supplementario. 109.

796. Sia ora nel triangolo sferico ABC l'angolo A > B; potrà dunque condursi un arco DA che faccia l'angolo DAB = B, e si avrà un triangolo isoscele ABD; dunque l'arco BDC = AD + DC; ma AD + DC > AC; dunque l'arco BC opposto all'angolo A è maggiore di AC opposto all'angolo B; onde *in ogni triangolo sferico al maggiore angolo è opposto il lato maggiore e al minor angolo il minor lato*. La proposizione inversa si dimostra come sopra col triangolo supplementario. 110.

797. Sia il triangolo sferico ABC rettangolo in A. Può essere che l'angolo B sia opposto a un arco < 90° come AC, ovvero = 90° come AD, ovvero > 90° come AE: di quale specie sarà l'angolo B in questi tre casi? Poiche l'arco AD è di 90° e perpendicolare sull'arco AB, il punto D sarà il polo di AB (789); dunque l'arco BD formerà un angolo retto DBA; dunque l'angolo CBA sarà acuto ed EBA ottuso; onde gli angoli B e C saran della stessa specie dei lati opposti. 111.

798. Questi angoli per distinguerli dal supposto retto si chiamano *obliqui*. Può dunque dirsi che *in ogni triangolo sferico rettangolo, ciascun degli angoli obliqui è della specie medesima del lato opposto*.

Dunque *se in un triangolo sferico* ACB *si conduca da* C *un arco* CD *normale ad* AB, *quest' arco dovrà cadere o dentro o fuori di* AB *secondo che gli angoli* A, B *son della stessa o di diversa specie*; poichè nei triangoli rettangoli CDB, CDA, al lato comune CD debbono opporsi angoli obliqui CAD, CBD della medesima specie. 115. e 116.

Questo nome di *angoli obliqui* è dato per brevità, e non impedisce che possano esser retti come A o ottusi. Chiamasi *ipotenusa* il lato opposto a quell'angolo retto che si considera come tale; così BC è l'ipotenusa del triangolo BAC. 111.

799. Potendo essere i due lati intorno all'angolo retto o

FIG. 111. 112. 113.

della stessa o diversa specie, di quale specie sarà l'ipotenusa in ciascun di questi casi? 1°. Se AC, AB son minori ciascuno di 90°, gli angoli ADB, ACB saranno acuti (798) e il supplemento BCD sarà ottuso; dunque nel triangolo BDC sarà $BD > BC$ (796); ma $BD = 90°$ (786); dunque l'ipotenusa $BC < 90°$: 2°. se AC, AB son maggiori ciascuno di 90°, condotto l'arco BD che tagli l'arco AC in modo che $AD = 90°$, sarà anche $BD = 90°$ (786): ma gli angoli C e ADB sono ottusi (798); dunque BDC è acuto, e però nel triangolo BCD si avrà $BD > BC$ (796); dunque $BC < 90°$: 3°. se AB è maggiore ed AC minor di 90°, cioè di AD, si avrà $DC = 90°$ (786) e gli angoli CDA, CBA saranno acuti (798); dunque CDB sarà ottuso, e perciò l'arco opposto BC sarà $>$ CD, cioè $> 90°$.

800. Onde *se i due lati d'un triangolo sferico rettangolo son della medesima specie, l'ipotenusa è minor di 90°; e se son di diversa, ipotenusa è maggior di 90°*. E poichè gli angoli obliqui son della medesima specie dei lati opposti, possono anche essi far conoscer di quale specie è l'ipotenusa. Similmente l'ipotenusa può far conoscere di quale specie siano i lati e gli angoli; per esempio, l'ipotenusa e un lato della specie medesima danno l'altro lato $< 90°$; e l'ipotenusa e un lato di diversa specie danno l'altro lato $> 90°$. Si osservi intanto che se un dei lati intorno all'angolo retto è 90°, anche l'ipotenusa è 90° (786), e il terzo lato può essere o $>$, o $<$, o $= 90°$, nel qual ultimo caso i tre angoli son retti.

Proporzioni per risolvere i Triangoli sferici.

114. 801. I. Sia il triangolo ABC rettangolo in A, e prolungati i lati BA, BC fino a 90° in H ed F, l'arco FH sarà la misura dell'angolo B (788), FG ne sarà il seno, FE o HE o BE sarà il raggio della sfera, CD il seno dell'ipotenusa BC, e CI il seno dell'arco perpendicolare CA. Ora conducendo la linea DI, si vedrà che i triangoli FGE, CID rettangoli in G, I (622. 617, 2°.) coi lati FG, CI ed FE, CD terminati sul piano stesso BAHE e paralleli, son simili; dunque r : *sen* BC : : *sen* B : *sen* AC. Così prolungati CA, CB fino a 90°, si troverebbe del pari r : *sen* BC : : *sen* C : *sen* AB; dunque generalmente *in ogni triangolo sferico rettangolo il raggio sta al seno dell'ipotenusa come il seno d'un angolo obliquo al seno del lato opposto*.

E siccome non è mai *sen* C o *sen* $B > r$, così nemmeno *sen* AB o *sen* AC sarà $>$ *sen* BC; onde *i lati d'un triangolo sferico rettangolo non potranno esser maggiori dell'ipotenusa se sian $< 90°$, nè minori di essa se abbiano più di 90°* (692).

115. C. 116. 802. Se il triangolo ABC è obliquangolo, si avranno, abbassando un arco perpendicolare CD, le due proporzioni r : *sen* AC : : *sen* A : *sen* DC ed r : *sen* BC : : *sen* B : *sen* CD; onde *sen* A : *sen* B : : *sen* BC : *sen* AC; e perciò *in un triangolo sferico qualunque i seni degli angoli son proporzionali ai seni dei lati opposti*.

FIG. 115. e 116.

Di quì si ha *sen* B + *sen* A : *sen* B ∽ *sen* A :: *sen* AC + *sen* CB : *sen* AC ∽ *sen* CB, ovvero (713) *tang* $\frac{1}{2}$(B+A) : *tang* $\frac{1}{2}$(B ∽ A) :: *tang* $\frac{1}{2}$(AC + CB) : *tang* $\frac{1}{2}$(AC ∽ CB), e perciò *tang* $\frac{1}{2}$(B+A) = *tang* $\frac{1}{2}$(B ∽ A) *tang* $\frac{1}{2}$(AC + CB) *cot* $\frac{1}{2}$(AC ∽ CB) (701).

117.

803. II. Sia ora il triangolo ABC rettangolo in A, i cui lati AC e BC sian prolungati sino a 90° in E e D; e si conduca l' arco DE. Poichè per ipotesi l' angolo A è retto e DA = 90°, sarà D il polo di AB (789) e perciò DB = 90° = BE; dunque B è il polo di DE (786); dunque l' angolo B = 90° − DE, D = 90° − BA (786 788) e il triangolo CED è rettangolo in E (789); perciò D è il complemento di BA, DE di B, EC di CB, DC di CA; e da ciò deriva il nome di *complementarj* ai triangoli così formati. Ora nel triangolo complementario CDE si ha *r* : *sen* CD :: *sen* D : *sen* CE (801) ovvero *r* : *cos* AC :: *cos* AB : *cos* BC; dunque *in ogni triangolo sferico rettangolo il raggio sta al coseno di uno dei lati dell' angolo retto, come il coseno dell' altro lato sta al coseno dell' ipotenusa*.

115. e 116.

804. E per conseguenza *se un triangolo sferico obliquangolo è diviso in due triangoli rettangoli con un arco normale alla base, si avranno sempre i coseni dei segmenti della base proporzionali ai coseni dei due lati adjacenti*; così nel triangolo ABC, descritto l' arco normale CD, si avrebbe *cos* AC : *cos* CB :: *cos* AD : *cos* DB : ora di quì si ricava *cos* AC + *cos* CB : *cos* CB ∽ *cos* AC :: *cos* AD + *cos* DB : *cos* DB ∽ *cos* AD, onde (713) *cot* $\frac{1}{2}$(AC + CB) : *tang* $\frac{1}{2}$(AC ∽ CB) :: *cot* $\frac{1}{2}$(AD + DB) : *tang* $\frac{1}{2}$(AD ∽ DB) ovvero (sostituendo le tangenti alle cotangenti (701), riducendo e ponendo AB in vece di AD+DB o di AD ∽ DB secondo che l' arco normale cade dentro o fuori del triangolo) *tang* $\frac{1}{2}$AB : *tang* $\frac{1}{2}$(AC + CB) : : *tang* $\frac{1}{2}$(AC ∽ CB) : *tang* $\frac{1}{2}$(AD $\underset{+}{\backsim}$ DB), proporzione di grand' uso che può enunciarsi generalmente così:

805. *In ogni triangolo sferico obliquangolo, sulla base del quale si abbassi un arco normale che cada* $\frac{\textit{dentro}}{\textit{fuori}}$ *del triangolo, la tangente della semibase sta alla tangente della semisomma dei due lati adjacenti, come la tangente della semidifferenza di questi lati sta alla tangente della* $\frac{\textit{semidifferenza}}{\textit{semisomma}}$ *dei segmenti della base*.

Fatto AD $\underset{+}{\backsim}$ DB = V, si avrà (anche senza cercare qual dei due segni abbia luogo) *tang* $\frac{1}{2}$V = *tang* $\frac{1}{2}$(AC + CB) *tang* $\frac{1}{2}$(AC ∽ CB) *cot* $\frac{1}{2}$AB, e sarà sempre $\frac{1}{2}$AB + $\frac{1}{2}$V il segmento maggiore, ed $\frac{1}{2}$AB − $\frac{1}{2}$V il minore (196).

Sostituito nell' equazione di sopra il valor di *tang* $\frac{1}{2}$(AC + CB) (802) si ha *tang* $\frac{1}{2}$(AD $\underset{+}{\backsim}$ DB) = *tang*^{2} $\frac{1}{2}$(AC ∽ CB) *tang* $\frac{1}{2}$(B + A) *cot* $\frac{1}{2}$AB *cot* $\frac{1}{2}$(B ∽ A)

117. 806. III. Tornando al triangolo complementario CDE, si ha $r : sen\,CD :: sen\,C : sen\,DE$: dunque $r : cos\,AC :: sen\,C : cos\,B$; cioè *in ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio sta al coseno di uno dei lati dell'angolo retto, come il seno dell'angolo obliquo adjacente, al coseno dell'altr'angolo obliquo.*

115. e 116. 807. E perciò, *se si abbassi un arco perpendicolare sulla base d'un triangolo obliquangolo, i seni degli angoli del vertice saran proporzionali ai coseni degli angoli della base*, cioè $sen\,ACD : sen\,BCD :: cos\,A : cos\,B$.

808. Di quì con un raziocinio simile a quel di sopra (804) si ha $cot\,\frac{1}{2}(A+B) : tang\,\frac{1}{2}(B \backsim A) :: tang\,\frac{1}{2}(ACD+DCB) : tang\,\frac{1}{2}(ACD \backsim DCB)$. Posto C in luogo di ACD + DCB o di ACD ∽ DCB secondo che l'arco cade dentro o fuori della base (avverrendo che B, A nel secondo caso son dissimili (798) e però dee sostituirsi 180° − A ad A, o 180° − B a B) sarà $tang\,\frac{1}{2}(ACD \overset{\backsim}{+} BCD) = tang\,\frac{1}{2}(A+B)\,tang\,\frac{1}{2}(B \backsim A)\,tang\,\frac{1}{2}C$, ove fatto $ACD \overset{\backsim}{+} BCD = W$, sarà sempre $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}W$ il segmento maggiore, ed $\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}W$ il minore, qualunque dei due segni abbia luogo. Preso di quì il valor di $tang\,\frac{1}{2}(B+A) = tang\,\frac{1}{2}(ACD \overset{\backsim}{+} BCD)\,cot\,\frac{1}{2}(B \backsim A)\,cot\,\frac{1}{2}C = (802)\ tang\,\frac{1}{2}(B \backsim A) \times tang\,\frac{1}{2}(AC+CB)\,cot\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)$, si avrà $tang^2\,\frac{1}{2}(B \backsim A) = tang\,\frac{1}{2}(ACD \overset{\backsim}{+} BCD)\,tang\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)\,cot\,\frac{1}{2}(AC+CB)\,cot\,\frac{1}{2}C$.

114. 809. IV. Sia ora il triangolo ABC rettangolo in A, e condotta la tangente BP che sarà parallela a DI (801), si avrà $BE\,(r) : DE\,(cos\,BC) :: BP\,(tang\,AB) : DI$, ed anche (801) $r : sen\,BC :: GE\,(cos\,B) : ID$; dunque $r : cos\,B :: tang\,BC : tang\,AB$, cioè *in ogni triangolo sferico rettangolo il raggio è al coseno di un angolo obliquo come la tangente dell'ipotenusa è a quella del lato adjacente all'angolo stesso.*

115. e 116. 810. Se il triangolo ABC è obliquangolo, potrà abbassarsi sulla sua base l'arco normale CD che darà $r : cos\,ACD :: tang\,AC : tang\,CD$ ed $r : cos\,BCD :: tang\,BC : tang\,CD$ onde $cos\,ACD : cos\,BCD :: tang\,BC : tang\,AC$, cioè *abbassando un arco normale sulla base d'un triangolo sferico obliquangolo, si hanno sempre i coseni degli angoli al vertice reciprocamente proporzionali alle tangenti dei lati adjacenti.*

Quì operando come sopra (801.804 ec.) si avrà $cos\,ACD + cos\,BCD : cos\,BCD \backsim cos\,ACD :: tang\,BC + tang\,AC : tang\,AC \backsim tang\,CB$: cioè (713) $cot\,\frac{1}{2}(ACD+BCD) : tang\,\frac{1}{2}(ACD \backsim BCD) :: sen\,(AC+CB) : sen\,(AC \backsim CB)$, ovvero posto come sopra (808) C in luogo di ACD + BCD o di ACD ∽ BCD, $cot\,\frac{1}{2}C : tang\,\frac{1}{2}(ACD \overset{\backsim}{+} BCD) :: sen\,(AC+CB) : sen\,(AC \backsim CB) :: 2sen\,\frac{1}{2}(AC+CB)\,cos\,\frac{1}{2}(AC+CB) : 2sen\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)\,cos\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)$ (705). Preso il valor di $tang\,\frac{1}{2}(ACD \overset{\backsim}{+} BCD)$ e sostituendolo in quello di $tang^2\,\frac{1}{2}(B \backsim A)$ (808), si otterrà $tang\,\frac{1}{2}(B \backsim A)$

FIG. 115. e 116.

$= cot\,\frac{1}{2}C \times \frac{sen\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)}{sen\,\frac{1}{2}(AC + CB)}$ che sostituito nel valor di $tang\,\frac{1}{2}(B + A)$ (802), darà $tang\,\frac{1}{2}(B + A) = cot\,\frac{1}{2}C \times \ldots\ldots$ $\frac{cos\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)}{cos\,\frac{1}{2}(AC + CB)}$, ove non potendo mai nè $cot\,\frac{1}{2}C$ nè $cos\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)$ esser negativi (789), le due quantità $tang\,\frac{1}{2}(B + A)$ e $cos\,\frac{1}{2}(AC + CB)$ avranno sempre lo stesso segno; e perciò *in un triangolo sferico la semisomma de' due lati è della stessa specie della semisomma degli angoli loro opposti.*

811. V. E poichè nel triangolo complementario CDE si ha $r : cos\,D :: tang\,CD : tang\,DE$, è chiaro che si ha pure $r : sen\,AB :: cot\,AC : cot\,B :: tang\,B : tang\,AC$; dunque *in ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio sta al seno di uno dei lati dell' angolo retto come la tangente dell' angolo obliquo adjacente sta alla tangente del lato opposto.*

FIG. 117.

Onde 1°. poichè non può mai essere $r < sen\,AB$, nemmeno sarà mai $tang\,B < tang\,AC$; e perciò *in un triangolo sferico rettangolo un angolo obliquo* $< 90°$ *non può esser minore del lato opposto; nè può esserne maggiore se è* $> 90°$ (692); 2°. se l'arco normale CA sia $< 90°$ sarà il più corto di quanti posson condursi da C ad AB, perchè essendo $B < A$ (798), anche $AC < CB$; e all' opposto se sia $> 90°$ sarà il più lungo, perchè $B > A$ dà $AC > CB$.

812. Lo stesso triangolo CDE per esser anch' egli rettangolo (803) dà $r : sen\,CE :: tang\,C : tang\,DE$; dunque $r : cos\,BC :: tang\,C : cot\,B$, e perciò *in ogni triangolo sferico rettangolo il raggio sta al coseno dell' ipotenusa come la tangente d' uno degli angoli obliqui alla cotangente dell' altr' angolo* ovvero *come la tangente di questo alla cotangente di quello* (701).

813. Nel triangolo obliquangolo ABC abbassato l' arco normale CD, si avrà 1°. $r : sen\,CD :: tang\,ACD : tang\,AD :: tang\,BCD : tang\,BD$; onde *in ogni triangolo sferico se si abbassi l' arco normale alla base, le tangenti degli angoli al vertice son proporzionali alle tangenti de' rispettivi segmenti.*

FIG. 115. e 116.

2°. Si avrà $r : sen\,AD :: tang\,A : tang\,CD$, ed $r : sen\,DB :: tang\,B : tang\,CD$ ovvero se l'arco normale cada fuori della base, $r : sen\,DB :: tang\,CBD\,(= -\,tang\,B\,(704.2°)) : tang\,CD$. Quindi $sen\,DB : sen\,AD :: tang\,A : \pm\,tang\,B$, ed operando come sopra (810), $tang\,\frac{1}{2}(AD + DB) : tang\,\frac{1}{2}(AD \backsim DB) :: sen\,(B \overset{+}{\backsim} A) : sen\,(B \overset{\backsim}{+} A)$, ove ponendo AB in luogo di $AD + DB$ e di $AD \backsim DB$, e presi nel primo caso i segni superiori e nell' altro gl' inferiori, sarà sempre $tang\,\frac{1}{2}(AD \overset{\backsim}{+} DB) = tang\,\frac{1}{2}(AB \times \frac{sen\,(B \backsim A)}{sen\,(B + A)} = tang\,\frac{1}{2}\,AB \times$ $\frac{sen\,\frac{1}{2}(B \backsim A)\,cos\,\frac{1}{2}(B \backsim A)}{sen\,\frac{1}{2}(B + A)\,cos\,\frac{1}{2}(B + A)}$ (705) $= tang^2\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB)\,tang\,\frac{1}{2}(B +$

FIG. 115. e 116. A) $cot\,\frac{1}{2}AB\,cot\,\frac{1}{2}(B \backsim A)$ (805); onde riducendo ed estraendo le radici, $tang\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB) = tang\,\frac{1}{2}AB \times \frac{sen\,\frac{1}{2}(B \backsim A)}{sen\,\frac{1}{2}(B + A)}$, valore che sostituito nell' equazione di sopra (802), darà $tang\,\frac{1}{2}(AC + CB) = tang\,\frac{1}{2}AB \times \frac{cos\,\frac{1}{2}(B \backsim A)}{cos\,\frac{1}{2}(B + A)}$.

3°. $cos\,BD = cos\,(AB \backsim AD) = cos\,AB\,cos\,AD + sen\,AB\,sen\,AD$ (703) $= \frac{cos\,BC\,cos\,AD}{cos\,AC}$ (804): onde $cos\,BC = cos\,AB\,cos\,AC + sen AB\,cos\,AC\,tang AD = cos AB cos AC + sen\,AB\,sen\,AC\,cos\,A$ (809), e però $cos\,A = \frac{cos\,CB - cos\,AB\,cos\,AC}{sen\,AB\,sen\,AC}$; onde $\frac{1 - cos\,A}{2} = \ldots$ $sen^2\frac{1}{2}A$ (705) $= \frac{sen\,AB\,sen\,AC + cos\,AB\,cos\,AC - cos\,BC}{2 sen\,AB\,sen\,AC} = \frac{cos\,(AB \backsim AC) - cos\,BC}{2\,sen\,AB\,sen\,AC}$ (703) $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{sen\,\frac{1}{2}(CB + (AB \backsim AC))\,sen\,\frac{1}{2}(CB - (AB \backsim AC))}{sen\,AB\,sen\,AC}$ (709) $= \frac{sen\,\frac{1}{2}(AC + CB - AB)\,sen\,\frac{1}{2}(AB + CB - AC)}{sen\,AB\,sen\,AC}$, cioè se sia p il perimetro del triangolo, $sen\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{sen(\frac{1}{2}p - AB)\,sen(\frac{1}{2}p - AC)}{sen\,AB\,sen\,AC}\right)}$; e perciò *in ogni triangolo sferico il prodotto dei seni dei lati AC, AB che comprendon l'angolo A, sta al prodotto dei seni della differenza tra i due lati medesimi e il semiperimetro, come il quadrato del raggio al quadrato del seno della metà dell' angolo cercato*. Prendendosi nel modo stesso il valor di $\frac{1 + cos\,A}{2} = cos^2\frac{1}{2}A$, si ricaverebbe $cos\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{sen\,\frac{1}{2}p \times sen\,(\frac{1}{2}p - CB)}{sen\,AB\,sen\,AC}\right)}$.

Si osservi intanto che dalla formula superiore $cos\,A = \frac{cos\,CB - cos\,AB\,cos\,AC}{sen\,AB\,sen\,AC}$ si rileva che $cos\,A$ e $cos\,CB$ han lo stesso segno (cioè A e CB son della stessa specie) ogni volta che $cos\,CB > cos\,AB\,cos\,AC$, cioè quando AC o AB hanno un valor intermedio tra CB e il suo supplemento (704 4°), onde *in ogni triangolo sferico un angolo è della stessa specie del lato opposto, quando uno dei due lati adjacenti ha un valor intermedio tra quello del lato opposto predetto e del suo supplemento*. Non ha però luogo la proposizione inversa.

108. 814. Se facciasi il triangolo supplementario (792), i seni dei lati di ACB eguaglieranno i seni degli angoli corrispondenti di EFD (690), e i seni dei semiangoli e dei semilati di

ACB eguaglieranno reciprocamente i coseni dei semilati e dei semiangoli corrispondenti di EFD (485.687); perciò la prima equazione di sopra diverrà $cos^2\frac{1}{2}EF = \dots\dots\dots$ $\frac{cos\frac{1}{2}(E+D-F)\,cos\frac{1}{2}(F+D-E)}{sen\,F\,sen\,E}$ ovvero (chiamando s la somma dei tre angoli) $cos\frac{1}{2}EF = \sqrt{\left(\frac{cos(\frac{1}{2}s \backsim F)\,cos(\frac{1}{2}s \backsim E)}{sen\,F\,sen\,E}\right)}$ cioè *in ogni triangolo sferico il prodotto dei due seni di due angoli posti sopra uno stesso lato sta al prodotto dei coseni della lor differenza dalla semisomma di tutti e tre gli angoli, come il quadrato del raggio al quadrato del coseno della metà del lato medesimo.* Che se nel triangolo obliquangolo ACB si conduca l'arco normale CD, si avrà (807) $cos\,A : cos\,B :: sen\,ACD : sen\,BCD :: sen\,ACD : sen\,(C \backsim ACD) :: sen\,ACD : sen\,C\,cos\,ACD \backsim cos\,C \times sen\,ACD :: 1 : sen\,C\,cot\,ACD \backsim cos\,C$, ovvero (poichè $cot\,ACD = tang\,A\,cos\,AC$ (812)) $:: 1 : sen\,C\,cos\,AC\,tang\,A \backsim cos\,C$, e quindi (riflettendo che quando $sen\,BCD = sen\,(ACD - C)$, $cos\,B$ diviene $cos\,(180^\circ - B) = -cos\,B$ (704. 2°.)) si ha $cos\,AC = \frac{cos\,B + cos\,A\,cos\,C}{sen\,A\,sen\,C}$; ove osservo che $cos\,AC$ e $cot\,B$ han lo stesso segno sempre che sia $cos\,B > cos\,A\,cos\,C$ cioè quando A o C hanno un valore intermedio tra quello di B e del suo supplemento (704. 4°) e che perciò *in ogni triangolo sferico un lato è della stessa specie dell'angolo opposto quando uno degli angoli adjacenti ha un valore intermedio tra quello del detto angolo opposto e del suo supplemento.* Quì neppure ha luogo la regola inversa.

FIG. 108.

FIG. 115. e 116.

Operando come sopra (813) e prendendo il valore di $\frac{1 - cos\,AC}{2} = sen^2\frac{1}{2}AC$ (705) si otterrà $sen\,\frac{1}{2}AC = \dots$ $\sqrt{\left(\frac{-cos\,\frac{1}{2}s \times cos(\frac{1}{2}s \backsim B)}{sen\,A\,sen\,C}\right)}$, ove il radicale divien sempre positivo, perchè $\frac{1}{2}s > 90^\circ$(691.793.2°.) e $\frac{1}{2}s \backsim B < 90^\circ$ (793. 4°.).

Applicazione delle Proporzioni precedenti.

815. Colle proposizioni dimostrate ogni triangolo sferico può risolversi, purchè si conoscano tre delle sue parti. Sia il triangolo rettangolo ABC; e chiamato r il seno dell'angolo retto A opposto all'ipotenusa BC$=h$, siano il lato AB$=g$, l'angolo adjacente B$=a$, il lato AC$=g'$, l'angolo adjacente C$=a'$. Si avrà I.(801) $r : sen\,h :: sen\,a : sen\,g' :: sen\,a' : sen\,g$; II.(811) $r : sen\,g :: tang\,a : tang\,g'$, ovvero $r : sen\,g' :: tang\,a' : tang\,g$. Da queste due analogìe applicate al triangolo ABC o immediatamente o per mezzo di uno dei due triangoli complementarj CDE, GFB si son dedotte le 30 formule della seguente Tavola, colle quali se sian date oltre l'angolo retto due delle cinque cose h, g, g', a, a', potranno aversi anche l'altre.

FIG. 119.

TAVOLA per la Risoluz. dei Triangoli sferici rettang.

Il segno * indica gli archi della stessa specie; il segno ** i casi dubbj; negli altri casi la specie degli archi è determinata dalla regola dei segni (690).

	Dati	Trovare	FORMULE
816	h, a	g'	$sen\ g'^{*} = sen\ h . sen\ a^{*} : r$
817		g	$tang\ g = tang\ h . cos\ a : r$
818		a'	$cot\ a' = cos\ h . tang\ a : r$
819	h, a'	g	$sen\ g^{*} = sen\ h . sen\ a'^{*} : r$
820		g'	$tang\ g' = tang\ h . cos\ a' : r$
821		a	$cot\ a = cos\ h . tang\ a' : r$
822	g', a'	g	$tang\ g = sen\ g' . tang\ a' : r$
823		h	$cot\ h = cot\ g' . cos\ a' : r$
824		a	$cos\ a = cos\ g' . sen\ a' : r$
825	g', a	g	$sen\ g = r . tang\ g' : tang\ a^{**}$
826		h	$sen\ h = r . sen\ g' : sen\ a^{**}$
827		a'	$sen\ a' = r . cos\ a : cos\ g'^{**}$
828	g', h	g	$cos\ g = r . cos\ h : cos\ g'$
829		a	$sen\ a^{*} = r . sen\ g'^{*} : sen\ h$
830		a'	$cos\ a' = r . tang\ g' : tang\ h$
831	g, a'	g'	$sen\ g' = r . tang\ g : tang\ a'^{**}$
832		h	$sen\ h = r . sen\ g : sen\ a'^{**}$
833		a	$sen\ a = r . cos\ a' : cos\ g^{**}$
834	g, a	g'	$tang\ g' = tang\ a . sen\ g : r$
835		h	$cot\ h = cos\ a . cot\ g : r$
836		a'	$cos\ a' = sen\ a . cos\ g : r$
837	g, g'	h	$cos\ h = cos\ g . cos\ g' : r$
838		a	$cot\ a = cot\ g' . sen\ g : r$
839		a'	$cot\ a' = cot\ g . sen\ g' : r$
840	g, h	g'	$cos\ g' = r . cos\ h : cos\ g$
841		a	$cos\ a = cot\ h . tang\ g : r$
842		a'	$sen\ a'^{*} = r . sen\ g^{*} : sen\ h$
843	a, a'	g	$cos\ g = r . cos\ a' : sen\ a$
844		g'	$cos\ g' = r . cos\ a : sen\ a'$
845		h	$cos\ h = cot\ a . cot\ a' : r$

119. 846. APPLICAZIONI I. Sia nel triangolo ABC rettangolo in A, $BC = h = 81° 13'$, $B = a = 37° 19'$ e si cerchi $AC = g'$. Dunque (816) $l\ sen\ 81° 13' + l\ sen\ 37° 19' - lr = 9{,}9948769 + 9{,}7826301 - 0$ (fatto al solito $r = 1$) $= 9{,}7775070 = l\ sen\ g' = l\ sen\ 36° 48' 22'', 4 = l\ sen\ 143° 11' 37'', 6$ (690). Ma poichè g' ed

a debbon esser della medesima specie (798) come indica il segno *, perciò AC $= g' = 36° 48' 22''$, 4. FIG. 119.

II. Sia ora BC $= h = 127° 25' 20''$, AB $= g = 13° 17' 25''$ e si cerchi AC$=g'$. Dunque (840) $\cos g' = \frac{r \cos h}{\cos g} = \frac{- r \operatorname{sen} 37° 25' 20''}{\cos 13° 17' 25''}$ (704. 2°.) e perciò $\cos g'$ sarà negativo e l'arco g' sarà ottuso (691). Ora $l r + l \operatorname{sen} 37° 25' 20'' - l \cos 13° 17' 25'' = 9,7954676 = l - \cos g' = l - \cos 51° 21' 41'' = l \cos 128° 38' 19''$ (704. 3°) e quindi $g' = 128° 38' 19''$. E quì si noti di passaggio che i logaritmi di $-\cos$, $-\operatorname{sen}$ ec. non debbon confondersi coi logaritmi dei numeri negativi de' quali abbiamo parlato altrove (733) e se ne vede il perchè (704. 3°.)

III. Vogliasi l' angolo C $= a'$ per mezzo di BC $= h$ ed AC $= g'$. Avremo (830) $\cos a' = \frac{\operatorname{tang} g'}{\operatorname{tang} h} = \frac{-\cot 38° 38' 19''}{-\cot 37° 25' 20''}$ e perciò $\cos a'$ sarà positivo, ed $a' < 90°$ (692) $= 16° 49' 31''$; onde in questi casi la sola attenzione ai segni basta per saper la specie degli archi.

847. Supposti ora cogniti solamente AB $= g$ e C $= a'$, è chiaro che non potrà conoscersi di quale specie sia h, perchè $\operatorname{sen} h$ ($= \operatorname{sen} g : \operatorname{sen} a'$ (832)) appartiene così a un' ipotenusa $< 90°$, come al suo supplemento, e bisognerebbe sapere di quale specie sono i due angoli obliqui (800). Così i triangoli ABC, ABD, che oltre il lato comune BA, hanno l'angolo C $=$ D, non perciò hanno l'ipotenusa CB $=$ BD o il lato CA $=$ AD ec. Quindi il caso è dubbioso, e così lo sono altri cinque (825. ec.) notati col segno ** Per altro è raro che nell'uso pratico delle formule non si abbia in vista la specie del risultato, e le soluzioni non restino in qualche modo determinate. Sarà dubbioso inoltre il caso in cui a o a' sia $= 90°$, nè altro potrà sapersi circa l'altr' angolo e il lato che gli è opposto, se non che son questi fra loro eguali: così se B $=$ A $= 90°$, sarà AC $=$ CB $= 90°$, e C $=$ AB (788) indeterminato. 107.

848. Se poi i seni o coseni di queste formule fossero molto grandi, allora o si cercherà il valor preciso degli angoli o lati indirettamente, come si accennò nella Trigonometria rettilinea, o si trasformeranno le formule. Eccone gli esempj:

I. Dati h ed a vogliasi g' (816) e sia $\operatorname{sen} g'$ molto grande, cioè g' vicinissimo a 90°. Si cerchi prima g (817) e poi per mezzo di g ed a si avrà g' (834) dato da una tangente (761).

II. Dati h ed a' chieggo g (819). Cerco g' (820) ed ho poi g per mezzo di g' ed a' (822).

III. Dati g', a' si cerchi a (824) angolo piccolissimo. Trovo g (822) e poi g e g' mi danno a (838).

IV. ** Dati g' ed a si voglia g (825). Sciolgo la formula nella proporzione onde nacque, cioè $r : \operatorname{sen} g :: \operatorname{tang} a : \operatorname{tang} g'$ ed ho (preso $r = 1$) $1 + \operatorname{sen} g : 1 - \operatorname{sen} g :: \operatorname{tang} a + \operatorname{tang} g' : \operatorname{tang} a -$

$tang\,g'$ ovvero $\frac{1 + sen\,g}{1 - sen\,g} = \frac{tang\,a + tang\,g'}{tang\,a - tang\,g'}$ cioè (714. 713) $tang(45° + \frac{1}{2}g) = \pm\sqrt{\left(\frac{sen\,(a + g')}{sen\,(a - g)}\right)}$. Nel modo stesso si trattano tutte l'altre formule appresso, che danno i risultati seguenti:

V. ** Dati g' ed a si cerchi h (826). Si avrà $tang(45° + \frac{1}{2}h) = \pm\sqrt{[tang\frac{1}{2}(a + g')\,cot\frac{1}{2}(a - g')]}$

VI. ** Dati g' ed a si voglia a' (827). Sarà $tang\frac{1}{2}(45° + \frac{1}{2}a') = \pm\sqrt{[cot\frac{1}{2}(a + g')\,cot\frac{1}{2}(a - g')]}$

VII. Dati h e g' domando g (828). Trovo $tang\frac{1}{2}g = \sqrt{[tang\frac{1}{2}(h + g')\,tang\frac{1}{2}(h - g')]}$ ove il doppio segno è inutile perchè sempre $\frac{1}{2}g < 90°$ (787).

VIII. Dati h e g' si chiede a (829). Avremo $tang(45° + \frac{1}{2}a) = \pm\sqrt{[tang\frac{1}{2}(h + g')\,cot\frac{1}{2}(h - g')]}$ ove il doppio segno è determinato dalla proprietà de' triangoli sferici rettangoli (798).

IX. Dati h e g' si vuole a' (830). Troveremo $tang\frac{1}{2}a' = \sqrt{\left(\frac{sen(h - g')}{sen(h + g')}\right)}$.

X. ** Dati a' e g trovar g' (831). Verrà $tang(45° \pm \frac{1}{2}g') = \pm\sqrt{\left(\frac{sen(a' + g)}{sen(a' - g)}\right)}$.

XI. ** Dati a' e g trovare h (832). Avremo $tang(45° + \frac{1}{2}h) = \pm\sqrt{[tang\frac{1}{2}(a' + g)\,cot\frac{1}{2}(a' - g)]}$.

XII. ** Dati a' e g trovare a (833). Sarà $tang(45° + \frac{1}{2}a) = \pm\sqrt{[cot\frac{1}{2}(a' + g)\,cot\frac{1}{2}(a' - g)]}$

XIII. Dati a e g voglio a' (836). Cerco h (835) e quindi per a ed h troverò a' (818).

XIV. Dati g e g' cerco h (837). Trovo prima a (838) e per g ed a trovo h (835).

XV. Dati g ed h cerco g' (840). Avrò $tang\frac{1}{2}g' = \sqrt{[tang\frac{1}{2}(h + g)\,tang\frac{1}{2}(h - g)]}$.

XVI. Dati g ed h trovare a (841). Troveremo $tang\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{sen(h - g)}{sen(h + g)}\right)}$.

XVII. Dati g ed h trovare a' (842). Si avrà $tang(45° + \frac{1}{2}a') = \pm\sqrt{[tang\frac{1}{2}(h + g)\,cot\frac{1}{2}(h - g)]}$ e il doppio segno si determina come sopra (VIII.).

XVIII. Dati a, a' cerco g (843). Determinato h come appresso (XX), per a ed h si avrà g (817).

XIX. Dati a, a' cerco g' (844). Cercato h come appresso (XX), per a' ed h si avrà g' (820).

XX. Dati a, a' cerchisi finalmente h (845). Poichè $cos\,h = cot\,a\,cot\,a' = \frac{cot\,a'}{tang\,a}$, avremo $1 : cos\,h :: tang\,a : cot\,a'$ e quindi

$\frac{1 - \cos h}{1 + \cos h} = \frac{tang\, a - \cot a'}{tang\, a + \cot a'} = -\left(\frac{\cot a' - tang\, a}{\cot a' + tang\, a}\right)$ cioè (714.718)
$tang \frac{1}{2} h = \sqrt{\left[-\frac{\cos(a' + a)}{\cos(a' \backsim a)}\right]}$ ove il radicale non è mai immaginario perchè $\cos(a + a')$ è sempre negativo di sua natura, per esser sempre $a' + a > 90°$. (691 . 793 . 3°).

Risoluzione de' Triangoli sferici obliquangoli.

I problemi sulla risoluzione d' un triangolo obliquangolo si riducono a dodici i quali abbracciano tutti i casi.

849. E' necessario molte volte di dividere il dato triangolo sferico in due triangoli rettangoli con un arco normale, di cui sembra importantissimo il sapere se cada o no dentro la base (798), ciò che spesso è molesto a ricercarsi. Ma se riflettasi che la differente situazione dell' arco normale è un puro effetto della differente natura degli angoli sulla base, e che questa dee palesarsi nei segni delle quantità che dipendono dai loro seni, coseni ec., s' intenderà facilmente che le regole già prescritte riguardo ai segni (692.704) rendono inutile tal ricerca, come si vedrà dagli esempj. Basta pertanto trattar le formule come se l' arco normale cadesse sempre dentro la base, e ciascun angolo e ciascun lato fosse $< 90°$, con tener solamente un esatto conto dei segni proprj delle funzioni di essi (692). Per generalizzar le formule chiameremo s, s' i *segmenti* o della base o dell' angolo al vertice, cioè AD, BD o ACD, DCB, e riterremo nel resto le denominazioni già date (762). Il segno ** indicherà al solito i casi dubbj. 115. e 116.

PROBLEMI

850. I**. *Dati due angoli* A, B *e il lato* BC *opposto ad* A, *trovare il lato* AC *opposto a* B. Si ha (802) $sen\, AC = \frac{sen\, B\; sen\, BC}{sen\, A}$ 120.

ovvero generalmente $sen\, l.c. = \frac{sen\, a.op \times sen\, l}{sen\, a.adj.l.c.}$. Sia A $= a.adj.l.c.$ $= 61° 25'$, B $= a.op. = 82° 36'$, BC $= l = 59° 40'$, sarà AC $=$ $77° 5' 12''$ ovvero $= 102° 54' 48''$ (690) senza che si possa sceglier tra i due risultati, se d' altra parte non si conosca la specie del lato cercato AC, o non la fissi uno de' due Teoremi già dimostrati cioè 1°. (810) *la semisomma dei lati* AC, BC *e quella degli angoli opposti* B, A *son della medesima specie*; 2°. (814) *un lato è della specie dell' angolo opposto allorchè uno dei due angoli adjacenti ha un valore intermedio tra quello dell' angolo opposto e del suo supplemento*. Così per esempio se il valor dell' angolo A adjacente ad AC fosse tra 82° 36' ($=$ B) e 97° 24' ($= 180° -$ B), sarebbe AC $< 90°$ come B; ma poichè la regola inversa non ha luogo, il caso resta nella sua incertezza. Le

FIG. 120.

stesso è per il primo teorema, perchè $\frac{1}{2}(AC + CB)$ è sempre $< 90°$ come $\frac{1}{2}(A + B)$, qualunque si prenda de' due valori di AC.

Se fosse $A = 79° 35' 13''$, $B = 77° 0' 26''$, $BC = 53° 17' 7''$, perchè il valor di A è medio tra quello di B e del suo supplemento, sarebbe AC della stessa specie di B (per il secondo teorema) cioè $< 90°$ e perciò $= 52° 34' 40''$. Anche il primo teorema determinerebbe in questo caso il valor di AC.

Data in vece del lato BC la somma o la differenza dei lati BC, AC, si hanno i due lati a un tempo coll' analogia (802) $tang\,\frac{1}{2}(AC + CB) : tang\,\frac{1}{2}(AC \backsim CB) :: tang\,\frac{1}{2}(B + A) : tang\,\frac{1}{2}(B \backsim A)$ (196).

115. e 116.

851. II**. *Dati come sopra due angoli* A, B *e il lato* BC *opposto ad* A, *trovare il lato* AB *compreso tra i due angoli dati*. Condotto l' arco normale CD, si ha 1°. (809) $tang\,BD = tang\,BC \times cos\,B$; 2°. (813. 2°.) $sen\,AD = sen\,BD \times \frac{tang\,B}{tang\,A}$; 3°. (849) $AD + DB = AB$; ovvero generalmente $tang\,s = tang\,l\ cos\,a.adj.$; $sen\,s' = sen\,s \times \frac{tang\,a.adj.l}{tang\,a.op.l}$; $s + s' = l.c.$ Il *lato cercato* è la *somma* dei due segmenti per quello che si è già detto (849); e se questa somma è $> 180°$, si dovrà prendere la sua differenza da 360°. Sia $A = 42° 15' 13'',3$, $B = 121° 36' 20''$, $BC = 50° 10' 30''$. Avremo

116.

$l\,tang\,50° 10' 30''$ . . . . $= 10,0788818$
$+ l\,cos\,121° 36' 20'' = l - sen\,31° 36'' 20''$ (704.2°.) $= 9,7193880$

$= l\,tang\,BD$ . . . . $= 9,7982698$
$= l - tang\,32° 8' 50'' = l\,tang\,147° 51' 10''$ (704.3°); onde $s = 147° 51' 10''$, e si noti ora una volta per tutte, che $tang\,32° 8' 50''$ data dal calcolo è negativa, perchè è il prodotto di $tang\,50° 10' 30''$ in $- sen\,31°$ ec.

$col\,tang\,42° 15' 3'',3$ . . . . $= 0,0416971$
$+ l\,tang\,121° 36' 20'' = l - cot\,31° 36' 20''$. $= 10,2108864$
$+ l\,sen\,147° 51' 10'' = l\,cos\,57° 51' 10''$ . . $= 9,7259905$

$= l\,sen\,AD$ . . . . $= 9,9785740$
$= l - sen\,72° 9' = l\,sen\,252° 9'$, ovvero $= l - sen\,107° 51'$ (690) $= l\,sen\,287° 51'$; e quindi $AD = s' = 259° 9'$ oppure $= 287° 51'$; d' onde si ha $AB = s + s' - 360° = 40° 0' 10''$, ovvero $= 75° 42' 10''$.

118.

852. Osservazioni. I^a. Cercando il segmento BD per mezzo dell' angolo acuto $CBD = 58° 23' 40''$ ($= 180° - B$) e dell' ipotenusa BC (817) avremmo $tang\,BD$ positiva e $BD = 32° 8' 50''$ supplemento dell' arco trovato sopra. Ma si avverta ora per sempre che l' arco normale allorchè non cade dentro la base, tanto è CD quanto CD', e che l' angolo ottuso B guida quì necessariamente al secondo, e dà per segmento BD' che è dalla parte stessa dell' angolo, e non BD che è nell' opposta. II^a. L' al-

FIG. 118.

tro segmento dovendosi prendere dalla stessa parte dell'angolo acuto A e terminare al medesimo punto dell'arco normale CD', sarà l'arco AB=B'D' = AD + 180°: onde evidentemente il lato cercato AB è = BD' + ABDB'D' − 360°. Tutto ciò non ha luogo se l'arco normale cade dentro la base. III°. Può accader talvolta che i due segmenti dati dalle formule siano BD, AD'D; la base AB sa à sempre la differenza della lor somma S da 360° come è evidente; onde in generale se S > 180°, sarà sempre AB = S ∽ 360°. IV°. Ciò che dicesi dei segmenti della base dee dirsi anche di quelli dell'angolo verticale C; onde è evidente che la sola attenzione ai segni risparmia ogni ricerca sulla situazion de' segmenti o dell'arco normale, come avvertimmo (849). V° Di qui anche si vede, che non basta sempre ne' casi dubbj saper la specie del risultato per determinarlo. In fatti nel caso nostro ciascun de' due valori di AB è < 90°. Non così quando il dubbio dipende solo dal seno di ciò che si cerca (690). Si avverta intanto che per l'esattezza dei risultati debbon valutarsi nel calcolo anche i decimi di 1″, la cui omissione cagiona spesso errori non disprezzabili.

853. III**. *Dati come prima due angoli* A, B *col lato* BC *opposto a uno di essi* A, *trovar l'angolo* C. Condotto al solito l'arco normale CD, si avrà 1°. (812) $cot\,BCD = cos\,BC\;tang\,B$; 2°. (807) $sen\,ACD = \frac{sen\,BCD\;cos\,A}{cos\,B}$; 3°. (849) ACD + BCD = C, ovvero generalmente

115. e 116.

$$cot\,s = cos\,l \times tang\,a.adj.;\; sen\,s' = sen\,s \times \frac{cos\,a.op.\,l}{cos\,a.adj.\,l};\; s + s' = a.c.$$

116.

Sia come sopra A = 42° 15′ 13″, 3, B = 121° 36′ 20″, BC = 50° 10′ 30″. Avremo

$l\,cos$ 50° 10′ 30″ . . . . = 9.8064817
$+ l\,tang$ 121° 36′ 20″ = $l - cot$ 31° 36′ 20″ . . = 10,2.08864

= $l\,cot$ BCD . . . . = 10,0173681
= $l - cot$ 43° 51′ 16″, 7 = $l\,cot$ 136° 8′ 43″, 3 (704.3°) onde BCD = s = 136° 8′ 43″, 3.

$l\,sen$ 136° 8′ 43″, 3 = $l\,cos$ 46° 8′ 43″, 3 . . = 9,8406273
$+ l\,cos$ 42° 15′ 3″, 3 . . . . = 9,8693343
$+ col\,cos$ 121° 36′ 20″ = $col - sen$ 31° 36′ 20″ . = 0,2800120

= $l\,sen$ ACD . . . . = 9.9905736
= $l - sen$ 78° 6′ 20″ = $l\,sen$ 258° 6′ 20″ (704. 3°), ovvero = $l - sen$ 101° 53′ 40″ (690) = $l\,sen$ 281° 53′ 40″; onde ACD = 258° 6′ 20″ oppure = 281° 53′ 40″.

Finalmente C = $s + s'$ − 360° = 34° 15′ 3″, 3, ovvero = 58° 2′ 23″, 3 (852).

854. IV. *Dati due angoli* A, C *col lato compreso* AC, *trovare il terzo angolo* B. Condotto l'arco normale, si ha 1°. (812)

115. e 116.

FIG. 115. e 116.

$\cot ACD = \tan A \times \cos AC$; 2° (849) $C - ACD = BCD$; 3° (807) $\cos B = \cos A \times \frac{\text{sen}\, BCD}{\text{sen}\, ACD}$ ovvero generalmente (chiamando a piacere a, a' gli angoli dati)

$$\cot s = \tan a \cos l\,;\ a' - s = s'\,;\ \cos a.c. = \cos a \times \frac{\text{sen}\, s'}{\text{sen}\, s}.$$

Esempio. Sia $A = a = 42° 15' 13'',3$, $C = a' = 34° 15' 3''$, $AC = l = 76° 35' 36''$. (115.)

$l \tan a = 9,9583029$
$+ l \cos l = 9,3652279$

$= l \cot s = 9,3235308 = l \cot 78° 6' 19'',3$ ed $s = 78° 6' 19'',3$, onde $C - ACD = a' - s = - 43° 51' 16'',3 = BCD = s'$.

$\text{col sen}\, s$ . . . . $= 0,0094266$
$+ l \,\text{sen}\, s' = l - \text{sen}\, 43' 51' 16'',3$ . . . . . . $= 9,8406265$
$+ l \cos a$ . . . . $= 9,8693343$

$= l \cos a.c.$ . . . . $= 9,7193874$
$= l - \cos 58° 23' 40'' = l \cos 121° 36' 20''$ (704.3°) onde $B = a.c. = 121° 36' 20''$.

Sostituito nella 3ª. equazione di sopra il valore di $BCD = C - ACD$ e risolvendo $\text{sen}\,(C - ACD)$ (704.III.) si avrà $\cos B = \cos A\, \text{sen}\, C \cot ACD - \cos A \cos C =$ (eliminando $\cot ACD$ per mezzo della prima equazione) $\text{sen}\, A\, \text{sen}\, C \cos AC - \cos A \cos C$, e generalizzando, avremo $\cos a.c. = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, a' \cos l - \cos a \cos a'$. (115. c 116.)

Applichiamo questa formula alla ricerca dello stesso angolo B per darne un esempio coi medesimi dati; (115.)

$l\, \text{sen}\, a = 9,8276371$
$+ l\, \text{sen}\, a' = 9,7503681$
$+ l \cos l = 9,3652279$

$= 8,9432331 = l\, 0,0877472$
$l \cos a = 9,8693343$
$+ l \cos a' = 9,9172853$

$= 9,7866196 = l\, 0,6118144$ onde $\cos l.c. = 0,0877472 - 0,6118144$ . . . . . . $= -0,5240672$
ma $l - 0,5240672$ (846.II.) $= 9,7193870 = l - \cos 58° 23' 40'' = l \cos 121° 36' 20''$ (704.3°); dunque $B = a.c = 121° 36' 20''$ come già si sapeva.

Se $\cos B$ è troppo grande (761) sostituisco $1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} AC$ a $\cos AC$ (705) ed ho $\cos B = \text{sen}\, A\, \text{sen}\, C - \cos A \cos C - 2\,\text{sen}\, A\, \text{sen}\, C\, \text{sen}^2 \frac{1}{2} AC =$ (703 II.) $- \cos\,(A + C) - 2\,\text{sen}\, A \times \text{sen}\, C\, \text{sen}^2 \frac{1}{2} AC$. Perciò $1 - \cos B = 1 + \cos\,(A + C) + 2\,\text{sen}\, A \times \text{sen}\, C\, \text{sen}^2 \frac{1}{2} AC$, cioè (712) $2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} B = 2 \cos^2 \frac{1}{2}(A + C) + 2\,\text{sen}\, A \times \text{sen}\, C\, \text{sen}^2 \frac{1}{2} AC$ e $\text{sen} \frac{1}{2} B = \cos \frac{1}{2}(A + C) \sqrt{\left(1 + \text{sen}\, A\, \text{sen}\, C \times \frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2} AC}{\cos^2 \frac{1}{2}(A + C)}\right)}$ ovvero generalmente $\text{sen} \frac{1}{2} a.c. =$ . . . . . (115. e 116.)

$cos\,\frac{1}{2}(a+a')\surd(1+sen\,a\,sen\,a'\times\frac{sen^2\frac{1}{2}l}{cos^2\frac{1}{2}(a+a')})$. Facciamo ora $\frac{sen\frac{1}{2}l}{cos\frac{1}{2}(a+a')}\surd\,sen\,a\,sen\,a'=tang\,u$ ed avremo $sen\,\frac{1}{2}a.c.$ . . . $=cos\,\frac{1}{2}(a+a')\surd(1+tang^2 u)=\frac{cos\frac{1}{2}(a+a')}{cos\,u}$ (697.700).

855. V. *Dati come sopra due angoli* A, C *col lato compreso* AC, *trovar uno degli altri due lati* come BC. Operando al solito si avrà 1°. (812) $cot\,ACD=tang\,A\times cos\,AC$; 2°. (849) $C-ACD=BCD$; 3°. (810) $tang\,BC=tang\,AC\times\frac{cos\,ACD}{cos\,BCD}$ ovvero generalmente (chiamato a l'angolo A opposto al lato cercato, ed a' l'altr'angolo dato) 115. e 116.

$$cot\,s=tang\,a\,cos\,l;\ a'-s=s';\ tang\,l.c.=tang\,l\times\frac{cos\,s}{cos\,s'}.$$

E siccome $cos\,BCD=cos\,C\,cos\,ACD+sen\,C\,sen\,ACD$ (704), sostituendo nella terza equazione questo valore e quello di $cot\,ACD$ preso dalla prima, si avrebbe, riducendo e generalizzando, $tang\,l.c.=\frac{sen\,l}{cos\,a'\,cos\,l+sen\,a'\,cot\,a}$.

Possono aversi anche ad un tempo i due lati ignoti che chiameremo l' ed l'' (opposti ad a ed a') colle note formule (813.2°.) $tang\,\frac{1}{2}(l'+l'')=tang\,\frac{1}{2}l\times\frac{cos\frac{1}{2}(a\backsim a')}{cos\frac{1}{2}(a+a')}$ e $tang\,\frac{1}{2}(l'\backsim l'')=tang\,\frac{1}{2}l\times\frac{sen\frac{1}{2}(a\backsim a')}{sen\frac{1}{2}(a+a')}$.

856. VI**. *Dati due lati* AC, BC *e un angolo* A *opposto ad uno di essi* BC, *trovar l'altr'angolo* B *opposto all'altro lato* AC. Si ha (802) $sen\,B=\frac{sen\,A\,sen\,AC}{sen\,BC}$ cioè $sen\,a.c.=$ . . . . $\frac{sen\,l\,op.\times sen\,a.adj.}{sen\,l.\,op.\,a}$. Questo caso dubbio (690) può qualche volta determinarsi o col principio già dimostrato che *le semisomme dei lati e degli angoli opposti son della medesima specie* (810), o col teorema (814) che *un angolo è della stessa specie del lato opposto quando un de' lati adjacenti abbia un valore intermedio tra quello del lato opposto all' angolo cercato e il suo supplemento* (849). 120.

857. VII**. *Dati come sopra due lati* AC, BC *e un angolo* A *opposto ad uno di essi* BC, *trovare il terzo lato* AB.
Condotto l'arco normale, si ha 1°. (809) $tang\,AD=tang\,AC\,cos\,A$; 115. e 116.

FIG. 115. 2°. (804) $\cos BD = \cos AD \times \frac{\cos BC}{\cos AC}$: 3°. (849) $AD + BD = AB$

e e generalmente

116. $$\tang s = \cos a \tang l.adj.; \cos s' = \cos s \times \frac{\cos l.op.a}{\cos l.adj.a}; s \pm s' = l.c.$$

118. Osservazione. Se fatto $B'D = BD$ si conduca l'arco CB', è evidente che $CB = CB'$ (794) e che i due triangoli ACB, ACB' avranno gli stessi lati dati e lo stesso angolo A. Eppure nel primo caso $AB = AD - DB$, nel secondo $AB = AD' + DB' = AD + DB$; ed ecco perchè è dubbio anche questo caso, come pure il seguente. Fatto perciò $A = 42°15'3'',3$, $AC = 76°35'36''$, $BC = 50°10'30''$, si troverà $AB = 40°0'10''$ ovvero $= 104°17'50''$. E poichè i due lati così dell'uno come dell'altro triangolo son della medesima specie, è chiaro che questa sola nozione non basta mai per indicare se l'arco normale cada o no dentro la base, e se si debba prender la somma o la differenza de' segmenti, ed il calcolo altronde non ne somministra indizio coi segni (849).

858. VIII**. *Dati parimente due lati* AC, BC *e un angolo* A *opposto ad uno di essi* BC, *trovar l'angolo* C *contenuto dai lati dati*. Si ha 1°. (812) $\cot ACD = \tang A \cos AC$; 2°. (810) $\cos BCD = \cos ACD \times \frac{\tang AC}{\tang BC}$; 3°. $C = ACD \pm BCD$, o generalmente

115. e 116.

$$\cot s = \tang a \cos l.adj.; \cos s' = \cos s \times \frac{\tang l.adj.a}{\tang l.op.a}; s \pm s' = a.c.$$

Il caso è dubbio come il precedente per la ragione medesima (857).

859. IX. *Dati due lati* AC, AB *e l'angolo contenuto* A, *trovar l'altro lato* BC. Si ha 1°. (809) $\tang AD = \cos A \tang AC$; 2°. (849) $AB - AD = BD$; 3°. (804) $\cos BC = \cos AC \times \frac{\cos BD}{\cos AD}$, cioè generalmente (chiamando l, l' a piacere i due lati dati)

$$\tang s = \cot a \tang l; l' - s = s'; \cos l.c. = \cos l \times \frac{\cos s'}{\cos s}.$$

Sostituendo nella 3ª. equazione il valor di $\cos s' = \cos (l' - s)$ e quel di $\tang s$ preso dalla prima, sarà $\cos l.c. = \sen l \sen l' \cos a + \cos l \cos l'$ ove se $l = 90°$, sarà $\cos l.c. = \sen l' \cos a$.

Se $\cos l.c.$ fosse troppo grande, operando come nel Pr. IV si avrebbe

$$\sen \tfrac{1}{2} l.c = \sen \tfrac{1}{2}(l \backsim l') \sqrt{[1 + \sen l \sen l' \times \frac{\sen^2 \frac{1}{2} a}{\sen^2 \frac{1}{2}(l \backsim l')}]}$$

e facendo $\frac{\sen \frac{1}{2} a}{\sen \frac{1}{2}(l \backsim l')} \sqrt{\sen l \sen l'} = \tang u$, si avrà $\sen \frac{1}{2} l.c. = \frac{\sen \frac{1}{2}(l \backsim l')}{\cos u}$.

FIG. 115. e 116.

860. X. *Dati similmente due lati* AC, AB *e l'angolo contenuto* A, *trovare uno degli altri angoli* per es. B. Si ha 1°. (809) $tang\,AD = cos\,A\,tang\,AC$; 2°. (849) $AB - AD = DB$; 3°. (813.2°.) $tang\,B = tang\,A \times \frac{sen\,AD}{sen\,BD}$ ovvero generalmente (chiamando l il lato AC opposto all'angolo cercato, ed l' il lato AB adjacente al medesimo)

$$tang\,s = cos\,a\,tang\,l;\; s' = l' - s;\; tang\,a.c. = tang\,a \times \frac{sen\,s}{sen\,s'}.$$

Collo stesso metodo usato sopra (855) si avrà ancora

$$tang\,a.c. = \frac{sen\,a}{sen\,l'\,cot\,l - cos\,l'\,cos\,a};$$

e chiamando a', a'' i due angoli ignoti opposti ad l, l', si troverà parimente (810)

$$tang\tfrac{1}{2}(a'+a'') = cot\tfrac{1}{2}a \times \frac{cos\frac{1}{2}(l \backsim l')}{cos\frac{1}{2}(l+l')};\; tang\tfrac{1}{2}(a' \backsim a'') = cot\tfrac{1}{2}a \times \frac{sen\frac{1}{2}(l \backsim l')}{sen\frac{1}{2}(l+l')}.$$

861. XI. *Dati i tre lati* AB, BC, AC *trovare un angolo per es.* A. Chiamando p il perimetro, ed l, l' i lati adjacenti all'angolo cercato, si avrà (813.3°.) $sen\tfrac{1}{2}a.c. = \ldots\; \sqrt{\left[\frac{sen(\frac{1}{2}p - l')\,sen(\frac{1}{2}p - l'')}{sen\,l'\,sen\,l''}\right]}$, ovvero (chiamando l il lato opposto all'angolo cercato) $cos\,a.c. = \frac{cos\,l - cos\,l'\,cos\,l''}{sen\,l'\,sen\,l''}$, e $cos\tfrac{1}{2}a.c. = \sqrt{\left(\frac{sen\frac{1}{2}p \times sen(\frac{1}{2}p - l)}{sen\,l'\,sen\,l''}\right)}$ (813).

FIG. 121.

Condotto anche nel triangolo dato l'arco CE che divida in mezzo AB, si avrebbe 1°. $ED = \tfrac{1}{2}(AD - DB) = \tfrac{1}{2}V$ (805) e quindi 2°. (809) $cos\,A = tang\tfrac{1}{2}(AB + V)\,cot\,AC$.

862. XII. *Dati i tre angoli, trovare un lato*. Chiamata s la somma dei tre angoli ed a', a'' gli angoli adjacenti al lato cercato, si avrà (814) $cos\tfrac{1}{2}l.c. = \sqrt{\left[\frac{cos(\frac{1}{2}s \backsim a')\,cos(\frac{1}{2}s \backsim a'')}{sen\,a'\,sen\,a''}\right]}$ ovvero (chiamando a l'angolo opposto al lato cercato) $cos\,l.c. = \frac{cos\,a + cos\,a'\,cos\,a''}{sen\,a'\,sen\,a''}$ e $sen\tfrac{1}{2}l.c. = \sqrt{\left[\frac{-cos\frac{1}{2}s \times cos(\frac{1}{2}s \backsim a)}{sen\,a'\,sen\,a''}\right]}$ (814).

Condotto quì pure l'arco CE che divida in mezzo ACB, si avrebbe 1°. $DCE = \tfrac{1}{2}(ACD - BCD) = \tfrac{1}{2}W$ (808), e quindi 2°. (812) $cos\,AC = cot\tfrac{1}{2}(C - W)\,cot\,A$.

863. La maggior parte di queste formule può applicarsi anche ai triangoli rettilinei: poichè supponendo gli sferici molto piccoli, i loro lati sono archi insensibili, i loro seni e tangenti si confondon con essi lati e i loro coseni coll' unità. In tal modo le formule dei triangoli sferici si cangiano in quelle dei rettilinei se non includono qualche condizione ripugnante alla natura di questi, come la determinazione di un lato per mezzo de' soli angoli ec. Solo si avverta che avendosi più coseni in una formula, spesso è necessario sostituire non solo 1 a $\cos a$, $\cos g$ ec. ma $1-\frac{1}{2}a^2$, $1-\frac{1}{2}g^2$ ec. (727), trascurate poi ne' prodotti le quantità di un grado superiore al secondo, come infinitesime. Eccone qualche esempio: 1°. $\cos A = \frac{\cos CB - \cos AB \cos AC}{\operatorname{sen} AB \operatorname{sen} AC}$ (813) si cangia in $\cos A = \ldots$,

$$\frac{1-\frac{1}{2}CB^2-(1-\frac{1}{2}AB^2)(1-\frac{1}{2}AC^2)}{AC \times AB} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB \times AC}$$

(768); 2°. $\cos a = \cot h \operatorname{tang} g = \frac{\operatorname{tang} g}{\operatorname{tang} h}$ (841) diviene $\cos a = \frac{g}{h}$ (744); 3°. $\cos h = \cos g \cos g'$ (837) si muta in $1-\frac{1}{2}h^2 = (1-\frac{1}{2}g^2)(1-\frac{1}{2}g'^2)$ onde $h^2 = g^2 + g'^2$ (740).

864. L' affinità delle due Trigonometrìe serve anche utilmente per valutar gli errori in cui si può incorrere col trattar come rettilinei certi piccoli triangoli sferici, cosa comune in Astronomìa. Infatti se nelle formule dei triangoli sferici (posto g un lato o arco qualunque) si sostituisca $g-\frac{1}{6}g^3$ a $\operatorname{sen} g$, $1-\frac{1}{2}g^2$ a $\cos g$, e $g+\frac{1}{3}g^3$ a $\operatorname{tang} g$ (727), omettendo i termini d' un più alto grado come insensibili (perchè questi archi essendo piccoli e presi in parti di raggio, son sempre piccole frazioni), si avrà un nuovo risultato, la cui differenza da quello delle formule dei triangoli rettilinei, darà l' error da correggersi in queste. Che se ciò talora non basti, s' introdurranno nel calcolo anche i terzi termini delle serie respettive (727) e si porrà $1-\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{24}g^4$ in luogo di $\cos g$ ec., omessi allora i prodotti più alti del quarto grado. Solo si noti che ogni lato o arco per aversi in parti di raggio si dee divider per r'' (608), e dee poi moltiplicarsi per r'' il risultato totale per avere in secondi l' errore cercato e (608). Eccone gli esempj.

1°. Dati h ed a, siasi cercato g' per mezzo delle formule de' triangoli rettilinei, e si voglia l' errore commesso e. La formula sferica (816) dà $\operatorname{sen} g' = \operatorname{sen} h \operatorname{sen} a$, onde $g'-\frac{1}{6}g'^3 = \operatorname{sen} a (h-\frac{1}{6}h^3)$ e perciò $g' = h \operatorname{sen} a - \frac{1}{6}h^3 \operatorname{sen} a + \frac{1}{6}g'^3$; dunque $g'^3 = h^3 \operatorname{sen}^3 a$ (omessi i più alti termini), e $g' = h \operatorname{sen} a - \frac{1}{6}h^3 \operatorname{sen} a (1-\operatorname{sen}^2 a)$; e poichè si trova (758) $g' = h \operatorname{sen} a$, la

differenza o l'error da correggersi sarà $e = -\frac{h^3}{(r'')^2}\frac{sen\, a\, cos^2 a}{6} \times r'' = -\frac{1}{6}h^3 \times \frac{sen\, a\, cos^2 a}{r'' r''}$.

2°. Vogliasi ora coi medesimi dati l'errore incorso nel trovar g. La Trigonometrìa rettilinea dà $g = h\, cos\, a$; la sferica $tang\, g = tang\, h\, cos\, a$, e questa formula diviene $g + \frac{1}{3}g^3 = cos\, a(h + \frac{1}{3}h^3)$ onde $g = h\, cos\, a + \frac{1}{3}(h^3\, cos\, a - g^3)$, e $g^3 = h^3\, cos^3 a$, omesso il resto: dunque $g = h\, cos\, a + \frac{1}{3}h^3\, cos\, a(1 - cos^2 a)$, e l'errore $e = \frac{h^3\, cos\, a\, sen^2 a}{3r'' r''}$.

3°. Cerchisi finalmente coi dati stessi l'errore occorso in a'. La Trigonometrìa rettilinea dà $a' = 90° - a$ (739) onde pongo $a' = 90° - a + e$, cioè $cot\, a' = cot(90° - (a - e)) = tang(a - e)$. Sostituisco questo valore nella formula (818) $cot\, a' = tang\, a\, cos\, h$ ed ho $tang(a - e) = tang\, a(1 - \frac{1}{2}h^2)$, onde $tang\, a - tang(a - e) = \frac{1}{2}h^2\, tang\, a$; ma $tang\, a - tang(a - e) = \frac{sen\, e}{cos\, a\, cos(a - e)}$ (709) ovvero per esser e piccolissima, $= \frac{e}{cos^2 a}$; dunque $\frac{e}{cos^2 a} = \frac{1}{2}h^2\, tang\, a$, ed $e = \frac{1}{2}h^2\, sen\, a\, cos\, a = \frac{h^2\, sen\, 2a}{4r''}$. Ecco ora alcuni Problemi per esercizio.

I. Cerco se la differenza che possono aver tra loro i due angoli obliqui d'un triangolo sferico rettangolo, abbia alcun limite *in più* e qual sia. *Ris.* Il limite è di 90°.

II. Data in un triangolo sferico rettangolo la somma o la differenza dell'ipotenusa h e di un lato g, e dato l'angolo adjacente a, determinare h e g. *Ris.* $sen(h - g) = tang^2 \frac{1}{2}a\, sen(h + g)$ ovvero $sen(h + g) = cot^2 \frac{1}{2}a\, sen(h - g)$ e quindi h e g.

III. Due triangoli sferici DBA, DBE rettangoli in A ed E han l'ipotenusa comune BD. Si cerca il rapporto dei loro lati ed angoli obliqui. *Ris.* 1°. *cos* AB *cos* AD $=$ *cos* BE *cos* ED; 2°. *tang* ABD *tang* ADB $=$ *tang* EBD *tang* EDB. 117.

IV. Dati i tre angoli A, B, C d'un triangolo sferico, trovarne la superficie s. *Ris* Dato C in gradi, e ridotto l'arco che lo misura in parti di raggio $=$ C.*r. arc.* 1° (607), sarà $s = (A° + B° + C° - 180°)\, r^2.arc.\, 1°$, ovvero $s = (A' + B' + C' - 10800')\, r^2\, arc.\, 1'$. 106.

V. I poli di due circoli AD, AC son T, P; e condotti da essi per un punto dato S della superficie sferica gli archi PSE, TS, PTC, si trova TC $= l$, SE $= \delta$, BD $= z$. Si cerca il valor di SB $= a$ *Ris* $sen\, a = \frac{sen\, \delta\, sen\, l \pm cos\, l\, cos\, z\, \sqrt{(cos^2 \delta - cos^2 l\, cos^2 z)}}{1 - cos^2 l\, sen^2 z}$. 118.

VI. E' ignota l'inclinazion di due circoli AC, AD o sia

FIG. 118. la distanza dei loro poli P, T: solo si sa che condotti da P, T per un dato punto S della superficie sferica gli archi PSE, TSB, PTD, si ha $EC = SPT = h$, $SB = a$, $BD = z$. Cercasi di determinar $TC = l$. *Ris.* $\operatorname{sen} l =$ . . . . . .
$$\frac{\cos h \cos a \operatorname{sen} 2z \pm 2 \operatorname{tang} a \sqrt{(\operatorname{sen}^2 h - \cos^2 a \operatorname{sen}^2 z)}}{2 \operatorname{sen} h \cos a (\cos^2 z + \operatorname{tang}^2 a)}.$$

VII. Dai poli P, T di due dati circoli AC, AD la cui inclinazione è $CAD = i$, conduco per un dato punto S gli archi PSE, TSB. Supposto che siano dati $AB = a$, $BS = \delta$, cerco $AE = L$ ed $ES = l$. *Ris.* $\operatorname{tang} L = \frac{\operatorname{tang} \delta \operatorname{sen} i + \operatorname{sen} a \cos i}{\cos a}$; $\operatorname{sen} l = \operatorname{sen} \delta \cos i - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} i \cos \delta$.

119. VIII. Dato un piccolo arco di parallelo CnE e data la sua distanza $ED = p$ dal polo D, trovar la differenza e dell'angolo nED ($= 90°$) dall'angolo mED fatto dall'arco CmE $= m$ del cerchio massimo che passa per gli stessi punti C, E. *Ris.* $\operatorname{sen} e = \operatorname{tang} \frac{1}{2} m \cot p$ ovvero $e = \frac{1}{2} m \cot p$.

121. IX. Suppongo che passino per gli stessi punti D, B un arco di cerchio massimo DmB e un arco di parallelo DnB $= b = 1° \, 8'$, la cui distanza dal polo C sia $BC = p = 56° \, 15'$; e che inoltre nel piccolissimo triangolo sferico DnBM sia dato $MB = c = 2° \, 10'$. Poichè trattando questo triangolo come rettilineo, si calcola piuttosto l'arco DmB (come più vicino alla corda comune) che DnB, e l'angolo mBM non è più $= 90°$, si cerca 1°. la misura vera di quest'angolo a; 2°. condotto sopra DmB il vero arco normale Mm, si cerca l'arco intercetto Bm. *Ris.* $a = 90° - \frac{b}{2} \cot p = 89° \, 37' \, 17''$; 2°. $Bm = c \operatorname{sen}(90° - a) = 130' \operatorname{sen} 22' \, 43'' = 0° \, 51' \, 32''$.

X. In un piccolissimo triangolo sferico di cui si hanno l'ipotenusa h e un lato g, si è trovato g' colle formule dei triangoli rettilinei. Cerco l'errore e commesso nel valutarlo. *Ris.* Chiamando al solito r'' il raggio della sfera dato in secondi (608), si ha $e = \frac{g^2 \sqrt{(h^2 - g^2)}}{6r'' r''}$.

XI. Siasi ora nello stesso modo e nello stesso triangolo trovato il valor di h per mezzo de' due lati g, γ. Cerco l'errore e da correggersi. *Ris.* $e = -\frac{g^2 \gamma^2}{6r'' r'' \sqrt{(g^2 + \gamma^2)}}$.

118. XII. Nel triangolo sferico SPT in cui siano dati i due angoli $P = h$, $T = 180° - z$ e i due lati $PT = 90° - l$, $TS = 90° - a$, suppongo che l'arco PS passi in Pr scorrendo l'arco $Sr = da = q$. Cerco 1°. la differenza dh ovvero l'angolo SPr; 2°. la differenza $d\delta$ cioè PS $-$ Pr. *Ris.* Fatto $\frac{q}{\cos a} = p$, avremo 1°. $dh = -\frac{p \cos l \operatorname{sen} h}{\cos \delta}$; 2°. $d\delta = p \operatorname{sen} l \cos \delta - p \cos l \cos h \operatorname{sen} \delta$.

TRATTATO ANALITICO
DELLE SEZIONI CONICHE

Si chiaman *Coniche* le sezioni fatte in un cono per un dato piano, Tale è il circolo perchè tagliando un cono con un piano parallelo alla base, la sezione è circolo; tale è pure il triangolo, perchè tagliato un cono per il vertice, la sezione è triangolo. Ma il nome di Coniche si dà propriamente a tre altre sezioni di cui parleremo dopo aver dato il modo di trattarlo analiticamente.

Nozioni preliminari sull' uso dell' Algebra nella descrizion delle Curve.

865. L'Applicazion dell' Algebra alla Geometria è attissima per ricercare a fondo la Teorìa delle Curve, il cui scopo è di esprimer con equazioni la legge onde una curva fu descritta, e reciprocamente di diriger l' Analista tanto nella descrizion delle curve onde ha l' equazioni, quanto nella ricerca delle lor proprietà. Per far questo, ogni punto della curva si riferisce a due rette; l' una chiamata *Linea* o *Asse dell' ascisse*, l' altra *Linea* o *Asse dell' ordinate*: quindi si cerca il rapporto tra l' ascisse e l' ordinate, la cui espressione analitica dà l' equazion della curva. Così $yy = 2ax - xx$ esprimendo il rapporto costante d' eguaglianza tra il quadrato di ciascuna ordinata e il rettangolo dell' ascisse, si è detto (564) che apparteneva al circolo.

866. Si chiama *funzione di una quantità* l' espressione algebrica in cui entra questa quantità. Così l' equazione al circolo esprime l' egualità di una funzione (y^2) di ciascuna ordinata con una funzione ($2ax - x^2$) di ciascuna ascissa corrispondente. Chiamansi poi *coordinate* l' ascisse e l' ordinate corrispondenti d' una curva; e poichè la lunghezza loro varia a ogni punto, si chiaman *variabili* o *indeterminate* per opposizione alle quantità *costanti* o *determinate*. Infine il punto da cui cominciano a contarsi l' ascisse, si chiama *l' origine dell' ascisse* che può supporsi ove piace, ma determinata una volta, resta la stessa per tutto il calcolo. D' ordinario si pone l' origine o al vertice o al centro della curva: e poichè l' ascisse posson prendersi da parti opposte, si segnan l' une col segno

$+$ e le altre col segno $-$. La scelta della parte positiva è arbitraria; ma stabilita una volta, dee starsi a quella (108). Lo stesso è dell'ordinate, che distinguonsi in *positive* e *negative* secondo che son da una parte o dall'altra dell'asse: o normali o oblique sopra di esso, per lo più son parallele tra loro; pur qualche volta partono da un punto fisso.

867. Come ogni punto d'una curva si riferisce a due rette, così (per dirlo di passaggio) ogni punto d'una *superficie*
118. *curva* D'PG si riferisce a tre, quantunque non ogni superficie riferita a tre rette sia curva. Conduco infatti da un punto H di D'FG la normale HF sopra un dato piano DTD', e da F nel piano stesso la normale FM sull'asse DD'; è chiaro che fatta $OM = x$, $MF = y$, $FH = z$, converrà determinare x, y, z per avere il punto H: e supposte D'Y normale a DD', e D'Z normale in D' al piano DD'Y della Tavola, dicesi DD'Y il *piano delle* x, y, DD'Z il *piano delle* x, z, ed YD'Z il *piano delle* y z. E' poi facile di aver l'equazion generale delle *superficie curve di rivoluzione* intorno ad un asse DD' (632); poichè congiunta HM, e prolungata MF in P onde $MP = u = MH$ per la natura della rivoluzione (632), il triangolo MFH rettangolo in F dà $u^2 = y^2 + z^2$, equazione cercata se vi si sostituisca il valor dell'ordinata u dato dall'equazion della curva genitrice D'PT. Così se D'PTO sia un rettangolo, sarà costante $MP = u = a$, e quindi $a^2 = y^2 + z^2$, equazione alla superficie del cilindro retto: se D'PTO sia un triangolo rettangolo, si avrà D'O (b): OT (a) :: D'M $(b - x)$: $MP = u = \frac{a(b-x)}{b}$ e quindi $\frac{a^2(b-x)^2}{b^2} = y^2 + z^2$, equazione alla superficie del cono retto, che, prese le x da D', diviene $\frac{a^2 x^2}{b^2} = y^2 + z^2$: se D'PTO sia un quadrante di circolo del raggio r, verrà $MP = u = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, e quindi $r^2 - x^2 = y^2 + z^2$, equazione alla superficie sferica, che, prese le x da D', diviene $2rx - x^2 = y^2 + z^2$ ec. D'onde facilmente si vede che l'equazione del primo grado $Ax + By + Cz + D = 0$ esprime una superficie piana, giacchè quelle delle più semplici superficie curve son del secondo. Torniamo alle linee curve.

868. La curva dell'equazione $y^2 = 2ax - xx$ è la circonferenza di un circolo il cui diametro è $2a$; ma quando non si sappia, la costruzion di quest'equazione lo farà conoscere. Sia a una quantità costante che suppongo $= 5$, e condotta
125. una retta indefinita BD sulla quale prendo $AD = 10 = 2a$, la divido in dieci parti eguali AP.PP, ec. Sia A l'origine dell'ascisse, BD il loro asse, AD la parte delle positive, AB sarà quella delle negative se la curva cercata ne abbia. Dipoi conducasi al punto A la perpendicolare indefinita EF che prendo per asse delle ordinate, e di cui suppongo positiva la parte AE. Sia finalmente $AP = x$, $PM = y$. E' chiaro per l'equa-

zione medesima $y = \pm \sqrt{(2ax - xx)}$, che quando $x = 0$, si ha $y = 0$; dunque la curva ha il punto A comune colla linea dell' ascisse. Se $x = 1$, $y = \pm 3$; se $x = 2$, $y = \pm 4$, e i valori corrispondenti di x e di y sono

$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$
$y = 0, \pm 3, \pm 4, \pm\sqrt{21}, \pm\sqrt{24}, \pm 5, \pm\sqrt{24}, \pm\sqrt{21}, \pm 4, \pm 3,\ 0.$

I valori di y determinan la lunghezza d' altrettante ordinate le cui estremità M son tanti punti della curva cercata; e poichè questi valori son positivi e negativi, conducendo dal punto A due *rami* eguali, l' uno che passi per i punti M al di sopra dell' asse dell' ascisse, e l' altro per i punti corrispondenti al di sotto, si avrà la curva richiesta che sarà tanto più esatta quanto più si moltiplicheranno le divisioni della linea AD. Così può descriversi una curva riferendo ciascun punto M a due linee BD, EF date di posizione: poichè terminato il *parallelogrammo* APMN *delle coordinate*. l'intersezione di NM, PM darà il punto M della curva. Nel nostro caso crescendo i valori y fino a un certo termine che è 5, e decrescendo in seguito colla proporzione medesima fino a zero, si dee concludere 1°. che vi è un' ordinata PM maggiore di tutte l' altre o *Massima*: 2°. che la curva dell' equazione $y^2 = 2ax - xx$ è *rientrante* e *chiusa*. Non si stende di là dal punto A, poichè allora le sue ascisse essendo negative, i valori di y sarebbero *immaginarj*. Cerchiamone qualche proprietà.

869. Dal mezzo C della linea AD conduco delle rette CM e ho tanti triangoli rettangoli CPM, in cui $CM^2 = PM^2 + CP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; onde essendo $y^2 = 2ax - x^2$, si avrà sempre $CM = a$, cioè tutti i punti M sono ad egual distanza del centro C (481). Inoltre l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ dà $x : y :: y : 2a - x$, ovvero $\because$ AP : PM : PD; dunque ogni perpendicolare PM è media proporzionale tra i due segmenti AP, PD (563). Di più condotta una corda AM, si avrà $AM^2 = 2ax$, onde $x : AM :: AM : 2a$, cioè nella curva trovata tutte le corde condotte dal punto A ad uno dei punti M son medie proporzionali tra AD e il segmento corrispondente AP (563). Condotta pure MD, si avrà $AM^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, proprietà del triangolo rettangolo; dunque tutti gli angoli AMD son retti (505). Iscrivendo il quadrilatero AMDM', si troverà pure che $AM \times M'D + AM' \times MD = AD \times MM'$ (570); ec.

870. Si debba ora descriver la curva dell' equazione $y^2 = ax$. Già si vede che questa dee tagliar la linea dell' ascisse nella loro origine, poichè fatta $x = 0$, si ha anche $y = \pm\sqrt{ax} = 0$, e di più che dee aver due rami eguali, uno positivo e l' altro negativo. Questi rami vanno all' infinito, allontanandosi dall' asse a misura che x ha valori più grandi: ma le x debbono esser positive, altrimenti le y divengono immaginarie; onde la curva avrà la forma MAM'. 126.

871. Sia pure $y^2 = x^2 - a^2$: facendo $y = 0$, si ha $x = \pm a$, onde preso sull' indefinita BD un punto A per origine dell' 127.

FIG. 127. ascisse, e due parti AS, As eguali ad a, la curva dee passar per i punti S, s che si chiamano i suoi *vertici*. Per conoscer la direzion de' suoi rami, sia AD il lato dell'ascisse positive, e si avrà $y = \pm \surd(x^2 - a^2)$ il che dà due rami, l'uno SM, l'altro SM', che anderanno ambedue all'infinito finchè $x > a$; essendo minore, y sarebbe immaginaria; onde se l'ascisse sien positive, la curva non oltrepasserà S. Prendendole negative l'equazione resta la stessa, onde la curva alla distanza già trovata $As = a = -x$ ha due nuovi rami opposti ma eguali ai due primi. L'asse dell'ascisse è BD, quello dell'ordinate è EF, e dando dei valori ad x, si determineranno l'y o le PM, e i parallelogrammi delle coordinate daranno i punti M, m ec. per cui passa la curva.

128. 872. Cerchiamo la curva dell'equazione $y^2 = \frac{bx^2 + x^3}{a - x}$. Prendo BD per linea dell'ascisse, $AD = a$ per la direzione delle positive, $AB = b$ per quella delle negative, il punto A per la loro origine, EF per l'asse dell'ordinate, e ho $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{a - x}}$, il che dà 1°. $y = 0$ quando $x = 0$, onde la curva passa per il punto A; 2°. ad ogni valor di x ne trovo due per y, onde vi sono ordinate positive e negative: 3°. prendendo x positiva ma $< a (= AD)$ ho per y due valori PM, PM' che crescon sempre finchè presa $x = a$, divengono infiniti; poichè allora $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{0}} = \infty$ (270); cioè bisogna prolungare all'infinito HG perchè incontri i due rami della curva (si chiamano *asintoti* queste linee, che sempre più accostandosi ai rami della curva, non posson però mai incontrarli); 4°. se $x > a$, y è immaginaria, onde la curva non va di là da GH; 5°. se x è negativa, si ha $y = \mp x \sqrt{\frac{b - x}{a + x}}$, onde y avendo due valori finchè $x < b$, la curva ha due rami anche in senso negativo; 6°. $x = b$ dà $y = 0$; onde la curva passa per B, ma non può scender più basso, poichè $x > b$ rende y immaginaria; 7°. se $y = 0$, si ha $x^2\left(\frac{b - x}{a + x}\right) = 0$, onde $x^2(b - x) = 0$, che dà $x = 0$, $x = 0$, $x = b$, e però la curva passerà una volta per il punto B, e due volte per A ove formerà un *nodo* (quando due, tre o più rami della curva passano per lo stesso punto, questo si chiama *punto doppio*, *triplo*, *multiplo*, e l'Algebra insegna a discerner questi punti e a conoscerne la moltiplicità); 8°. se $b = 0$, il nodo svanisce, e l'equazione diviene $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$ che appartiene a una curva detta *Cissoide*.

873. Oltre i punti multipli vi sono ancora dei punti d'

inflessione: in quei di *flesso contrario* la curva dopo essere stata convessa in un senso, comincia ad esserlo nel senso opposto, come MAM′: ma in quelli di *regresso* un ramo della curva tocca l'altro e torna indietro, come *mAm′*: in ambedue la tangente è anche secante nel punto A d'inflessione, e la curva è parte di quà e parte di là dalla tangente.

FIG. 129. 130.

874. Se l'equazione delle coordinate è del primo grado, ella appartiene sempre a una linea retta, e però le rette si chiaman *linee del primo genere* o del *primo ordine*: se è del secondo grado, del terzo ec., le linee si chiaman del *secondo*, del *terzo genere* ec.; e le linee del secondo si chiamano anche *curve del primo genere*, quelle del terzo *curve del secondo* ec. La sola retta è del primo genere; ve ne son quattro del secondo; settantadue del terzo; quelle del quarto sono in più gran numero ec.

875. In questa division di linee in varj ordini, si comprendono le sole curve *geometriche*, cioè quelle che hanno delle rette per ascisse e per ordinate, la cui ragione può determinarsi geometricamente. Una curva che avesse per coordinate delle quantità trascendenti (12), non sarebbe geometrica, ma *meccanica* o *trascendente*. Le geometriche si chiamano anche *curve algebriche*.

876. Ora il principale oggetto dell'Analisi nell'esame d'una curva è 1°. di trovarne l'equazione quando la curva è data, o di descriverla quando se ne ha l'equazione: 2°. di determinarne la tangente: 3°. di conoscerne la *curvatura* in un punto dato; 4°. di cercarne le massime o minime ordinate; 5°. di trovarne la quadratura o esatta se è possibile o approssimata; 6°. di trovarne la rettificazione cioè determinar la lunghezza d'una retta eguale ad un suo arco qualunque ec.

Origine ed Equazione delle Sezioni Coniche.

877. Tagliato un cono retto BCD con un piano AMP, si cerca l'equazion della curva MA*m* che nasce da questa Sezione. Un piano BCD perpendicolare alla base CD e al piano segante AMP, dà per l'intersezione di questi due piani una retta A*a*; ed un piano FMG parallelo alla base, dà un circolo la cui intersezione col piano AMP è una retta PM normale alle rette A*a*, FG (622); onde PM è un'ordinata comune al circolo e alla sezione MA*m*. Sia dunque $AP = x$, $PM = y$, $AB = c$, l'angolo $BAa = B$, l'angolo $BAa = A$: la proprietà del circolo dà $y^2 = FP \times PG$, e per trovare FP e PG, conduco AE parallela a CD e PK parallela a BD, l'una e l'altra nel piano BCD: dunque $AB : sen\, AEB :: AE : sen\, B$ (735); ma $AEB = 90° - \frac{1}{2}B$ (515); dunque $sen\, AEB = sen(90° - \frac{1}{2}B) = cos\, \frac{1}{2}B$ (704.698), ed $AE = \frac{c\, sen\, B}{cos\, \frac{1}{2}B}$. Inoltre il triangolo APK

131.

FIG. 131. dà $sen\ AKP (= sen\ AEB = cos\ \frac{1}{2}B) : sen\ APK (= sen\ AaE = sen\ (A+B)(511)) :: x : AK = \frac{x\ sen\ (A+B)}{cos\ \frac{1}{2}B}$; dunque $PG = KE = AE - AK = \frac{c\ sen\ B - x\ sen\ (A+B)}{cos\ \frac{1}{2}B}$. Parimente nel triangolo APF si ha $sen\ AFP (= sen\ BFG (690) = sen\ BGF = sen\ BEA = cos\ \frac{1}{2}B) : x :: sen\ A : FP = \frac{x\ sen\ A}{cos\ \frac{1}{2}B}$; onde $y^2 = \frac{sen\ A}{cos^2\ \frac{1}{2}B} [c\ x\ sen B - x^2\ sen (A+B)]$, equazione cercata.

132. 878. Ora possono accader tre casi: I. che $A + B = 180°$, cioè che il piano segante AMP sia parallelo al lato BD (512) e allora la sezione conica si chiama *Parabola* e la sua equazione è (692) $y^2 = \frac{sen\ A \times sen\ B}{cos^2\ \frac{1}{2}B} cx = (690) \frac{sen^2\ B}{cos^2\ \frac{1}{2}B}\ cx = (705)\ 4cx\ sen^2\ \frac{1}{2}B$ (870).

131. 879. II. Che $A + B < 180°$ cioè che il piano AMP prolungato incontri l'altro lato BD (512): allora la sezione chiamasi *Ellisse*, e la sua equazione è $yy = \frac{sen\ A}{cos^2\ \frac{1}{2}B} [cx\ sen\ B - xx\ sen (A+B)]$.

133. 880. III. Che $A + B > 180°$: allora la sezione chiamasi *Iperbola*, la cui equazione è $yy = \frac{sen\ A}{cos^2\ \frac{1}{2}B} [cx\ sen\ B + xx\ sen (A+B-180°)]$ (707). Ora immaginando un cono B*cd* eguale e opposto nel vertice al cono BCD, il piano segante AM*p* prolungato lo incontrerà, e dalla loro intersezione risulterà una curva M'*am'* opposta all' inferiore MA*m*; o piuttosto queste due curve chiamate *Iperbole opposte* saranno una sola curva rappresentata dalla stessa equazione (871).

131. 881. Queste sezioni potrebbero supporsi in un cono obliquo come sarebbe BCD, se non fosse l'angolo $C = D$, e si avrebbe per loro equazione generale $yy = \frac{sen\ A}{sen C\ sen D} [cx\ sen B - xx\ sen (A+B)]$, che parimente appartiene a una parabola, a un' ellisse o a un' iperbola, secondo che la somma degli angoli A, B è eguale, minore o maggiore di 180°. Ella esprime un circolo ogni volta che $A + B < 180°$ ed $A = C$ o $= D$, avendosi allora o $y^2 = \frac{cx\ sen\ B}{sen\ D} - x^2$ o $y^2 = \frac{cx\ sen\ B}{sen\ C} - x^2$ (690). In fine quando l'equazione esprime un' iperbola, se si suppon-ga $c = 0$, verrà $y^2 = \frac{sen\ A\ sen\ (A+B-180°)}{sen\ C\ sen\ D} x^2$, e fatto per brevità il coefficiente di x^2 eguale a una quantità costante

$\frac{a^2}{b^2}$, si trova $y = \frac{ax}{b}$, equazione alla linea retta; cioè l'iperbola degenera in triangolo quando $c = 0$, o quando il piano segante passa per il vertice del cono. Del resto, per maggior facilità queste curve si son descritte in un piano.

Parabola.

882. L'equazione alla parabola è $yy = 4cx \, sen^2 \frac{B}{2}$: e fatta la quantità costante $4c \, sen^2 \frac{B}{2} = p$, si avrà $y^2 = px$: onde *i quadrati dell' ordinate son fra loro come le loro ascisse*. La linea indefinita AL si chiama *asse* della parabola, il punto A ne è il *vertice*, AQ un' ascissa, MQ l'ordinata corrispondente, e la quantità costante p si chiama il *parametro* dell' asse che può sempre determinarsi coll' equazione $yy = px$; poichè presa un' ascissa $a = x$ ed un' ordinata $b = y$, la terza-proporzionale dopo a, b sarà il parametro (576). 134.

883. Presa l'ascissa $AF = \frac{1}{4}p$, il punto F sarà quel che chiamasi *fuoco*, e l'ordinata DF che passa per questo punto sarà $DF = \frac{1}{2}p$; dunque *la doppia ordinata* Dd *che passa per il fuoco, è eguale al parametro*.

884. Se prolungata LA, si prenda $AG = AF = \frac{1}{4}p$, e da G si conduca l'indefinita EGe parallela all' ordinata MQ, questa linea EGe si chiama *direttrice*. Ora il *raggio vettore* $z = FM = \sqrt{[y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = \sqrt{[px + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = x + \frac{1}{4}p = AQ + AG = MH$; dunque *la distanza d' un punto qualunque* M *della parabola dalla direttrice, è eguale al raggio vettore* MF, proprietà che dà il modo di descriver la parabola. Poichè fermato in F e nel punto O d' una squadra EHO un filo FMO, si ponga la squadra sull' asse per muoverla quindi lungo la direttrice EG, mentre lo stile M tenendo teso il filo, scende lungo HO: la curva descritta da M è una parabola. Infatti essendo comune la parte MO, e il filo lo stesso, si ha sempre $MF = MH$.

885. Debbasi condurre dal punto dato M la tangente MT. Immagino l'arco Mm infinitesimo il cui prolungamento MmT sarà la tangente cercata, e condotte sulla direttrice le normali MQ, mq, le rette MF, mF al fuoco F, ed mg parallela a Qq, descrivo col centro F e raggio Fm l'arco infinitesimo mr che può prendersi per un seno; sarà $MQ = MF$, $mq = mF$, ed $MQ - mq (= Mg) = MF - mF (= Mr)$. Dunque i triangoli rettangoli Mmg, Mmr eguali e simili (527) hanno l'angolo mMr o TMF $= g$Mm = MTF; dunque il triangolo MTF è isoscele, e però presa FT = FM, la linea MT condotta per T, M sarà la tangente richiesta. 135.

886. L'angolo MTF = LMO = FMT; dunque *tutti i raggi*

FIG. 135. *luminosi o sonori* OM *paralleli all' asse* AP, *incontrando la parabola* AM *debbon riflettersi nel suo fuoco*; poichè si sa che l' angolo di riflessione è eguale all' angolo d' incidenza.

887. Poichè $z = FT = FM = x + \frac{1}{4}p$ (884), si ha $FT - \frac{1}{4}p = x = AT$; dunque *la suttangente* $PT = 2x$ *è doppia dell' ascissa*. La *tangente* $MT = \sqrt{(px + 4xx)} = 2\sqrt{xz}$; e condotta MN normale alla parabola, o alla sua tangente in M, si avrà la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$, e la *normale* $MN = n = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{pz}$. Se dal punto N ove la normale incontra l'asse, si conducano ai raggi vettori FM, OM le perpendicolari NB, NB', i triangoli NBM, NB'M eguali (886) daranno $BM = MB' = PN = \frac{1}{2}p$: e se dal punto F si conduca sulla tangente TM la perpendicolare $FC = q$, sarà $MT : TC :: MN : CF$, e poichè $TC = \frac{1}{2} MT$ (517), sarà $CF = q = \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\sqrt{pz}$, e perciò $n = \frac{pz}{2q}$.

E se sia l'angolo $TFM = \beta = 2MFP = 2\varphi$, sarà $TP^2\ (4x^2) : MP^2\ (px) :: 1 : tang^2\ MTP\ (= tang^2\ \frac{1}{2}MFP = tang^2\ \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = cot^2\ \varphi$ (704)), onde $x = \frac{1}{4}p\ tang^2\varphi$ (701), ed $x + \frac{1}{4}p\ (= FM = z) = \frac{1}{4}p\,(1 + tang^2\varphi) = \frac{\frac{1}{4}p}{cos^2\varphi} = \frac{\frac{1}{4}p}{cos^2\frac{1}{2}\beta}$. Perciò se collo stesso asse e fuoco si descriva un'altra parabola A'M' del parametro p', sarà $FM : FM' :: p : p' :: FA : FA' :: x : x'$.

134. 888. Una parallela MO all'asse di una parabola si chiama *diametro*; il punto M ne è l'*origine*; le sue ordinate son le rette NP parallele alla tangente in M, e le ascisse di queste ordinate son le rette MP. Per trovar l'equazione alle coordinate del diametro MO, chiamate MP (x), PN (y), $AQ = AT = a$, avremo $MQ = \sqrt{ap}$ e fatto $p + 4a = p'$ sarà $MT = PR = \sqrt{ap'}$ (887). Condotta ora NL normale all'asse, i triangoli simili NRL, MTQ daranno $\sqrt{ap'} : y + \sqrt{ap'} :: \sqrt{ap} : NL = y\sqrt{\frac{p}{p'}} + \sqrt{ap} :: 2a : RL = 2y\sqrt{\frac{a}{p'}} + 2a$. Ora $AR = RT - AT = x - a$; dunque $AL = x + a + 2y\sqrt{\frac{a}{p'}}$ e per la proprietà della parabola, $NL^2 = p \times AL$ cioè $(\sqrt{ap} + y\sqrt{\frac{p}{p'}})^2 = ap + px + 2py\sqrt{\frac{a}{p'}}$; e riducendo, $yy = p'x$, equazione simile alla trovata per l'asse; perciò qualunque diametro MO divide in mezzo l'ordinate Nn, e il suo parametro $p' = p + 4a$ è quadruplo della distanza dell'origine M dal fuoco F. Con questi principj si risolvono i problemi seguenti.

889. I. Dato l'asse AL e il parametro p, trovare un dia-

metro MO che faccia colle sue ordinate un angolo dato MP$n = a$. FIG. 134.
Il problema si riduce a trovare il punto Q ove l'ordinata normale MQ incontra l'asse. Sia AQ $= x$; il triangolo MTQ dà $tang\, a = \frac{\sqrt{px}}{2x}$ (741), $x = \frac{p}{4} \cot^2 a$ (701) e $p' (= p + 4x) = \frac{p}{sen^2 a}$ (698. 702).

II. Dato il parametro p' e l'origine M del diametro MO con l'angolo a delle coordinate, trovar l'asse AL, il vertice della curva A, ed il suo parametro p. Serbando le denominazioni del problema precedente, abbiamo MQ $= \sqrt{px}$, $p' = \frac{p}{sen^2 a} = p + 4x$, onde $p = p' sen^2 a$, $x = \frac{p'}{4} \cos^2 a$ (696), MQ $= \pm \frac{p'}{2} sen\, a \cos a = \pm \frac{p'}{4} sen\, 2a$ (705).

Ellisse.

890. L'equazione all'ellisse è $yy = \frac{sen\, A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} [cx\, sen\, B - x^2 sen (A + B)]$, onde ad ogni ascissa AP corrispondon due ordinate PM, PM' eguali ed opposte. Fatto $y = 0$, si avranno i punti ove la curva incontra la linea dell'ascisse, cioè l'*asse primo*, *maggiore* o *trasverso* Aa; poichè l'equazione $cx\, sen\, B - x^2 sen (A + B) = 0$ dà 1°. $x = 0$ che determina il punto A: 2°. $x = \frac{c\, sen\, B}{sen (A + B)}$ che determina l'altro punto a e che suppongo $2a =$ Aa; dunque $c = sen (A + B) \frac{2a}{sen\, B}$, ed $y^2 = \frac{sen\, A\, sen (A + B)}{\cos^2 \frac{1}{2} B} (2ax - x^2)$. 136.

891. La doppia ordinata BCb che passa per il mezzo C dell' asse Aa, *centro* dell'Ellisse, si chiama *asse secondo*, *minore* o *conjugato* che faccio $= 2b$, ed ho AC $= x = a$ e $bb = sen \frac{(A + B)\, sen\, A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} aa$; onde $\frac{sen\, A\, sen (A + B)}{\cos^2 \frac{1}{2} B} = \frac{bb}{aa}$, ed $yy = \frac{b^2}{a^2} (2ax - xx)$: e però $y^2 : 2ax - x^2 :: b^2 : a^2$, cioè PM^2 : AP $\times$ Pa :: CB^2 : CA^2, e *il quadrato dell'ordinata all'asse maggiore è al prodotto dell'ascisse, come il quadrato dell'asse minore al quadrato del maggiore*. Descritto dunque col centro C e raggio CA un circolo, sarà PN^2 = AP $\times$ Pa, e PN : PM :: $a : b$ :: CB' : CB : onde l'ordinate dell'ellisse son proporzionali all'ordinate del circolo: perciò per descrivere un'ellisse basta far passare una curva per una serie di punti presi sull'ordinate d'un circolo divise in parti simili.

FIG. 136.

892. Prese l'ascisse dal centro C e fatta CP $= x$, la retta AP che era x, diverrà $a - x$, e l'equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ si muterà in $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ di cui spesso faremo uso. Se $b = a$ si ha $y^2 = a^2 - x^2$, equazione al circolo, onde il circolo è un'ellisse di assi eguali. Infine l'equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ dà $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) = a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}$, cioè $MQ^2 : BQ \times Qb :: CA^2 : CB^2$, e *il quadrato dell' ordinata all' asse minore è al rettangolo dell' ascisse come il quadrato dell' asse maggiore al quadrato del minore*. Se dunque CQ $= x$, QM $= y$, CB $= a$, CA $= b$, l'equazione al second' asse sarà come quella al primo.

893. Il circolo descritto col centro B e con un raggio BF eguale al semiasse maggiore CA, taglierà l'asse maggiore in due punti F, f chiamati *fuochi*: onde CF $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$ e però AF $\times$ Fa $= (a - \sqrt{[a^2 - b^2]})(a + \sqrt{[a^2 - b^2]}) = b^2 = CB^2$: dunque *il semiasse minore è medio proporzionale tra le distanze dell' un dei fuochi ai due vertici*.

894. L' ordinata DF che passa per il fuoco sarà $= \frac{b^2}{a}$ e il suo doppio Dd, o *il parametro dell' asse trasverso* sarà $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$; onde $2a : 2b :: 2b : p$, e però *il parametro è terzo-proporzionale ai due assi maggiore e minore*. Per analogia si chiama *parametro del conjugato* una retta $p' = \frac{2a^2}{b} = \frac{2a}{p}\sqrt{2ap}$, terza-proporzionale ai due assi minore e maggiore. Ora poichè $\frac{2b^2}{a} = p$, sarà $b^2 = \frac{ap}{2}$, e posto questo valore nell' equazioni all' ellisse trovate di sopra, si ha $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, e $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$, secondo che l'origine dell' ascisse è al vertice o al centro.

895 Le rette FM, fM condotte dai fuochi a un punto qualunque dell' ellisse si chiaman *raggi vettori*; e posta FC $= \sqrt{(a^2 - b^2)} = c$, si ha, prese l'ascisse dal centro, FM $= \sqrt{(y^2 + c^2 - 2cx + x^2)} = \sqrt{(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + a^2 - b^2 - 2cx + x^2)} = \sqrt{(a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2})} = a - \frac{cx}{a}$, ed fM $= a + \frac{cx}{a}$.

Se l'angolo AfM $= \beta$, sarà fP $(= c + x) = f$M. $\cos\beta$ (757), onde $x = f$M. $\cos\beta - c$ ed fM $(= z = a + \frac{cx}{a}) = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\beta} = \frac{b^2}{a - c\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - c\cos\beta}$.

FIG. 136.

Per aver l'ascisse dal vertice, bisogna cangiar x in $a - x$ e viene $FM = a - c + \frac{cx}{a}$ ed $fM = a + c - \frac{cx}{a}$, onde 1°. se dai fuochi F, f si prendano $FI = fi = \frac{p}{4} = \frac{b^2}{2a}$, sarà $\div AI \left(a - c - \frac{b^2}{2a}\right) : AF\,(a - c) : Aa\,(2a)$ ovvero $\div Ai\left(a + c - \frac{b^2}{2a}\right) : Af(a + c) : Aa\,(2a)$; 2°. $fM + FM = 2a = Aa$, cioè *la somma de' raggi vettori è sempre eguale all' asse maggiore*, proprietà che dà il modo di descriver l'ellisse. Poichè fermato a due punti fissi F, f un filo FMf maggior di Ff, lo stile M che tenda questo filo, descriverà intorno ai fuochi F, f un'ellisse, mentre la somma de' raggi vettori sarà sempre la stessa: perciò sopra uno stesso asse posson descriversi infinite ellissi, che sempre più si accosteranno al circolo circoscritto, e saran quelle che avranno i fuochi più vicini, mentre l'altre si appianeranno sempre più a misura che i loro fuochi saran più distanti; cosicchè il circolo e la linea retta sono i limiti di tutte l'ellissi.

137.

896. Debbasi ora condurre dal dato punto M la tangente MT. Immagino l'arco infinitesimo Mm, e dai fuochi F, f conduco i raggi vettori fm, fM, Fm, FM: descritti coi centri f, F e coi raggi fm, FM i piccoli archi mr, Mg, avrò $fm + mF = FM + Mf$, ovvero $fM - fm = Mr = Fm - FM = mg$: dunque (527) i triangoli rettangoli mMg, mMr sono eguali e simili, e perciò l'angolo gmM, o FmT, o FMT (perchè $FMT = FmM + MFm$ ed $MFm = \frac{1}{\infty} = 0$, essendo infinitesimo l'arco o il seno Mg) $= mMr = LMT$; dunque prolungato il raggio vettore fM la retta MT che dividerà in mezzo l'angolo LMF, sarà la tangente cercata.

L'angolo $LMT = QMf = FMT$; dunque tutti i raggi partendo da un fuoco luminoso F e incontrando l'ellisse AM, debbon riflettersi nell'altro fuoco f.

897. Condotta la normale MN, sarà l'angolo $fMN = NMF$, e però $fM : MF :: fN : NF$, ovvero (prese l'ascisse dal centro, e mutato x in $a - x$ se si prendan dal vertice (895)) $fM + FM\,(2a) : FM\left(a - \frac{cx}{a}\right) :: fN + FN\,(2c) : FN = c - \frac{c^2x}{a^2} = c - x + \frac{b^2x}{a^2}$: onde la *sunnormale* $PN = FN + x - c = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{2a}$. La *normale* $MN = n = \sqrt{(y^2 + \frac{b^4x^2}{a^4})} = \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^4 - c^2x^2)}$: e se dal punto N ove la normale incontra l'asse, si conducano ai raggi vettori FM, fM le perpendicolari NB, NB', si avrà $fM\left(a + \frac{cx}{a}\right) : fP\,(x + c) :: fN\left(c + \frac{c^2x}{a^2}\right) : fB' = \ldots\ldots \frac{(x + c)(a^2 + ex)c}{a(a^2 + cx)} = \frac{c^2 + cx}{a}$; onde ricordandosi che $c^2 =$

137. $a^2 - \frac{ap}{2}$ (894), si troverà $fM - fB' = MB' = \frac{p}{2} = MB$ per essere eguali gli angoli fMN, NMF e perciò anche i triangoli NBM, NB'M. La *suttangente* $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, onde $CT = \frac{a^2}{x}$, e però CP : CA :: CA : CT, altro modo di determinar la *tangente*, che si ha dal triangolo rettangolo PMT.

136. Se dal punto M si conducano all'asse conjugato la tangente Mt e la normale MO prolungata in n, i triangoli simili MPO, MQn, MQt e la sunnormale PO $(= \frac{b^2 x}{a^2})$ daranno per il second'asse 1°. la *sunnormale* $Qn = \frac{a^2 y}{b^2} = \frac{p^2 y}{2b}$ (894); 2°. la *normale* $Mn = \frac{a}{b^2}\sqrt{(b^4 + (a^2 - b^2)y^2)}$; 3°. la *suttangente* $Qt = \frac{b^2 - y^2}{y}$; onde $Ct = CQ + Qt = \frac{b^2}{y}$ e perciò CQ : CB :: CB : Ct, come nell'asse trasverso.

137. 898. Condotta dal centro C la CD parallela a TM, si avrà $Tf\left(c + \frac{a^2}{x}\right) : fM\left(a + \frac{cx}{a}\right) :: Cf(c) : fD = \frac{cx}{a}$ e però $DM = Mf - fD = a$, cioè nel raggio vettore l'intercetta tra la tangente e la sua parallela dal centro, è sempre eguale al semiasse trasverso.

899. Condotte ora dai fuochi f, F le rette fQ, FR normali alla tangente TQ e fatto $FM = z$, $fM = 2a - z$, onde (897) $n = \frac{b}{a}\sqrt{(2az - z^2)}$ e $TN = PT + PN = \frac{a^2 n^2}{b^2 x}$, i triangoli simili TFR, TNM, TfQ danno $TN\left(\frac{a^2 n^2}{b^2 x}\right) : NM(n) :: TF\left(\frac{az}{x}\right) : FR = q = \frac{b^2 z}{an} :: Tf\left(\frac{a(2a - z)}{x}\right) : fQ = \frac{b^2(2a - z)}{an} = \frac{an}{z}$; dunque 1°. $FR \times fQ = b^2$: 2°. $n = \frac{b^2 z}{aq} = \frac{pz}{2q}$ (894).

138. 900. Una retta nCN che passando per il centro C termina ai due punti opposti della curva, dicesi *diametro*, e condotta DCd parallela alla tangente in N, i diametri DCd, nCN chiamansi *conjugati*; le rette MP parallele alla tangente son l'ordinate del diametro CN, le parti CP ne son l'ascisse, e il parametro di un diametro qualunque è una terza-proporzionale a questo e al suo conjugato.

901. Condotte dall'estremità D, N l'ordinate DI, NQ all'asse maggiore Aa, sia $QN = y$, $CQ = x$, $ID = u$, $IC = z = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - u^2)}$ (892) e i triangoli simili DIC, NQT danno

FIG. 138.

$NQ^2 : QT^2 :: DI^2 : IC^2$, ovvero $\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) : \frac{(a^2-x^2)^2}{x^2} :: u^2 : a^2 - \frac{a^2u^2}{b^2}$ onde $u=\frac{bx}{a}$; così si troverebbe $y=\frac{bz}{a}$, onde $\frac{u}{x}=\frac{y}{z}$ e $zu=xy$, cioè i triangoli DIC, CNQ sono eguali in superficie. Dunque 1°. $u^2=\frac{b^2x^2}{a^2}=b^2-y^2$ (892) ed $u^2+y^2=b^2$; 2°. $z^2=\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2-x^2$ e $z^2+x^2=a^2$; 3°. $u^2+z^2+y^2+x^2$ ($=DC^2+CN^2$) $=a^2+b^2$, cioè nell'ellisse la somma dei quadrati di due diametri conjugati è sempre eguale alla somma dei quadrati de' due assi; 4°. condotta ND, la superficie del triangolo NCD $=\frac{(u+y)(z+x)}{2}-\frac{zu}{2}-\frac{xy}{2}=\frac{ux+yz}{2}=\frac{bx^2}{2a}+\frac{ay^2}{2b}=\frac{ab}{2}$; dunque il parallelogrammo CDEN $=ab$, e l'intero parallelogrammo FEHG $=4ab=2a\times 2b$, e però *tutti i parallelogrammi circoscritti all'ellisse sono eguali tra loro e al rettangolo dei due assi*.

902. Sia ora il semidiametro $CN=m$, $CD=n$, l'angolo $CPM=DCn=p$, e sarà 1°. $m^2+n^2=a^2+b^2$; 2°. $ab=mn \operatorname{sen} p$ che è l'espressione della superficie del parallelogrammo CDNE (758). Ora queste due equazioni danno subito i diametri conjugati ed eguali dell'ellisse, poichè allora $2m^2=a^2+b^2$, ovvero $m=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; e $\operatorname{sen} p=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, onde poichè queste quantità son sempre reali, ogni ellisse ha due diametri conjugati eguali. La lor posizione dipende dal valor di x, ma $x^2+y^2=b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2$ (892) $=m^2=\frac{a^2+b^2}{2}$; dunque $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, valore indipendente da b, onde l'ordinata NQ prolungata determinerà i diametri conjugati eguali in tutte le ellissi che avranno comune l'asse Aa.

903. Cerchiamo ora l'equazione alle coordinate CP, PM, e sia $CP=x$, $PM=y$, $CQ=t$, $QN=r$, $NT=q$, e $TQ=\frac{a^2-t^2}{t}$ (897) $=s$. Condotte PK, MO perpendicolari all'asse, e PL perpendicolare ad MO, i triangoli simili NQT, MLP danno $ML=\frac{ry}{q}$, $PL=\frac{sy}{q}$, e gli altri due CPK, CNQ danno $PK=\frac{rx}{m}$, $CK=\frac{tx}{m}$, onde $CO=\frac{tx}{m}-\frac{sy}{q}$ ed $MO=\frac{ry}{q}+\frac{rx}{m}$: ma per la proprietà dell'ellisse, $\frac{a^2}{b^2}.MO^2=a^2-CO^2$; dunque sosti-

tuendo, ordinando e riflettendo che $\frac{a^2 r^2}{b^2} = a^2 - t^2$ (901. 2°) $= ss$, si avrà $(\frac{a^2 r^2}{b^2 q^2} + \frac{s^2}{q^2}) y^2 + (\frac{a^2 r^2}{b^2 m^2} + \frac{t^2}{m^2}) x^2 = a^2$. Osservo ora che quando $x = 0$, si ha $y = n$; dunque $\frac{a^2 r^2}{b^2 q^2} + \frac{s^2}{q^2} = \frac{a^2}{n^2}$, cioè non può in tal caso avverarsi l'equazione se il coefficiente di y^2 non sia $\frac{a^2}{n^2}$; al contrario quando $y = 0$, si ha $x = m$, onde per la ragione stessa il coefficiente di x^2 è $\frac{a^2}{m^2}$; dunque avremo $\frac{a^2}{n^2} y^2 + \frac{a^2}{m^2} x^2 = a^2$, ovvero $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, equazione simile a quella degli assi. Dal che segue 1°. che ogni diametro N$C$$n$ divide in mezzo l'ordinate M$P$$m$, e perciò l'ellisse intera: 2°. che ogni diametro Nn è diviso in mezzo nel centro C perchè ne' punti N, n si ha $x^2 = m^2$, onde $x = \pm m$.

904. I. Dati i due semiassi a, b trovar due diametri conjugati che facciano fra loro un angolo dato $p = $ DCn. Abbiamo $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, ed $mn = \frac{ab}{sen\, p}$ (902); dunque $m^2 + n^2 \pm 2mn = a^2 + b^2 \pm \frac{2ab}{sen\, p}$; ed $m \pm n = \sqrt{\left(a^2 + b^2 \pm \frac{2ab}{sen\, p}\right)}$, d'onde sommando e sottraendo si ha m ed n. Per determinar la direzione di un de' diametri o l'angolo ACN che chiamo c, il triangolo CNT dà (500) $sen(p-c) : m :: sen p : \text{CT} = \frac{aa}{\text{CQ}}$ (897) $= \frac{m\, sen\, p}{sen(p-c)}$, onde CQ $= \frac{a^2\, sen(p-c)}{m\, sen\, p}$; si ha dunque nel triangolo rettangolo CNQ (preso CN per raggio) (757) $1 : m :: cos\, c : \frac{a^2\, sen(p-c)}{m\, sen\, p}$, che dà $m^2\, sen\, p\, cos\, c = a^2\, sen(p-c) =$ (703) $a^2\, sen\, p\, cos\, c - a^2\, sen\, c\, cos\, p$, ovvero $\frac{a^2 - m^2}{a^2}\, sen\, p\, cos\, c = sen\, c\, cos\, p$; e perciò [poichè $\frac{sen\, p\, cos\, c}{sen\, c\, cos\, p} = \frac{tang\, p}{tang\, c}$ (699)], sarà $tang\, c = \frac{a^2 - m^2}{a^2}\, tang\, p$.

905. II. Dati i semidiametri conjugati m, n e l'angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Dall' equazioni $mn\, sen\, p = ab$ ed $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ con un calcolo simile al precedente si determina a e b. L'angolo che dà la direzione degli assi si trova come prima.

Iperbola.

906. L' equazione $yy = \frac{sen\,A}{cos^2 \frac{1}{2} B}$ [$cx\,sen\,B + xx\,sen\,(A + B - 180^\circ)$] fa vedere che l' iperbola incontra il suo asse AP in due punti; poichè posto $y = 0$, si trova $cx\,sen\,B + x^2\,sen\,(A + B - 180^\circ) = 0$, e però 1°. $x = 0$ che determina il punto A; 2°. $x = \frac{-c\,sen\,B}{sen\,(A + B - 180^\circ)}$ che determina l' altro punto a (566): onde supponendo $Aa = \frac{-c\,sen\,B}{sen\,[A + B - 180^\circ]}$, il punto a sarà all' iperbola opposta $M'am'$. Ora i punti A, a si chiamano i *vertici* dell' iperbola, la retta Aa ($= 2a$) ne è l' *asse primo* o *trasverso*, il suo mezzo C ne è il *centro*, e finalmente una retta $Bb = 2CB = 2b$ normale all' asse nel centro C, e tale che sia $\frac{bb}{aa} = \frac{sen\,A\,sen\,(A + B - 180^\circ)}{cos^2 \frac{1}{2} B}$ come nell' ellisse (891), si nomina *asse secondo* o *conjugato*. 139.

907. Operando pur come nell' ellisse (890. 891), l' equazione dell' iperbola diventa $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$ che indica nella curva due rami eguali ed infiniti AM ed Am in senso positivo. Ma se x è negativa non vi sarà curva finchè x sarà $< 2a$; che se $x > 2a$, le ordinate saran reali e la curva avrà due altri rami infiniti ed eguali a quelli dell' iperbola positiva MAm. Infatti chiamando $AP' = -x$, $P'm' = P'M' = y$, si ha $\frac{a^2y^2}{b^2} = -2ax + xx$, e fatto $aP' = x'$, viene $x = 2a + x'$, e però $\frac{a^2y^2}{b^2} = 2ax' + x'x'$, equazione simile a quella dell' iperbola MAm.

908. Poichè $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, si ha $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$, *e il quadrato dell' ordinata al primo asse è al rettangolo dell' ascisse* (cioè delle distanze dai due vertici) *come il quadrato del secondo asse al quadrato del primo*. Fatto $CP = x$ cioè prese le x dal centro C, la retta AP che era x diverrà $x - a$, e l' equazione si muterà in $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ più semplice della precedente. Ella dà $xx = \frac{aa}{bb}(bb + yy)$, cioè $CP^2 : CB^2 + PM^2 :: CA^2 : CB^2$; dunque condotta MQ perpendicolare al piccolo asse CB, prolungato s' è necessario, e fatte $CQ = x$, $MQ = y$, $CA = b$, $CB = a$, verrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + x^2)$, equazione alle coordinate del second' asse.

909. Se $a=b$, l'iperbola si chiama *equilatera* e si ha per equazioni di essa $yy=2ax+xx$, $yy=xx-aa$, secondo che l'origine dell'ascisse è al vertice o al centro, e l'equazione al second'asse diviene allora $yy=aa+xx$; ove si rifletta di passaggio all'analogìa tra questa curva ed il circolo, le cui equazioni sono $yy=2ax-xx$, ed $yy=aa-xx$.

139. 910. Se unendo BA, si prenda $CF=Cf=BA$, i punti F, f saranno i *fuochi* dell'iperbola, e le rette FM, fM condotte da questi punti a quei della curva. si chiaman *raggi vettori*. Ora la distanza $FC=\sqrt{(aa+bb)}$; dunque $FA\times Fa=[\sqrt{(aa+bb)}-a][\sqrt{(aa+bb)}+a]=bb$. Quindi *il semi-asse conjugato è medio proporzionale tra le distanze di un de' fuochi ai due vertici*. E poichè (908) $a^2:b^2::FA\times Fa:DF^2$, sarà l'ordinata $DF=\frac{bb}{a}$; dunque il suo doppio Dd o il parametro $p=\frac{2bb}{a}=\frac{4bb}{2a}$, terzo-proporzionale dopo il primo ed il second' asse. Si chiama *parametro del second' asse* una retta p' terza-proporzionale dopo il secondo ed il primo.

911. Se si fa entrare il parametro nell'equazioni all'iperbola, viene $yy=\frac{p}{2a}(2ax+xx)$, $yy=\frac{p}{2a}(xx-aa)$ e per il second'asse, $yy=\frac{4b^2}{p^2}(bb+xx)=\frac{2a}{p}(\frac{ap}{2}+x^2)$,

912. Sia $CF=Cf=c$, si avrà, prese l'ascisse dal centro, $FM=\sqrt{(yy+xx-2cx+c^2)}=\sqrt{(\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}+x^2-2cx+a^2+b^2)}=\sqrt{(\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2)}=\frac{cx}{a}-a$, ed $fM=\frac{cx}{a}+a$; onde 1°. se dai fuochi F, f si prendano $FI=fi=\frac{p}{4}=\frac{b^2}{2a}$, sarà $\div AI\ (a-c+\frac{b^2}{2a}):AF\ (c-a):Aa\ (2a)$, ovvero $\div Ai(a+c+\frac{b^2}{2a}):Af(a+c):Aa(2a)$; 2°. $fM-FM=2a$; cioè *la differenza dei raggi vettori è eguale al primo asse*, proprietà che dà il modo di descrivere un' iperbola degl'assi $2a$, $2b$. Preso un intervallo $Ff=2\sqrt{(a^2+b^2)}$, ed una riga fMO, se ne fissi un' estremità in un de'fuochi, come in f, onde possa girare intorno a questo punto. Quindi preso un filo $FMO=fMO-2a$, se ne fissin l'estremità nel punto O della riga e nel punto F. Fatto ciò, si allontani la riga dall'asse, e quindi vi si avvicini, tenendo teso il filo con uno stile che scorre lungo la riga OMf. La curva descritta dallo stile M, sarà un ramo iperbolico AM; perchè la differenza dei raggi vettori sarà sempre eguale all' asse maggiore. 3°. chiamando β l'angolo

FIG. 139.

AFM, si troverà col raziocinio usato per l'ellisse (895) $FM = z = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a + c\cos\beta}$.

FIG. 140.

913. Queste medesime proprietà posson servire a condur la tangente MT a un punto M dell'iperbola. Preso l'arco Mm infinitesimo, e condotti i raggi vettori fM, fm, FM, Fm si proverà presso a poco come nell'ellisse (896) che gli angoli mMf, FMm son eguali, e che perciò diviso in mezzo l'angolo fMF colla retta MT, questa sarà la tangente cercata. Dunque nel triangolo fMF si ha (557) $fM : MF : fT : TF$, ovvero $fM + FM \left(= \frac{2cx}{a}\right) : fM \left(= \frac{cx + a^2}{a}\right) :: fT + FT (= 2c) : fT = \frac{a^2 + cx}{x} = \frac{a^2}{x} + c$. Dunque $fT - c = CT = \frac{aa}{x}$, dal che abbiamo $CP : CA :: CA : CT$, onde è facile il trovare il punto T e condur la tangente.

914. Si rifletta che essendo $CT = \frac{aa}{x}$, essa è positiva finchè lo è x; onde tutte le tangenti all'iperbola tagliano l'asse fra A e C. Ma poichè crescendo l'ascissa, scema CT di modo che mentre quella è infinita, questa si fa infinitesima: così posson condursi dal centro C due rette CX, Cx, che saranno i limiti delle tangenti o gli asintoti dell'iperbola (872).

915. Prese l'ascisse dal centro, sarà la *suttangente* $PT = CP - CT = x - \frac{aa}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$ e la *tangente* MT si ha dal triangolo MPT. Condotta la normale MN, sarà la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{TP} = \frac{bbx}{aa}$, e la *normale* $= \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{b}{a^2}\sqrt{(c^2x^2 - a^4)}$. E se si conducano come nell'ellisse (897. 898. 899) 1°. le perpendicolari NB, NB' ai raggi vettori, 2°. la parallela CD alla tangente TM, 3°. le FS, fs normali alla tangente stessa; si troverà col raziocinio medesimo, 1°. $MB' = \frac{p}{2} = MB$: 2°. $DM = a$: 3° $FS \times fs = b^2$; 4°. $u = \frac{pz}{2q}$.

916. La retta $AT = a - CT = a - \frac{a^2}{x}$; e condotta AS parallela ad MP, si avrà $AS = \frac{AT \cdot PM}{TP} = \frac{ay}{x + a} = b\sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$. Supposta x infinita, sarà $\frac{x - a}{x + a} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, onde $AS = b$; e però condotte AD, Ad perpendicolari a CA ed eguali ciascuna al semiasse minore b, le rette CD, Cd che passano per i punti D, d e per il centro C, saranno gli asintoti dell'iperbola MAM', che prolungati in X', x' saranno quelli dell'iper-

FIG. bola opposta. Se l'iperbola è equilatera, l'angolo DCd fatto
140. dagli asintoti, è retto; poichè allora $DA = Ad = CA$. L'iperbola riferita agli asintoti ha molte proprietà.

141. 917. Se per un punto N dell'asintoto si conduca la retta Nn parallela alla retta Dd, sarà CA $[a]$: DA $[b]$ :: CP $[x]$: $NP = \frac{bx}{a}$. Dunque $NM = \frac{bx}{a} - y$, ed $Mn = \frac{bx}{a} + y$ onde $NM \times Mn = \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = b^2 = DA^2$: e poichè $NP^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$ ed $MP^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, si ha sempre $NP > PM$, e però l'iperbola non può mai confondersi con l'asintoto: per altro sempre più vi si avvicina, mentre crescendo l'ascissa, scema la differenza tra $\frac{b^2x^2}{a^2}$ e $\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, e svanisce affatto quando $x = \infty$.

918. Condotte MQ, AL parallele all'asintoto Cd, i triangoli DLA, LCA sono isosceli; onde fatta $AL = DL = CL = m$, $CQ = x$, $QM = y$, e condotta MK parallela e perciò eguale a CQ, i triangoli simili DLA, NQM, MKn danno $MN : DA :: QM : LA$ ed $Mn : DA :: MK : DL$, e però $NM \times Mn : DA^2 :: QM \times MK : LA \times DL = AL^2$; ma $NM \times Mn = DA^2$ (917); dunque $xy = m^2$, *equazione all' iperbola tra gli asintoti*, in cui m^2 $\left(= \frac{a^2 + b^2}{4}\right)$ si chiama la *potenza dell' iperbola*.

142. 919. Se due parallele Ff, Gg, terminate agli asintoti taglino un'iperbola nei punti m, h, p, K e sieno MmN, PpQ perpendicolari all'asse, si avrà $Fm : Mm :: Gp : Pp$, ed $mf : mN :: pg : pQ$, e però $Fm \times mf : Mm \times mN :: Gp \times pg : Pp \times pQ$; ma (917) $Pp \times pQ = b^2 = Mm \times mN$; dunque $Fm \times mf = Gp \times pg$; dunque anche $gK \times KG = fh \times hF$.

920. Se i punti p, K coincidano in un sol punto D, la retta TDt sarà tangente in D, e si avrà $Fm \times mf = TD \times Dt = fh \times hF$, onde $fh(hm + mF) = Fm(mh + hf)$, e però $fh = Fm$ e $TD = Dt$; ma condotta DE parallela a Ct, i triangoli simili TDE, TtC danno $TE = EC$; dunque la tangente a un punto D dell'iperbola si ha conducendo DE parallela all'asintoto, prendendo $ET = EC$, e per T, D conducendo la retta TDt.

921. Dall'esser sempre $fh = Fm$ si ha la maniera di descrivere un'iperbola tra due dati asintoti CT, Ct, che passi per un dato punto m, poichè condotte per m le rette Ff, MN, si farà $fh = Fm$, $nN = Mm$ e i punti m, n, h saranno nell'iperbola.

143. 922. Poichè la tangente TMt è divisa in mezzo nel punto M (920), se si conduca MCM', questa retta si chiama *diametro trasverso* o *primo*, il cui *conjugato* o *secondo* è DCd o la tangente TMt, l'ordinate sono mQm' parallele al conjugato DCd, e il parametro è una terza-proporzionale al diametro e al suo conjugato.

FIG. 143.

923. Un diametro divide in mezzo tutte le sue ordinate; poichè NQ : Qn :: TM : Mt ed Nm = $m'n$, se dunque CM = m, CD = MT = n, CQ = x, Qm = y, sarà $m : n :: x : NQ = \frac{nx}{m} = n$Q; onde N$m = \frac{nx}{m} - y$ ed $mn = \frac{nx}{m} + y$: ma TM^2 = Nm × mn (920); dunque $n^2 = \frac{n^2x^2}{m^2} - y^2$, ed $y^2 = \frac{n^2}{m^2}[x^2 - m^2]$, equazione simile a quella delle coordinate all' asse trasverso. Ella dà $x^2 = \frac{m^2}{n^2}(y^2 + n^2)$, onde fatta C$p = x$, $pm = y$, sarà $y^2 = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2)$ come nell' asse conjugato.

924. Sia ora aCA il primo asse dell' iperbola, e rappresenti BA la metà del secondo; condotte DE, TG, MPK perpendicolari a CA, ed ML e tK parallele alla stessa CA, i triangoli MTL, MtK, CDE saranno eguali e simili; fatta dunque CP=u, PM=z, CE=tK=ML=r, MK=DE=TL=s, e CM=m, TM=n, CA=a, AB=b, si avrà TG $(z+s)$: CG $(u+r)$ :: $b : a$ e perciò $az + as = bu + br$: inoltre TL (s) : LM (r) :: MP (z) : PS $= \frac{rz}{s} = \frac{u^2 - a^2}{u}$ (915) $= \frac{a^2z^2}{b^2u}$ (908) onde $r = \frac{a^2sz}{b^2u}$; e sostituendo questo valore nell' equazione $az + as = bu + br$, si ha $(bu - as)(tu - az) = 0$; ma $bu - az = 0$ dà $a : b :: u : z$ il che è sempre assurdo fuorchè nell' infinito; dunque (190) $bu - as = 0$, $bn = as$, onde $az = br$, e quindi $a : b :: u : s :: r : z$, cioè CP : DE :: CE : MP.

925. Dunque 1°. i triangoli CED, CMP sono eguali in superficie: 2°. condotta DM, sarà DMC o $\frac{1}{2}$ CDTM = al trapezio DMPE $= \frac{1}{2}(s+z)(u-r) = \frac{1}{2}(su + uz - sr - rz)$, cioè (poichè $u : s :: r : z$, onde $uz - sr = 0$) $= \frac{1}{2}(su - rz)$; ed essendosi trovato $bu = as$, ed $az = br$, sarà $s = \frac{bu}{a}$, $r = \frac{az}{b}$, e perciò $su = \frac{bu^2}{a}$, $rz = \frac{az^2}{b}$, onde $\frac{1}{2}$CDTM $= \frac{b^2u^2 - a^2z^2}{2ab}$: ma l' equazion dell' iperbola dà $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$ e però $b^2u^2 - a^2z^2 = a^2b^2$; dunque $\frac{1}{2}$ CDTM $= \frac{a^2b^2}{2ab} = \frac{ab}{2}$; dunque *il parallelogrammo* TT' *formato dai diametri conjugati è eguale al rettangolo degli assi*: 3°. DE$^2 = s^2 = \frac{b^2u^2}{a^2} = b^2 + z^2 = b^2 +$ PM^2 (per l' equazione all' iperbola); dunque DE^2 − PM^2 = b^2, 4°. CE$^2 = r^2 = \frac{a^2z^2}{b^2} = u^2 - a^2 =$ CP$^2 - a^2$; dunque CP^2 − CE^2 = a^2; 5°. $a^2 - b^2 =$ CP^2 + PM^2 − DE^2 − CE^2 = CM^2 − CD^2,

FIG. 143. però *la differenza dei quadrati di due diametri conjugati è eguale alla differenza de' quadrati dei due assi:* onde nell' iperbola equilatera, qualunque diametro eguaglia il suo conjugato.

926. I. Dati gli assi a, b d'un' iperbola, trovar due diametri conjugati che faccian tra loro il dato angolo $p = DCM$. Abbiamo $mn \, sen \, p = ab$ ed $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$, che danno m ed n; e per trovar la direzione di un de' diametri o l'angolo MCP che chiamo c, il triangolo CMP dà (759) $MP = m \, sen \, c$; dunque essendo (924) $b : a :: MP : CE$, sarà $CE = \frac{am \, sen \, c}{b}$; ma nel triangolo DCE (757) si ha $CE = n \cos(p+c)$; dunque $\frac{am}{bn} sen \, c = cos \, p \, cos \, c - sen \, p \, sen \, c$ (703), e perciò $\frac{sen \, c}{cos \, c} = tang \, c = \frac{bn \, cos \, p}{am + bn \, sen \, p}$: e poichè $a = \frac{mn \, sen \, p}{b}$, sarà $tang \, c = \frac{b^2 \, cot \, p}{m^2 + b^2}$.

II. Dati i semidiametri conjugati m, n d'un' iperbola e l' angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Ciò potrebbe aversi con le due equazioni e col raziocinio del passato problema: è però più semplice l'usare gli asintoti. Per l'estremità M del primo diametro CM condotta TMt che farà con MQ l'angolo $TMQ = p$, e presa $TM = Mt = n$, si condurranno CT, Ct: quindi diviso l'angolo TCt in mezzo con CA, si avrà la direzione del primo asse.

Quadratura delle Sezioni Coniche

927. Essendo assai difficile e forse qualche volta impossibile di trovar la quadratura esatta di molti spazj curvilinei, se ne è cercata l'approssimata. Vogliasi quella dello spazio circolare CBMP compreso tra il raggio CB, l'ordinata $MP = y$ parallela al raggio, l'arco BM, e l'ascissa $CP = x$. Formati sulla x dei rettangoli Ch, qf, gi ec. che abbiano basi eguali ed infinitesime Cq, qg, gl ec. e fatto $BC = a$, $Cq = qg = gl =$ ec. $= e$, l'espressione dei piccoli rettangoli Ch, qf, gi ec. sarà ey: ma $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (565); dunque preso successivamente $x = e$, $= 2e$, $= 3e$ ec., sarà la somma di tutti i rettangoli o lo spazio $CBMP = e\sqrt{(a^2 - e^2)} + e\sqrt{(a^2 - 4e^2)} + e\sqrt{(a^2 - 9e^2)} +$ ec.; e sviluppando queste espressioni (180) si trova

FIG. 144.

$$e\sqrt{(a^2 - e^2)} = 1.ae - 1.\frac{e^3}{2a} - 1.\frac{e^5}{8a^3} - 1.\frac{e^7}{16a^5} \text{ ec.}$$

$$e\sqrt{(a^2 - 4e^2)} = 1.ae - 2^2.\frac{e^3}{2a} - 2^4.\frac{e^5}{8a^3} - 2^6.\frac{e^7}{16a^5} \text{ ec.}$$

$$e\sqrt{(a^2 - 9e^2)} = 1.ae - 3^2.\frac{e^3}{2a} - 3^4.\frac{e^5}{8a^3} - 3^6.\frac{e^7}{16a^5} \text{ ec.}$$

ec. ec. ec.

onde sommando, si avrà $CBMP = ae(1+1+1+\text{ec.}) - \frac{e^3}{2a}(1^2+2^2+3^2+\text{ec.}) - \frac{e^5}{8a^3}(1^4+2^4+3^4+\text{ec.}) - \frac{e^7}{16a^5}(1^6+2^6+3^6+\text{ec.}) - \frac{5e^9}{128a^7}(1^8+2^8+3^8+\text{ec.}) - \text{ec.}$: ma il numero dei rettangoli componenti lo spazio cercato, ovvero il numero dei termini di queste serie è la quantità infinita $n = \frac{x}{e}$ (36); dunque poichè, essendo n infinito, si ha $1^m + 2^m + 3^m \ldots\ldots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$ (336), sarà $1+1+1$ ec. $= 1^0 + 2^0 + 3^0 \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^0 = \frac{x}{e}$; $1^2+2^2+3^2\ldots+\left(\frac{x}{e}\right)^2 = \frac{x^3}{3e^3}$; $1^4+2^4+3^4\ldots+\left(\frac{x}{e}\right)^4 = \frac{x^5}{5e^5}$ ec., e lo spazio cercato $CBMP = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \text{ec.}$ FIG. 144.

928. Se $x = a$, si avrà la quarta parte AMBC del circolo: e se dallo spazio CBMP si sottragga il triangolo $CMP = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}$, si avrà il settore BMC, la cui espressione divisa per $\frac{a}{2}$ (605), dà l'arco $BM = x + \frac{x^3}{2.3a^2} + \frac{3x^5}{2.4.5a^4} + \text{ec.}$ (732).

929. Sia ora lo spazio ellitico CBMP compreso tra il semiasse conjugato $CB = b$, l'ordinata $MP = y$, l'ascissa $CP = x$, e l'arco MB: poichè si ha $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$, ragionando come per il circolo, si trova questo spazio $= \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \text{ec.}\right)$. Ora se si descrive una semicirconferenza ANB'a il cui raggio sia a, si avrà lo spazio $CB'NP = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \text{ec.}$; dunque $CBMP : CB'NP :: b : a :: AMP : ANP$: onde la superficie dell' ellisse sta a quella del circolo costruito sopra il suo asse trasverso $:: b : a$. Ora la superficie di questo circolo è $= a^2\pi$ (606); dunque la superficie dell' ellisse intera $= ab\pi$, cioè è eguale alla superficie d' un circolo il cui diametro sia medio-proporzionale tra gli assi dell' ellisse. Si vede ancora che un settore qualunque SAM sta al settor circolare corrispondente $SAN :: b : a$, poichè i triangoli SPM, SNP stanno fra loro $:: PM : PN :: b : a$. 145.

930. Per quadrar lo spazio parabolico AMP, sia $AP = x$, $PM = y$, il parametro $= p$, una porzione infinitesima dell' ascissa $= e$; si troverà collo stesso raziocinio di sopra, lo spazio $APM = e\sqrt{pe} + e\sqrt{2pe} + e\sqrt{3pe} + \ldots + e\sqrt{px} = e\sqrt{pe}\,[1^{\frac{1}{2}} +$ 146.

FIG. 146. $2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{2}}] = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{px} = \frac{2}{3} xy.$
Dunque lo spazio parabolico AMP è due terzi del rettangolo circoscritto APMN, e perciò lo spazio AMN ne è il terzo.

931. Resta a trovar la quadratura dell' iperbola. Riferendo le coordinate CP, PM (x, y) al second' asse CB, si avrà $y = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 + x^2)}$, e fatto lo stesso calcolo che nel circolo, sarà lo spazio ACPM $= \frac{a}{b}\left(bx + \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} + \frac{x^7}{112b^5} - \text{ec.}\right)$, con che si trova lo spazio AMQ. (FIG. 147)

932. Se l' iperbola è equilatera, si ha $b = a$, e la serie diventa $bx + \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} + \text{ec.}$ Vi è dunque la stessa analogìa trall' iperbola equilatera ed un' iperbola qualunque che tra il circolo e l' ellisse; di modo che la quadratura d' una sola iperbola darebbe subito quella di tutte l' altre.

933. Sia ora CQ l' asintoto dell' iperbola AM, $CD^2 = AD^2 = m^2$, MP ordinata a CQ o parallela all' altro asintoto CO, e si voglia la quadratura dello spazio asintotico ADPM, supponendo l' angolo degli asintoti retto. Pongo DP $= x$, PM $= y$ ed una parte infinitesima dell' ascissa $= e$; l' ordinata corrispondente ad essa verso D sarà $y = \frac{m^2}{m+e}$ (918), e il primo rettangolo avrà per espressione $\frac{em^2}{m+e}$, il secondo $\frac{em^2}{m+2e}$ ec. Dunque lo spazio ADMP $= em^2\left(\frac{1}{m+e} + \frac{1}{m+2e} + \frac{1}{m+3e} + \frac{1}{m+4e} + \text{ec.}\right)$. E riducendo in serie queste frazioni (324), avremo ADMP $= em\left(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + \frac{x^0}{e^0}\right) - e^2\left(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \frac{x}{e}\right) + \frac{e^3}{m}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + \frac{x^2}{e^2}\right) - \text{ec.} = em \times \frac{x}{e} - e^2 \times \frac{x^2}{2e^2} + \frac{e^3}{m} \times \frac{x^3}{3e^3} - \text{ec.} = mx - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3m} - \text{ec.} = m^2\left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \text{ec.}\right) = m^2 \, Log.\left(1 + \frac{x}{m}\right)$ (354) $= m^2 \, Log. \frac{m+x}{m}$; e fatta $m + x = z$, sarà ADMP $= m^2 \, Log \frac{z}{m}$, o se l' angolo degli asintoti in vece d' esser retto sia in generale a, ADMP $= m^2 \, sen\, a \, Log \frac{z}{m}$ (758). (FIG. 148)

934. Se l' iperbola è equilatera e la potenza $m^2 = 1$, allora ADMP $= Log\, z$, logaritmo naturale dell' ascissa CP $= m +$

$x = z$; ed ecco perchè chiamansi logaritmi iperbolici quelli il cui modulo è 1. Questo stesso spazio sarebbe il logaritmo ordinario dell'ascissa CP, se l'angolo degli asintoti fosse di 25°, 44', 25": infatti chiamato A il modulo 0.43429448 ec. sarà $m^2 \, sen \, a \, Log \frac{z}{m} = A Log \, z$ (358), e poichè $m = 1$, verrà $sen \, a =$ A $= 0.43429448$ ec. che nelle Tavole risponde a 25°, 44', 25".

935. Se sull'asintoto d'un'iperbola si prende una serie d'ascisse in proporzion geometrica $\div z : qz : q^2z$ ec., l'aree corrispondenti ne formeranno una aritmetica $\div m^2 \, sen \, a \, Log \frac{z}{m} :$ $m^2 \, sen \, a \, Log \frac{z}{m} + m^2 \, sen \, a \, Log \, q : m^2 \, sen \, a \, Log \frac{z}{m} + 2m^2 \, sen \, a \times$ $Log \, q$ ec. Onde quando l'ascisse sono in progression geometrica, le differenze dell'aree asintotiche sono eguali; e poichè la progression dell'ascisse può continuarsi all'infinito, lo spazio racchiuso tra l'iperbola e il suo asintoto è infinitamente grande.

Per determinare due spazj iperbolici ADPM, ADQN nella ragione $p : q$, fatta $CP = z$, $CQ = x$, si avrà $m^2 \, sen \, a \, Log \frac{z}{m} :$ $m^2 sen \, a Log \frac{x}{m} :: p : q :: Log \frac{z}{m} : Log \frac{x}{m}$; onde $q \, Log \frac{z}{m} = p \, Log \frac{x}{m}$, ovvero $Log \left(\frac{z}{m}\right)^q = Log \left(\frac{x}{m}\right)^p$, ed $x = \sqrt[p]{(z^q m^{p-q})}$.

ALTRE CURVE.

Oltre le Sezioni Coniche, Curve di tanto uso in Geometria, ve ne sono più altre di cui è bene il far menzione.

936. 1°. La Concoide di Nicomede. Se per un punto B preso fuori di una retta GH, si conducano delle rette BQM, BAD ec. tali che le parti QM, AD ec. sieno eguali, la curva MDM' che passa per i punti M, D ec. si chiama *Concoide*. Il punto B è il *polo*, la retta GH la *direttrice*, e prese sotto GH le parti eguali Qm, Ad ec. la curva mdm' è la concoide *inferiore* o la parte inferiore d'una stessa concoide. Onde 1°. GH ne è l'asintoto; 2°. Dd normale a GH ne misura la massima larghezza; 3°. se BA > dA, la curva è qual si vede alla fig. 149.; se BA < dA, ha un *nodo* $Bndn'$, e allora si chiama concoide *annodata*; se BA $= d$A, il nodo svanisce e resta un punto di regresso in B. (149. — 150. e 151.)

937. Per saper se la concoide è curva algebrica, si conduca PM perpendicolare ad AP e sia $AD = QM = a$, $AB = b$, $AP = x$, $PM = y$; si avrà PQ : PM :: AQ : AB, ovvero $\sqrt{(a^2 - y^2)} : y :: x - \sqrt{(a^2 - y^2)} : b$ onde $xy = (b + y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$, equazione alla concoide superiore: lo stesso calcolo dà $xy =$ (149.)

FIG. $(b-y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ per l'inferiore, e l'equazione è la stessa per l'annodata; e se si facesse $x = AP$ ed $y = RM$, si verrebbe

149. a cangiare x in y ed y in x, e l'equazione sarebbe $xy = (b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$; dunque la curva è algebrica del terz'ordine. Essa può descriversi con la continua intersezione d'una riga BCM mobile intorno a B, e d'un circolo descritto col raggio

152. $CM = a$, che si farà muovere in modo che il centro C sia sempre in HG; basta allora che la riga passi costantemente per il centro del circolo.

938. Possono anzi formarsi infinite concoidi differenti sostituendo al circolo una curva qualunque CM e al centro di

153. esso un punto fisso Q dell'asse di lei. Troviamone l'equazione. Condotte MP, AB perpendicolari alla direttrice, e fatta $AP = x$, $PM = y$, $CP = z$, $CQ = a$, $AB = b$, sarà $PQ(z-a)$: $PM(y)$ :: $AQ(x+a-z)$: $AB(b)$; onde $z = a + \frac{xy}{b+y}$, valore che sostituito nell'equazione della curva CM, dà quella della concoide MD. Per esempio, se la curva CM è un circolo il cui centro sia Q, si ha $y^2 = 2az - z^2$, che dà $xy = (b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ come sopra: e se la curva CM è una parabola dell'equazione $y^2 = pz$, allora $y^3 + by^2 - apy - apb = pxy$ è l'equazion della concoide parabolica, di cui fece uso Cartesio per risolvere un'equazion generale del sesto grado.

154. 939. II°. La Cissoide di Diocle. Sia il circolo ANBn col diametro AB. Se condotta la tangente QBq al punto B e le rette AQ a varj punti di essa, si prenda $QM = AN$, la curva MAm che passa per i punti M, m così determinati, si chiama *Cissoide*.

940. Per trovarne l'equazione, conduco OM parallela ad AP, ed MP, NG perpendicolari; fatta $AP = x$, $PM = y$, e $AB = a$ diametro del circolo *genitore*, essendo $AN = MQ$, sarà $AG = PB$, ed $AG(a-x)$: $GN(\sqrt{[ax-x^2]})$ :: $AP(x)$: $PM(y) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ onde $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, equazione cercata (872).

941. Di qui si vede 1°. che quando $x = 0$, anche $y = 0$, e però la curva passa per l'origine dell'ascisse; 2°. che se $x = \frac{1}{2}a$, si ha $y = \pm\frac{1}{2}a$, cioè i due rami della cissoide tagliano la circonferenza a distanze eguali da A e B; 3°. che se $x = a$, y è infinita, e che perciò BQ è l'asintoto della curva ec. (872).

155. 942. III°. La Logaritmica. Preso un punto A sull'indefinita HG e alzate dell'ordinate PM che abbian per logaritmi le loro ascisse AP, la curva BMm che passa per l'estremità di queste ordinate, dicesi *Logaritmica*. Sia $AP = x$, $PM = y$, $A =$ al modulo, $e = 2{,}7182818$ il cui logaritmo iperbolico è 1 (361); sarà $x = Aly = xle$, onde $y^A = e^x$, che dà $y = e^{\frac{x}{A}}$, equazion della logaritmica. Ella mostra 1°. che questa curva

è trascendente (875): 2°. che l'ascisse x, x' della stessa ordinata y in diverse logaritmiche, o i logaritmi dello stesso numero in diversi sistemi, son come i moduli A, A'; 3°. che quando $x = 0$, si ha $y = 1 = AB$; 4°. che se $x = AE = AB = 1$, si ha $y = EF = e^{\frac{1}{A}}$, e però se in $y = e^{\frac{x}{A}}$, ad $e^{\frac{1}{A}}$ si sostituisca $EF = a$, sarà sempre $y = a^x$: onde se l'ascisse forman la progressione aritmetica ÷ 1,2,3,4, ec., l'ordinate formeranno la geometrica ∺ a^1, a^2, a^3, a^4 ec. e però la logaritmica va all'infinito di là da AP. Ma prese verso AQ l'ascisse negative $x = -1$, -2 ec., l'ordinate diverranno $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}$ ec., cioè la curva ha un ramo infinito BO di cui la direttrice o asse GH è l'asintoto.

943. La suttangente PT della logaritmica è sempre d'una stessa grandezza: poichè condotta l'ordinata mp infinitamente vicina ad MP se sia Mr parallela all'asse e si faccia $Pp = f$, $mr = i$, sarà $x + f = Al(y + i) = Al\left[y\left(1 + \frac{i}{y}\right)\right] = Aly + A\left(\frac{i}{y} - \frac{i^2}{2y^2} + \frac{i^3}{3y^3} - \text{ec.}\right)$ (347. 354); onde poichè $x = Aly$, sarà $f = A\left(\frac{i}{y} - \frac{i^2}{2y^2} + \frac{i^3}{3y^3} - \text{ec}\right)$: ma essendo i infinitesima, le potenze i^2, i^3 ec. debbon rigettarsi, dunque $\frac{fy}{i} = A$: ma $mr : rM :: MP : PT = \frac{fy}{i}$; dunque $PT = A$, cioè *la suttangente è sempre eguale al modulo*.

944. IV°. La Cicloide. Se un circolo AG giri sopra una retta Aa finchè il punto che toccava sul principio questa retta in A, la tocchi un'altra volta in a, questo punto descriverà una curva chiamata *Cicloide* o *Trocoide*. Ella è *ordinaria* quando il circolo *genitore* non ha altro moto che quello della sua rivoluzione: ma se ha di più un moto di traslazione o nel medesimo senso o in senso contrario, ella è o *accorciata* o *allungata*. Nell'ordinaria la *base* Aa eguaglia la circonferenza del circolo genitore; è più corta nell'accorciata, maggiore nell'allungata. Il diametro BC del circolo genitore si chiama *asse* della cicloide quando è normale al mezzo della sua base: il punto B è il suo *vertice*, e BC la sua altezza maggiore.

(FIG. 156. 157 e 158.)

945. Posto ciò, condotte MP normale a BC, e le corde eguali MF, OC, avremo FC = MO; dunque poichè FC = AC − AF = BIOC − FKM = BIOC − OLC = BIO, la parte MO dell'ordinata MP è sempre eguale all'arco corrispondente BIO del circolo genitore. Inoltre il resto OP è il seno del medesimo arco; dunque chiamando MP (y), BIO (u), si avrà per equazione alla cicloide ordinaria, $y = u + \text{sen}\, u$. Per generalizzar-

(FIG. 156.)

156. la si farà $MO = \frac{b}{a}$ BIO, il che conviene alla cicloide o ordinaria o accorciata o allungata, secondo che b è eguale o minore o maggiore di a, e si avrà $y = \frac{b}{a} u + sen\, u$. La cicloide è dunque una curva trascendente (875).

159. 946. Per condurre al punto M la tangente MT, immaginiamo l'arco infinitesimo Mm, l'ordinata mp, e la piccola retta Mr parallela ad OT tangente nel punto O del circolo genitore. Avremo dunque $MO = \frac{b}{a}$ BIO, ed $mo = \frac{b}{a}$ BIo onde $mr = \frac{b}{a} Oo$; ma $mr : rM :: MO : OT = \frac{MO \times Mr}{\frac{b}{a} Oo} = \frac{a}{b} MO = BIO$; bisogna dunque prender sulla tangente del circolo la parte OT = BIO, e condur per i punti M, T la retta MT che sarà la tangente della cicloide o ordinaria o accorciata o allungata. Nella prima però la costruzione può farsi più semplice; poichè essendo MO = BIO = OT, si ha l'angolo TOP = 2BOP (504. 505) = 2TMO (511), onde BOP = TMO, ed MT *parallela alla corda* OB, *è tangente nel punto* M *della cicloide ordinaria*.

947. Conducansi ora l'indefinita BQQ' normale, e le Qq, $Q'm$ parallele all'asse BC: si avrà per i triangoli simili $mq : qM :: Q'Q : Pp :: OP : PB$; dunque $Q'Q \times BP = Pp \times OP$, ovvero $MmQ'Q = PpoO$: perciò lo spazio circolare BIOP = BQM. ed il semicircolo BOCB = BDAMB: ma il rettangolo AB nella cicloide ordinaria è quadruplo di questo semicircolo; dunque *lo spazio cicloidale è triplo del circolo genitore*.

948. Se il punto per descriver la cicloide si prenda dentro o fuori della circonferenza, la curva descritta sarà un'altra specie di cicloide; e se il circolo si faccia girare sulla circonferenza d'un altro circolo, la curva descritta da uno de' suoi punti, sarà un' *Epicicloide*.

160. 949. V°. La Quadratrice di Dinostrato. Se la retta AG tangente al circolo in A si muova uniformemente e parallelamente a se stessa lungo il diametro Aa mentre il raggio AC gira uniformemente intorno al centro C verso il punto E, in modo che AG e AC si confondano con CE nel momento stesso; l'intersezione continua di queste due rette dà la curva AMD, chiamata *Quadratrice*, dalla cui descrizione segue che uno spazio qualunque AP percorso dalla retta AG sta all'arco circolare AB descritto nel tempo stesso dall'estremità del raggio, come un altro spazio AC percorso da quella retta, all'arco corrispondente ABE descritto dal raggio. Fatta dunque $AP = x$, $PM = y$, $AB = u$, $AC = r$, $ABE = 90° = c$, si avrà 1°. $x : u :: r : c$, onde $u = \frac{cx}{r}$; 2°. CP : PM :: CA : AG, ov-

FIG.

vero $r-x:y::r:tang\,u$, onde $y=\frac{r-x}{r}\,tang\,\frac{cx}{r}$, equazione alla quadratrice quando l'origine dell'ascisse è in A.

160.

950. Se sia in C, cangio x in $r-x$, ed ho $u=c-\frac{cx}{r}$ ed $y=\frac{x}{r}\,tang\left(c-\frac{cx}{r}\right)=(721.693)\,\frac{x}{r}\,cot\,\frac{cx}{r}=(727)\,\frac{r^2}{c}-\frac{cx^2}{3r^2}-\frac{c^1x^4}{3^2\cdot5r^6}-$ ec. perchè quì il raggio non è 1 ma r (727): onde quando $x=0$, sarà $y=\text{CD}=\frac{r^2}{c}$, e però se si conoscesse la *base* CD della quadratrice, si avrebbe subito la quadratura del circolo; di quì è venuto il nome alla curva.

951. Se sia descritto col centro C e raggio CD il quadrante DLK, sarà (594) $\frac{r^2}{c}:\text{DLK}::r:c$; dunque $\text{DLK}=r=\text{CA}$. Così $\text{PC}=$ all'arco LD, perchè $\frac{r^2}{c}:\text{KL}::r:u$; onde $\text{KL}=\frac{ru}{c}=r-x$ (950) $=\text{AP}$, e $\text{PC}=\text{LD}$.

952. Prese le ascisse negative AP', e sostituito il loro valore nella prima equazione, avremo $y=-\frac{(r+x)}{r}\,tang\,\frac{cx}{r}$, che dà l'ordinate negative P'M'. Quindi la curva ha un ramo AM', di cui la retta QN condotta alla distanza $\text{AQ}=r$, è l'asintoto; poichè fatto $x=r$, viene $y=-2\infty$.

Ben si vede 1°. che la retta AG e il raggio CA seguitando a muoversi dopo essersi confusi in CE, formano la parte D*a* della quadratrice; 2°. che se la curva fosse geometrica, si avrebbe qualunque angolo d'un dato numero di gradi, come di $\frac{90^\circ}{m}$, bastando dividere AC in P onde $\text{AP}:\text{AC}::1:m$, e condur l'ordinata PM e il raggio CB; l'angolo ACB sarebbe $=\frac{90^\circ}{m}$, poichè $x:r::u:c::1:m$.

953. VI°. La Spirale d'Archimede. Si chiama così la curva CKMA descritta da un punto C che si muove uniformemente lungo il raggio CA, mentre il raggio stesso si muove uniformemente intorno al centro C, in maniera che quando il raggio ha percorsa la circonferenza intera, questo punto si trovi confuso col punto A. Se prolungato il raggio CA, gli si faccia fare una seconda rivoluzione, mentre il punto C continua ad allontanarsi dall'origine del suo movimento, si descriverà una *seconda spirale*, poi una *terza* ec., o piuttosto queste spirali saranno una sola curva le cui rivoluzioni possono accrescersi in infinito.

161.

954. Posto ciò, l'ordinata CM (y): raggio CA (a):: arco ADBN, ascissa corrispondente (x): circonferenza ADBNA (π);

161. dunque l'equazione alla spirale d'Archimede è $y = \frac{ax}{\pi}$; onde 1°. la curva è trascendente; 2°. passa per il centro C, poichè $x = 0$ dà $y = 0$; 3°. passa altresì per A, poichè $x = \pi$ dà $y = a$; 4°. fatto $x = \pi + x'$, l'equazione diventa $y = a + \frac{ax'}{\pi}$, e perciò dati ad x' i valori che son tra 0 e π, la spirale fa una seconda rivoluzione che termina all'estremità d'un raggio doppio del primo; e ne fa una terza, una quarta ec. se $x = 2\pi + x''$, $x = 3\pi + x'''$ ec.

955. Per condur la tangente MT al suo punto M, immagino il raggio C*mn* infinitamente vicino al raggio CMN, e descritto un circolo col raggio CM, conduco CT perpendicolare a CM; i triangoli simili *mr*M, MCT danno $mr : rM :: MC : CT = \frac{MC.rM}{mr}$; ma $MC = y = \frac{ax}{\pi} = \frac{a}{\pi}$ ADBN, e $Cm = \frac{a}{\pi}$ADB*n*; dunque $Cm - CM$ ovvero $mr = \frac{a}{\pi}$ N*n*; e poichè (594) $a : y :: Nn : Mr = \frac{y.Nn}{a}$, avremo $\frac{Mr}{mr} = \frac{\pi y}{a^2} = \frac{x}{a}$, e $CT = \frac{x}{a} MC = \frac{xy}{a}$; ma $a : y :: x : OEQM = \frac{xy}{a}$; dunque la suttangente CT dovrà prendersi eguale all'arco circolare OEQM.

162. 956. VII°. La Spirale Parabolica. Presa sopra un raggio CN una media proporzionale NM tra l'arco AN e una retta data p, la curva che passerà per i punti M determinati così, sarà la *Spirale Parabolica*. Sia dunque $AN = x$, $CM = y$, $AC = a$, ed avremo $y = a - \sqrt{px}$, equazione in cui sostituendo $\pi + x$, $2\pi + x$ ec. in luogo di x, troviamo che questa curva può fare un'infinità di rivoluzioni intorno al centro C, e che perciò è del numero delle spirali.

163. 957. VIII°. La Spirale Iperbolica. Suppongo che dal punto C preso per centro sull'indefinita CP si descrivano degli archi AG, QM, PO ec. eguali in lunghezza, e che per le loro estremità G, M, O ec. si faccia passare una curva CKGMO. Questa sarà una *Spirale Iperbolica*; e ben si vede che presa $CB = AG = QM = PO$ ec. ed alzata BR parallela a CP, ella ne sarà l'asintoto, perchè può solamente incontrarla quando il raggio CM sia infinito.

958. Sia il raggio $CA = a$, $AN = x$, $CM = y$, $AG = QM$ ec. $= b$; si avrà $x : b :: a : y$, onde $xy = ab$. Ora chiamata π la circonferenza il cui raggio $= a$, e sostituiti ad x dei valori $\pi + x$, $2\pi + x$ . . . $m\pi + x$, si avrà successivamente $y = \frac{ab}{\pi + x}$, $y = \frac{ab}{2\pi + x}$ . . . $y = \frac{ab}{m\pi + x}$; onde crescendo l'ascissa scema l'ordinata, la quale diviene zero sol quando m è infi-

nita; dunque *la spirale iperbolica fa un' infinità di giri intorno al centro prima di giungervi*.

959. Cerchiamo la suttangente CT. Condotta Crm infinitamente vicina a CM, l'arco mq, e CT perpendicolare a CM che incontri in T la tangente TM, chiamo $Qq = rm = i$, ed ho $y + i : b :: y : Qr = \frac{by}{y+i}$; dunque $rM = b - \frac{by}{y+i} = \frac{bi}{y+i}$: ma $rm : rM :: mC : CT$; dunque $i : \frac{bi}{y+i} :: y + i : CT = b$; onde *nella spirale iperbolica la suttangente è costante come nella logaritmica* (945). 163.

960. IX°. La Spirale Logaritmica. Si chiama *Spirale Logaritmica* la curva che taglia sotto uno stesso angolo tutti i raggi CM condotti dal suo centro C, cosicchè la tangente MT fa sempre un angolo stesso col raggio CM. Questa curva ha molte proprietà che non possono ben dettagliarsi senza il calcolo differenziale ed integrale. 164.

961. Curve a doppia curvatura. Se sopra la curva aB si alzassero dell'ordinate ST normali al piano aBC in modo che la relazione tra l'ascisse o archi $aS = s$ e l'ordinate $ST = z$ fosse espressa da un'equazione, la linea aQ che passasse per tutti i punti T, sarebbe curva in due sensi, e perciò direbbesi *Curva a doppia curvatura*: ma poichè questa nuova maniera di concepir tali curve (che per altro ci sarà utile altrove) non dà facilmente la relazione finita tra s e z, ecco come d'ordinario si concepiscono. Se sopra le curve aB, aN descritte con la stessa origine a nei piani DaC delle x, y e DaH delle y, z (867), si intendano alzarsi normalmente e segarsi due superficie curve, la loro comun sezione aQ sarà una *Curva a doppia curvatura*, e le curve generatrici aB, aN che scambievolmente sarebbero generate da lei conducendo da ogni suo punto le normali TS, TV sui piani DaC, DaH, si chiamano *curve di projezione*, alle quali se ne può aggiungere una terza che si formerebbe nel modo stesso sul piano CaH delle x, z. Onde 1°. la curva a doppia curvatura non può descriversi in un piano: 2°. i suoi punti son determinati da due delle tre curve di projezione, le cui equazioni perciò esprimono la natura della curva e danno il modo di descriverla. Sieno aB, aN due parabole dell'equazioni I. $y^2 = px$, II. $z^2 = qy$; posto nella II. il valor di y preso dalla I., verrà III. $z^4 = pq^2x$, equazione della curva di projezione sul piano delle x, z: dalla I. si ha $y = \sqrt{px}$, dalla III. $z = \sqrt[4]{pq^2x}$, onde dati ad x diversi valori, se ne hanno altrettanti per y e per z, e si descrive la curva aQ. 156.

962. Date ora due superficie curve con le stesse coordinate x, y, z, se ne avrà la comun sezione o la curva a doppia curvatura sol che dall'equazioni alle superficie si deducan quelle di due delle tre curve di projezione. Sieno date le superficie d'un solido parabolico e d'un cono retto che col ver-

tice stesso abbian gli assi delle x e delle y scambievolmente normali: dalle loro equazioni (867) I. $px = y^2 + z^2$, II. $\frac{a^2y^2}{b^2} = x^2 + z^2$ (cangiato nel cono x in y, ed y in x come esige il dato) si ha III. $\frac{a^2y^2}{b^2} = x^2 + px - y^2$, IV. $\frac{a^2(px - z^2)}{b^2} = x^2 + z^2$, equazioni alle curve di projezione (un' iperbola ed un' ellisse) che determinano la curva cercata a doppia curvatura. E' chiaro 1°. che se la III. o IV. sieno impossibili o si riducano ad un sol punto, non si avrà comun sezione e perciò nemmen curva: 2°. che se sostituito nella II. il valor di z preso non più dalla I. ma dall' equazion generale d' un piano $Ax + By + Cz + D = o$ (867), possan determinarsi A, B, C, D in modo che come prima ne risulti la III., non sarà la sezione una curva a doppia curvatura, ma una curva semplice che potrà descriversi sul piano dell' equazion determinata $Ax + By + Cz + D = o$.

LUOGHI GEOMETRICI.

Costruendo l' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ si trovò (868) che ne risultava un circolo: questo circolo si chiama il *Luogo Geometrico* dell' equazione $y^2 = 2ax - x^2$.

963. In generale *il luogo d' un' equazione è la linea descritta secondo il rapporto delle* x *e delle* y *che l' equazione contiene*, rapporto che somministra le costruzioni geometriche dell' *equazioni indeterminate*; così si chiamano tutte l' equazioni a due variabili, e se ne distinguono i gradi dalle più alte potenze di queste variabili. Cominciamo dal primo grado.

964. Ogni equazione di questo genere può esser rappresentata da $ay = bx + cm$, cioè $y = \frac{bx}{a} + \frac{cm}{a}$: si tratta di trovarne il luogo geometrico. Sia $AP = x$ la linea dell' ascisse di cui pongo l' origine in A; sia PM un' ordinata y che faccia con AP un angolo dato APM. Presa ora sopra AP una determinata $AB = a$ e parallelamente a PM condotta $BD = b$, i triangoli simili ABD, APN daranno $a : b :: x : PN = \frac{bx}{a}$; dunque se la data equazione fosse $y = \frac{bx}{a}$, la linea AN sarebbe il luogo cercato. Ma poichè il secondo membro ha di più $\frac{cm}{a}$, le PN debbono essere accresciute di questa quantità: perciò alzata sopra AP parallelamente a PM una $AE = \frac{cm}{a}$ e condotta per E l' indefinita M'M parallela ad AN, sarà PM =

165.

$y = PN + NM = \frac{bx}{a} + \frac{cm}{a}$, onde la retta M'M è il luogo della data equazione. Se $\frac{cm}{a}$ fosse negativa, le PN dovrebbero diminuirsi di questa quantità, il che si fa conducendo AE' sotto ad AP e per E' una parallela MM'' ad AN, ed MM'' è il luogo dell'equazione $y = \frac{bx}{a} - \frac{cm}{a}$: la parte OM corrisponde al valor positivo di y, e il suo prolungamento OM'' a quello di $-y$; onde può concludersi in generale che *la linea retta è il luogo geometrico di tutte l'equazioni indeterminate del primo grado*. 165.

965. Quelle del secondo posson tutte ridursi alla formula
$$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + f = 0$$
la cui costruzione dà la natura delle curve espresse da equazioni del secondo grado, qualunque sia l'angolo delle coordinate. Risolvo pertanto quest' equazione, presa y per incognita (201), e poi fatto $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$, trovo $u^2 + (b - \frac{a^2}{4})x^2 + (c - \frac{ad}{2})x + f - \frac{d^2}{4} = 0$. Or per costruir l'equazione $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$, supposte le coordinate $AP = x$, $PM = y$ nel dato angolo, conduco $AB = \frac{1}{2}d$ parallela a PM (sotto AP se d è positivo), e per mezzo di BO parallela ad AP ottengo $MO = y + \frac{1}{2}d$. Sopra BO prendo ad arbitrio $BE = 1$, e condotta $EF = \frac{1}{2}a$ parallela a PM, e per B ed F l'indefinita BFN, i triangoli simili BEF, BON danno $ON = \frac{1}{2}ax$, e perciò $MN = u$. Ma le coordinate $AP = x$, $MN = u$ non sono in angolo tra loro come bisogna; e però per ridurvele, sia $BN = z$ e la retta nota $BF = n$ (764); si avrà $n : 1 :: z : x = \frac{z}{n}$, ed $u^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\frac{z^2}{n^2} + \left(c - \frac{ad}{2}\right)\frac{z}{n} + f - \frac{d^2}{4} = 0$. Quì può accader 1°. che $b = \frac{a^2}{4}$, nel qual caso $y^2 + axy + bx^2$ è un quadrato perfetto; 2°. che $b > \frac{a^2}{4}$; 3°. che $b < \frac{a^2}{4}$: sicchè questa equazione è suscettibile delle tre seguenti forme, I. $u^2 - gz + r = 0$, II. $u^2 + gz^2 - rz - s = 0$, III. $u^2 - gz^2 - rz - s = 0$. 166. 167. 168. 169.

966. Onde 1°. se nella I^a. $u^2 = gz - r = g\left(z - \frac{r}{g}\right)$ si faccia $z - \frac{r}{g} = t$, sarà $u^2 = gt$, equazione alla parabola (882) che col parametro g, coll'angolo MNC delle coordinate, e coll'origine C del diametro, determinata dal caso di $t = 0$ che 166.

FIG.

166.

dà $z = \frac{r}{g} = BC$, facilmente si descrive (889): 2°. se nella II^a. $u^2 + gz^2 - rz - s = \frac{u^2}{g} + z^2 - \frac{rz}{g} - \frac{s}{g} + \frac{r^2}{4g^2} - \frac{r^2}{4g^2} = 0$ si faccia $z^2 - \frac{rz}{g} + \frac{r^2}{4g^2} = t^2$, sarà $u^2 = g\left(\frac{r^2 + 4gs}{4g^2} - t^2\right)$, equazione all'ellisse che paragonata all' altra (903) $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, dà $\frac{n^2}{m^2} = g$, ed $m^2 = \frac{r^2 + 4gs}{4g^2}$, onde $m = \frac{1}{2g}\sqrt{(r^2 + 4gs)} =$ CD ed $n = m\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g} + 4s\right)} = CG$, coi quali semidiametri e col centro C determinato dal caso di $t = 0$ da cui si ha $z = \frac{r}{2g} = BC$, è facile descriver la curva (905): 3°. se nella III^a. $\frac{u^2}{g} - z^2 - \frac{rz}{g} - \frac{s}{g} - \frac{r^2}{4g^2} + \frac{r^2}{4g^2} = 0$ si faccia $z^2 + \frac{rz}{g} + \frac{r^2}{4g^2} = t^2$, sarà $u^2 = g\left(t^2 + \frac{4gs - r^2}{4g^2}\right)$, equazione all' iperbola il cui centro C è determinato dal caso di $t = 0$ da cui si ha $z = -\frac{r}{2g} = BC$; e quanto ai semidiametri, se $4gs > r^2$, paragonata l' equazione alla sua analoga (923) $y^2 = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2)$, avremo $n = \frac{1}{2g}\sqrt{(4gs - r^2)}$ ed $m = \frac{1}{2}\sqrt{\left(4s - \frac{r^2}{g}\right)}$: ma se $4gs < r^2$, l' equazione di confronto sarà (923) $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$ che dà $m = \frac{1}{2g}\sqrt{(r^2 - 4gs)}$ ed $n = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r^2}{g} - 4s\right)}$; onde la curva si potrà sempre descrivere (926). Che se nell' equazione primitiva (965) manchi y^2, si libererà x^2 dal suo coefficiente, e si avrà un' equazione $x^2 + ayx + bx + py + q = x^2 + (ay + b)x + py + q + \left(\frac{ay + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{ay + b}{2}\right)^2 = 0$, e fatto $x^2 + (ay + b)x + \left(\frac{ay + b}{2}\right)^2 = u^2$, l'equazione $u^2 - \left(\frac{ay + b}{2}\right)^2 + py + q = 0$ sarà all' iperbola e si costruirà come la terza formula. Infine se manchi anche bx^2, liberato xy dal suo coefficiente, resterà un' equazione $xy + ax + by - p = 0$, ove fatto $b + x = u$, si ha $yu + au - ab - p = 0$, e fatto $y + a = z$, viene $uz = ab + p$, equazione all' iperbola tra gli asintoti: onde poste le coordinate AP, PM nel dato angolo APM, prolungata AP verso D finchè sia $AD = b$, e condotta $DC = a$ parallela a PM, si descriverà tra gli asintoti CQ, CK l' iper-

167.

168.

169.

170.

bola della potenza $ab+p$ (918.926), e sarà $QM=a+y=z$, $QC=b+x=u$ e $QM\times QC=uz=ab+p$. FIG. 170.

967. Segue da tutto ciò che *qualunque equazione indeterminata del secondo grado appartiene a una sezione conica*, e che la sua specie dipende dai tre primi termini $y^2+axy+bx^2$ della formula generale. Perciò

I°. Se questi tre termini formano un quadrato perfetto, cioè se $b=\frac{a^2}{4}$, o se non resta dei tre primi termini altro che y^2 o x^2, l'equazione apparterrà alla parabola.

II°. Se $b>\frac{a^2}{4}$, l'equazione è all'ellisse che per altro diviene un circolo quando $CD=m=CG=n=m\sqrt{g}$ (966) cioè $g=1$, e l'angolo BNM è retto; allora $BE^2=1=BF^2+FE^2=n^2+\frac{a^2}{4}$ (965); e poichè $g=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)\frac{1}{n^2}=1$, si ha $b=n^2+\frac{a^2}{4}=1$, e l'equazione primitiva diventa $y^2+axy+x^2+ex+dy+f=0$. 167.

III°. Se $b<\frac{a^2}{4}$, l'equazione è all'iperbola quand'anche b sia negativa; e se $b=1$, l'iperbola è equilatera. Se manca uno dei quadrati y^2, x^2, restando il rettangolo xy, la curva è egualmente iperbola; e se y^2, x^2 mancano nel tempo stesso, l'equazione è agli asintoti.

968. Può accadere che l'equazione proposta non sia realmente del secondo grado: tale è $y^2-xy+\frac{x^2}{4}=a^2$; la sezione conica ch'essa rappresenta, degenera in linea retta, come dee succedere per una parabola il cui parametro sia nullo, e che perciò si confonda col suo asse.

969. Se l'equazione proposta implichi contradizione, il calcolo lo farà conoscere colle operazioni che indicherà, come conducendo a descrivere un circolo di raggio immaginario ec.

Problemi indeterminati del secondo grado.

970. I. Dati i due punti A e B, trovar la curva AMB tale che conducendo da qualunque suo punto M le rette MA, MB, l'angolo AMB sia sempre lo stesso. Condotta MP normale ad AB, sia $AP=x$, $PM=y$, $AB=a$, $tang\,AMB=t$; avremo (741) $tang\,AMP=\frac{x}{y}$, e $tang\,BMP=\frac{a-x}{y}$. Dunque (719) $t=\frac{\frac{x}{y}+\frac{a-x}{y}}{1-\frac{x(a-x)}{y^2}}$; il che dà $y^2+x^2-ax-\frac{ay}{t}=0$; 171.

FIG. 171. equazione al circolo (967). Ne compisco i due quadrati e sarà $\left(y-\frac{a}{2t}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a-x\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4t^2}$; poi divido AB in mezzo nel punto F, dal quale alzo $EF=\frac{a}{2t}$ perpendicolare alla stessa AB, e col centro E e raggio $AE=\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4t^2}\right)}$ descrivo il circolo AMB, che è il luogo dell'equazione; poichè condotta EQ parallela ad AB, ho $EQ=\frac{1}{2}a-x$, $MQ=y-\frac{a}{2t}$; dunque ec. Or poichè $EF=\frac{a}{2t}$, deve essere l'angolo AEF= AMB: infatti essendo $EF\left(=\frac{a}{2t}\right):FA\left(=\frac{1}{2}a\right)::R\ (=1):t=tang\ AEF$ (742), i due angoli AMB ed AEF hanno una stessa tangente t; dunque condotta AT in modo che l'angolo TAB sia eguale all'angolo AMB, la retta AE perpendicolare sopra AT incontrerà EF nel centro del circolo cercato.

172. 971. II. La data retta AB si muova nell'angolo acuto BCA in modo che le sue estremità A e B stiano sempre sui lati dell'angolo dato: cerco la curva descritta da un dato punto M di AB. Condotta PM parallela ad AC, sia $CP=x$, $PM=y$, $AM=m$, $BM=n$, $\cos ACB=\cos MPB=c$: avrò $BP=\frac{nx}{m}$, e il triangolo MPB darà (768) $\frac{2cnxy}{m}=y^2-n^2+\frac{n^2x^2}{m^2}$, ovvero $y^2-\frac{2ncxy}{m}+\frac{n^2x^2}{m^2}-n^2=0$, equazione all'ellisse, poichè $\frac{n^2}{m^2}>\frac{n^2c^2}{m^2}$ cioè $1>c$ (967). Faccio $y-\frac{cnx}{m}=u$, e posto $sen\ MPB=s$, si avrà $u^2+\frac{n^2s^2x^2}{m^2}-n^2=0$. Presa dunque $CE=1$, e condotta $EF=\frac{cn}{m}$ parallela ad AC, se si conduce CFQ, si avrà $QM=u$. Sia dunque $CF=f$, $CQ=z$; si avrà $x=\frac{z}{f}$; dunque $u^2=\frac{n^2s^2}{m^2f^2}\left(\frac{f^2m^2}{s^2}-z^2\right)$. Quindi i semidiametri conjugati CO e CG saranno respettivamente espressi per $\frac{fm}{s}$ e per n, e poichè si conosce l'angolo GCO, è facile descriver l'ellisse (905). Se l'angolo ACB sia retto, l'equazion primitiva diventerà $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$, e apparterrà a un'ellisse dei semiassi m, n. Quindi dati gli assi potrà descriversi l'ellisse; essendo il maggiore $2a$, il minore $2b$, prendo $AM=a$,

$MB = b$ e muovo AB tra i lati d'una squadra; il punto M descriverà il quarto d'ellisse richiesta. FIG. 172.

972. III. Data la parabola NAK trovare il luogo di tutti i punti M tali che le due tangenti NM, KM faccian sempre l'angolo stesso NMK. Condotte MP, KL, NQ normali all'asse AQ, sia $AP = x$, $PM = y$, $NQ = z$, $KL = u$, il parametro della parabola $= p$, $tang\,NMK = t$, onde $AQ = AT = \frac{z^2}{p}$, $AL = AS = \frac{u^2}{p}$ (882.887), $QT = \frac{2z^2}{p}$, $LS = \frac{2u^2}{p}$, e attesi i triangoli simili TPM, TQN, ed SPM, SLK, avremo $\frac{2z^2}{p} : z :: \frac{z^2}{p} - x : y$ e anche $\frac{2u^2}{p} : u :: x - \frac{u^2}{p} : y$, e di quì $z = y + \sqrt{(y^2 + px)}$, $u = -y + \sqrt{(y^2 + px)}$, $u + z = 2\sqrt{(y^2 + px)}$ ed $uz = px$. Ora $NMK = NTQ + KSL$ (511), e perchè (741) $tang\,NTQ = \frac{p}{2z}$ e $tang\,KSL = \frac{p}{2u}$, sarà (719) $t = \frac{2p(u + z)}{4uz - p^2}$, e posti per $u + z$ ed uz i lor valori, $t = \frac{4\sqrt{(y^2 + px)}}{4x - p}$; e quadrando, $y^2 = t^2\left[\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 - \frac{px}{t^2}\right]$, equazione all'iperbola (967). Sia $x - \frac{p}{4} - \frac{p}{2t^2} = \varphi$, e verrà $y^2 = t^2\left[\varphi^2 - \frac{p^2}{4t^4}(t^2 + 1)\right]$ che paragonata con $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$ (966) e chiamato s il seno dell'angolo NMK, dà $m = \frac{p}{2t^2}\sqrt{(t^2 + 1)} = (697.700)\ \frac{p}{2ts}$ ed $n = \frac{p}{2s}$: onde diminuendo le x di $AC = \frac{p}{4} + \frac{p}{2t^2}$, l'iperbola del centro C e dei semiassi $CD = m$, $CG = n$, sarà il luogo dell'equazione. E si osservi 1°. che se l'angolo NMK sia ottuso, la tangente t sarà negativa: ma ciò nulla cangia nell'equazione che contiene sole potenze pari di t: onde dei due rami iperbolici MDm, $M'dm'$ quello soddisfà al problema quando il dato angolo è acuto, questo quando è ottuso: 2°. che se il dato angolo è retto, si ha $t = \infty$ (699), onde la linea cercata è la direttrice della stessa parabola (270.884); cosicchè due tangenti della parabola che partono da un punto della direttrice, forman sempre un angolo retto. 173.

973. IV. Far passare una Sezione conica per cinque punti dati A, C, D, B, E. Per due di questi punti conduco AB e dagli altri punti le perpendicolari CF, DH, GE sopra 174.

di essa, e poi suppongo che l'equazione della sezione conica cercata sia $ay^2 + b\ y + cx^2 + dx + fy + g = 0$ e faccio $AF = p$, $FC = q$,

174. $AG = p'$. $GE = q'$, $AH = p''$, $DH = q''$, $AB = p'''$. Quando $x = 0$, sarà $y = 0$, onde $g = 0$, e però l'equazione si riduce ad $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$. Quindi secondo che $x = p, = p', = p''$, $= p'''$, si ha $y = q, = -q', = q'', = 0$: sicchè si hanno le quattro equazioni, $aq^2 + bpq + cp^2 + dp + fq = 0 \ldots aq'q' - bp'q' + cp'p' + dp' - fq' = 0 \ldots aq''q'' + bp''q'' + cp''p'' + dp'' + fq'' = 0 \ldots cp'''p''' + dp''' = 0$, da cui si avranno i valori di b, c, d, f, che sostituiti in $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$, danno l'equazione della curva cercata. Il metodo può applicarsi a risolvere un somigliante problema per le linee del terzo, e del quarto grado ec.

175. 974. Così si trova per approssimazione la legge di più quantità legate insieme con certi rapporti. Suppongo per esempio le tre quantità BC, DE, FG dipendenti da tre altre AB, AD, AF; si vuole in generale una legge che unisca queste sei quantità. Immagino l'indefinita AF, e riguardo le sue parti AB, AD, AF come l'ascisse d'una curva CBMG; suppongo che ogni ordinata y sia una funzione indeterminata $A + Bx + Cx^2 +$ ec. dell'ascissa corrispondente (se le date quantità fossero quattro BC, DE, PM, FG, prenderei quattro termini per esprimere questa funzione). Or giacchè si ha $y = A + Bx + Cx^2$, faccio $AB = a$, $BC = b$, $AD = a'$, $DE = b'$, $AF = a''$, $FG = b''$, onde le tre equazioni $b = A + Ba + Ca^2 \ldots b' = A + Ba' + Ca'a' \ldots b'' = A + Ba'' + Ca''a''$, con cui si determinano i coefficienti A, B, C e l'equazione approssimata della curva CM, ove una quantità AP dipende da un'altra PM, come AB dipende da BC, AD da DE ec. Tale è il *Metodo dell' Interpolazioni*.

975. Con questo si ha l'equazione approssimata d'una curva segnata a caso sulla carta. Basta 1°. abbassar delle perpendicolari da varj punti di questa curva (e in particolare da quelli ove cangia molto di concavità) sopra una retta presa per retta dell' ascisse: 2°. supporre che l'equazione della curva sia $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ ec. in cui si fanno entrar tanti coefficienti indeterminati quante son le perpendicolari abbassate: 3°. determinar come sopra i coefficienti A, B, C, D ec.

Problemi determinati fino al quarto grado.

976. I luoghi di due equazioni indeterminate del secondo grado posson costruirsi sulla stessa retta dell'ascisse, con la stessa origine e nello stesso angolo delle coordinate. In tal caso le due curve si taglieranno in punti tali che l'ordinate corrispondenti a questi saranno le radici dell'equazione determinata che si avrebbe riunendo le due equazioni in una che non contenesse altro che x o y. Reciprocamente se un'equazione determinata del terzo

o quarto grado si divida in due che contengano x ed y, cosicchè eliminando x o y si ritrovi la data, è chiaro che costruendole come sopra, i punti d'intersezione delle due curve avranno per coordinate i valori dell'incognita: così se nell' equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ si faccia $x^2=py$, sarà $p^2y^2+apxy+bpy+cx+d=0$, equazione a una sezione conica che costruita con la parabola dell'equazione $x^2=py$, taglierà questa curva in dei punti, le cui ascisse corrispondenti saranno i valori di x. Quando la data equazione ha quattro radici reali, le due curve si tagliano in quattro punti; quando ne ha due sole, si tagliano in due; se tutte sono immaginarie, non si ha intersezione; e con radici eguali, le curve si toccano. Perchè però s'incontrino in un numero di punti eguale a quello delle radici reali ed ineguali, si prenderà sempre l'equazione d'una delle due curve con y alla sola prima dimensione.

977. I. Date due rette a,b, trovar tra esse due medie proporzionali x,y. Poichè per ipotesi $\div a:x:y:b$, sarà $x^2=ay$, ed $y^2=bx$; onde costruite le parabole di queste equazioni con la stessa retta dell'ascisse, lo stesso vertice e lo stesso angolo delle coordinate (che ordinariamente si suppone retto), esse daranno con le loro intersezioni i valori cercati di x,y.

Ma non deve in generale costruirsi un'equazione del terzo o quarto grado senza far uso del circolo, curva tanto più comoda a descriversi. Che se per introdurre il circolo nelle soluzioni di questo genere occorre talvolta una certa destrezza, vi sono anche certi casi, in cui si presenta da se. Per esempio, sommando le due equazioni $x^2-ay=0$, $y^2-bx=0$, e supposte le coordinate in angolo retto, nasce l'equazione al circolo $x^2+y^2-ay-bx=0$. Descritta dunque una parabola AM del parametro b sull'asse AP, ella sarà il luogo dell' equazione $y^2=bx$. Per trovar quello di $x^2+y^2-ay-bx=0$, sia $x-\frac{1}{2}b=u$, e $y-\frac{1}{2}a=z$: avremo $u^2+z^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, e condotta da A perpendicolarmente ad AP la retta $AB=\frac{1}{2}a$, e per B l'indefinita BCQ parallela ad AP, se preso $CB=\frac{1}{2}b$ si descriva un circolo col raggio CA, egli taglierà la parabola in un punto M tale che condotta la perpendicolare PM, le coordinate AP, PM saranno le due medie-proporzionali cercate. 176.

Supposto $b=2a$, il cubo fatto sopra AP sarebbe doppio del cubo a^3 (277), ciò che risolve con poco il problema della duplicazione del cubo sì famoso tra gli Antichi. Anzi può generalizzarsi questo problema prendendo $b=\frac{ma}{n}$ per trovare un cubo $AP^3=\frac{ma^3}{n}$ che sia ad un dato cubo a^3 nella ragione $m:n$.

978. II. Dividere in tre parti eguali un arco di circolo BF. 177.

177. Suppongo MF il terzo dell'arco BF e oltre le normali BOG, MPm sul raggio AF, conduco Bm ed mR normale a BG. Poi fatto $AP = x$, $PM = y$, $AM = a$, $AO = b$, $BO = c$, i triangoli simili AMP, BmR daranno $x : y :: c + y : x - b$, cioè $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$, equazione all'iperbola equilatera (967) che costruendosi determinerà il punto M nel quale il circolo e l'iperbola si taglieranno. Ora ella può mettersi sotto questa forma $\left(y + \frac{1}{2}c\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}b^2$; dunque (966) se $c > b$, l'equazione apparterrà al second' asse, e se $c < b$, al primo. In quest'ultima supposizione, dal centro A si conduca $AD = \frac{1}{2}c$ normale ad AF, e da D si tiri $DC = \frac{1}{2}b$ parallela ad AO, il punto C sarà il centro dell'iperbola, e se si prenda $CL = CK = \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - c^2)}$, e si descriva sull'asse LK un'iperbola KM, ella taglierà il circolo nel punto cercato M. L'iperbola opposta $M'LM''$ taglia il circolo in due punti M' ed M'', il primo dei quali dà (737) l'arco $F'M'$ terza parte di $F'M'B$, ed il secondo determina l'arco FM'' terza parte di $F'M''GFB$; il punto G non dà soluzione: ma la radice $GO = -c$ è quella per cui può dividersi l'equazione $4y^4 + 4cy^3 - 3a^2y^2 - 2a^2cy + a^2c^2 = 0$ che risulta dai due luoghi $y^2 - a^2 + x^2 = 0$, $y^2 - x^2 + cy + bx = 0$.

178. 979. Questi luoghi sommati danno $y^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}a^2$, equazione alla parabola. Perciò condotta dal punto A parallelamente a BG la retta $AD = \frac{1}{4}c$, si conduca $DC = \frac{\frac{1}{8}c^2 + a^2}{b}$ parallela ad AF, e si descriva col vertice C e asse CD una parabola del parametro $\frac{1}{2}b$; essa taglierà il circolo ne' punti cercati M, M', M''. Posson variarsi queste soluzioni in molte maniere, moltiplicando le due equazioni del problema per delle quantità indeterminate, e sommandone o sottraendone i prodotti: il che conduce a delle sezioni coniche differenti, tutte egualmente proprie a risolvere il problema. Così per risolverlo coll'ellisse, basterà moltiplicar l'equazione $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, per l'indeterminata m, e aggiungerne il prodotto alla seconda equazione; si avrà $y^2 + \ldots\ldots \frac{(m-1)x^2 + bx + cy - a^2 m}{m+1} = 0$ che appartiene all'ellisse quando $m > 1$ e positiva, ed all'iperbola quando $m < 1$ o negativa. Si può inoltre determinare m con una condizione arbitraria; per esempio, se si volesse che gli assi dell'ellisse fossero tra loro in ragione di $p : q$, dovrebbe essere $\frac{m-1}{m+1} = \frac{p^2}{q^2}$, il che dà $m = \frac{q^2 + p^2}{q^2 - p^2}$.

FIG. 179.

980. III. Dividere lo spazio parabolico ACB con una retta CM in due settori eguali ACM, BCM. Condotta MP normale ad AC, sia $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, $BC = b$, il parametro della parabola $= p$; avremo $\frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}y(a-x) = ACM = \frac{1}{2}ACB = \frac{1}{3}ab$, ovvero $xy + 3ay = 2ab$, equazione all'iperbola tra gli asintoti. Prolungata AP verso F e condotta FK perpendicolare ad FA, tra gli asintoti FK, FA si descriva una iperbola equilatera della potenza $2ab$; essa sarà il luogo dell'equazione $xy + 3ay = 2ab$ e taglierà la parabola nel punto richiesto M.

Volendosi servir del circolo, poichè $b^2 = ap$ ed $y^2 = px$, sarà $x = \frac{y^2}{p} = \frac{ay^2}{b^2}$, valore che sostituito nell'equazione $xy + 3ay = 2ab$, la cangierà in $y^3 + 3b^2y - 2b^3 = 0$: la moltiplico per y e diviene $y^4 + 3b^2y^2 - 2b^3y = 0$, da cui, sostituito $\frac{b^2x}{a}$ ad y^2, ricavo $x^2 + 3ax - \frac{2a^2}{b}y = 0$: a questa aggiungo $y^2 - px = 0$, ed ho $y^2 + x^2 + (3a - p)x - \frac{2a^2}{b}y = 0$, equazione al circolo. Alzata dal punto A normalmente ad AP una retta $AD = \frac{a^2}{b}$, si conduca ad AD dalla parte opposta al punto M una perpendicolare $DC' = \frac{1}{2}(3a - p)$ (qui si suppone $3a > p$), e col raggio C'A e centro C' si descriva un arco di circolo; quest'arco taglierà la parabola nel punto richiesto M; e $PM = b[\sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})} - \sqrt[3]{(-1 + \sqrt{2})}]$.

981. IV. Costruir l'equazione generale del terzo grado $x^3 \pm p^2x - p^2q = 0$. Moltiplicandola per x, si avrà $x^4 \pm p^2x^2 - p^2qx = 0$, e facendo $x^2 = ay$, si troverà $y^2 \pm \frac{p^2y}{a} - \frac{p^2qx}{a^2} = 0$, che unita ad $x^2 - ay = 0$, diviene $y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 \mp p^2}{a}\right) - \frac{p^2qx}{a^2} = 0$, al circolo. Ora la costruzione di questa con quella della parabola $x^2 = ay$, darà le radici dell'equazione proposta. Ma bisogna distinguer due casi relativi al doppio segno $\pm$ di p. Nel primo l'equazione al circolo è $y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 - p^2}{a}\right) - \frac{p^2qx}{a^2} = 0$, e siccome la quantità a è indeterminata, può farsi $a = p$, il che darà $y^2 + x^2 - qx = 0$. Descritto dunque un circolo sul diametro $AB = q$, ed alzata sopra AB la perpendicolare AL, la parabola del vertice A, asse AL e parametro p, taglierà il circolo in un punto M che determinerà l'ascissa AP, sola radice reale dell'equazione proposta (378. 364).

180.

FIG. 180. Nel secondo caso si ha $y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2+p^2}{a}\right) - \frac{p^2 qx}{a^2} = 0$, e facendo $a = p$, si avrà $x^2 = py$, $y^2 + x^2 - 2py - qx = 0$.

181. Descrivasi pertanto una parabola MAM′ come nel caso precedente e prendasi AD $= p$: dipoi condotta DC $= \frac{1}{2}q$ normale ad AD, si descriva col centro C e raggio CA un circolo, che taglierà la parabola nei punti M, M′, M″, i quali daranno MQ, M′Q′, M″Q″ per le radici cercate, mentre il punto A per cui passan le curve, dà la radice introdotta $x = 0$. Di questi tre valori il primo è positivo, gli altri son negativi ed eguagliano il positivo MQ (371).

982. V. Trovar le radici dell' equazione del quarto grado $x^4 - p^2 x^2 + p^2 qx + p^3 r = 0$ per mezzo d' un circolo e d' una parabola. Fatto al solito $x^2 = py$, viene $y^2 + qx - py + pr = 0$; vi unisco $x^2 - py = 0$ e nasce l' equazione al circolo $x^2 + y^2 - 2py + qx + pr = 0$. Descritta dunque col parametro p la parabola M′AM‴ che abbia AQ per asse perpendicolare ad

182. AP, e presa AD $= p$, DC $= \frac{1}{2}q$ normale ad AD dalla parte in cui à nella figura (si prenderebbe dall' altra se fosse negativo), si troverà che un circolo del centro C e raggio $\sqrt{(CA^2 - pr)}$ taglierà la parabola ne' punti M, M′, M″, M‴, che determineranno le radici dell' equazione, due positive, cioè MQ, M′Q′, l'altre negative. Se l' equazione da costruirsi fosse $x^4 + p^2 x^2 - p^2 qx + p^3 r = 0$, presa al solito $x^2 = py$, si avrebbe $y^2 + x^2 - qx + pr = 0$, equazione al circolo come nel caso passato, ma più facile a costruirsi.

983. VI. Trovar le radici dell' equazione $x^4 - pqx^2 + p^2 rx + p^2 m^2 = 0$ per mezzo di un circolo e d' un' iperbola tra gli asintoti. Presa $xy = pm$, viene $x^4 - pqx^2 + p^2 rx + x^2 y^2 = 0 = x^2 + y^2 - pq + \frac{p^2 r}{x} = x^2 + y^2 - pq + \frac{pry}{m}$, equa-

183. zione al circolo. Tra gli asintoti perpendicolari QAQ′, P‴AP′ descritte l' iperbole equilatere della potenza pm, prendo sotto AP la retta AC $= \frac{pr}{2m}$, e il circolo del centro C, col raggio $\sqrt{(AC^2 + pq)}$, taglierà l' iperbole opposte nei quattro punti M, M′, M″, M‴, i quali determineranno come sopra i quattro valori di x con le ascisse AP, AP′, AP″, AP‴.

ELEMENTI

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

Fondamenti di questi due Calcoli.

984. Le quantità si dividono in *costanti* ed in *variabili*: le costanti che sogliono indicarsi con le prime lettere a, b, c ec., non crescono nè scemano; le variabili che si esprimono con l' ultime x, y, z ec., crescono o scemano continuamente. Così il diametro del circolo è una quantità costante, mentre le sue ascisse e le sue ordinate son quantità variabili (564), che hanno anche una relazione scambievole (866): se questa non vi fosse si direbbero *indipendenti tra loro*. La porzione finita di cui una variabile x o y cresce o scema, si chiama *differenza finita* e si scrive δx (*differenza di* x) o δy (*differenza di* y); cosicchè $x \pm \delta x$ è la variabile accresciuta o diminuita della sua differenza, e δ è il segno con cui si indica il cangiamento finito di essa, il quale avrà + se ella cresce, e − se scema, onde $\delta\,(x+y)$ non significa quì moltiplicazione, ma la differenza $\delta x + \delta y$ di $x+y$.

Generalmente $\delta[\varphi(x)], \delta[f(x,y)]$ ec. significano la differenza d' una funzione φ di x o di una funzione f di x, y ec.: ove per *funzione* si intende quì una quantità composta di x e di costanti, o di x, y e di costanti, ma tanto generale che rappresenta tutte le infinite quantità particolari che posson formarsi con x o con x, y e con delle costanti.

FIG. 175.

985. Sia la curva CMG con le coordinate AB e BC, AD e DE, AF ed FG ec.; se $AB=x$ e $BC=y$, sarà $AD=AB+BD=x+\delta x=x'$, $DE=Da+aE=y+\delta y=y'$, $AF=AD+DF=x'+\delta x'=x''$, $FG=Fb+bG=y'+\delta y'=y''$ ec.; dunque $x'-x=\delta x$, $x''-x'=\delta x'$, $\delta x'-\delta x=\delta(x'-x)=\delta(\delta x)=\delta\delta x=\delta^2 x$: del pari $y'-y=\delta y$, $y''-y'=\delta y'$, $\delta y'-\delta y=\delta^2 y$. Ora le quantità $\delta^2 x$, $\delta^2 y$ ec. diconsi *differenze seconde*, e $\delta^3 x$, $\delta^3 y$ sarebbero le *terze* ec. ove si osservi che $\delta^2 x$ è molto diverso da δx^2, perchè $\delta^2 x$ è la differenza seconda di x, mentre δx^2 è il quadrato della prima δx. Ordinariamente l'una delle due differenze prime δx, δy si riguarda come *costante*, supponendo per esempio $BD=\delta x=DF=FI$ ec.: ma non potranno farsi costanti ambedue, poichè allora sarebbe il triangolo $CaE=EbG$, e la curva CG si supporrebbe una retta.

Solo per render più semplici i calcoli si fa costante δx o δy; del resto, o si faccia o no, il risultato è lo stesso. Sia $BC=y$, $DE=y'$, $FG=y''=y'+\delta y'=y+2\delta y+\delta^2 y$, ed $y=x^2$: verrà $\delta y=2x\delta x+\delta x^2$ (990), e presa costante $\delta x=BD=DF$, sarà $\delta^2 y=2\delta x^2$, e I. $FG=x^2+4x\delta x+4\delta x^2$. Ma se $BP=\delta x'$, $PF=\delta x''$, avremo $\delta y=2x\delta x'+\delta x'^2$, $\delta^2 y=2\delta x'^2+2x\delta^2 x'+4\delta x'\delta^2 x'+\delta^2 x'^2$ (997), e II. $FG=x^2+4x\delta x'+4\delta x'^2+2x\delta^2 x'+4\delta x'\delta^2 x'+\delta^2 x'^2$. Ora avendosi sempre $\delta x'+\delta x''=2\delta x'+\delta^2 x'=BP+PF=BD+DF=2\delta x$, se questo valore di $2\delta x$ si ponga nella I., verrà esattamente la II., onde la I. ove δx è costante, non differisce dalla II. ove non lo è.

986. Dall'equazioni $y'=y+\delta y$, $y''=y'+\delta y'$, $y'''=y''+\delta y''$ ec., $\delta y'=\delta y+\delta^2 y$, $\delta y''=\delta y'+\delta^2 y'$, $\delta^2 y'=\delta^2 y+\delta^3 y$ ec., si ricava facilmente che presa δx costante, all'ascissa $x'=x+\delta x$ corrisponde l'ordinata $y'=y+\delta y$, all'ascissa $x''=x+2\delta x$ corrisponde l'ordinata $y''=y+2\delta y+\delta^2 y$, all'ascissa $x'''=x+3\delta x$ corrisponde l'ordinata $y'''=y+3\delta y+3\delta^2 y+\delta^3 y$ ec., ove i coefficienti dei termini son quelli delle varie potenze d'un bino-

mio; dunque in generale all'ascissa $x+n\delta x$ corrisponderà un' ordinata $Y=y+n\delta y+n.\frac{n-1}{2}\delta^2 y+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\delta^3 y+$ ec., teorema di cui può farsi un buon uso per sommar le serie.

Se δx, δy divengano dx, dy (1005), e si supponga $ndx=\pm a$ quantità finita, sarà (266.269) $n=\infty=n-1=n-2$ ec. $=\frac{a}{dx}$, ed $Y=y\pm\frac{ady}{dx}+\frac{a^2d^2y}{2dx^2}\pm\frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}+$ ec., nuovo teorema di cui parleremo altrove. E' chiaro che a può anche supporsi infinitesima purchè allora si riguardi dx come infinitesima del second' ordine.

987. Che se sia ora IH $=y$, FG $='y$, DE $=''y$, BC $='''y$ ec. premettendo l'accento per indicare il progresso dell' ordinate all'indietro, avremo H$c=\delta'y$, G$b=\delta''y$, E$a=\delta'''y$ ec.; onde $y-\delta'y='y$, $'y-\delta''y=''y$, $''y-\delta'''y='''y$ ec., e però $y=\delta'y+'y=\delta'y+\delta''y+''y=\delta.'y+\delta''y+\delta'''y+'''y$ ec. $=\delta('y+''y+'''y$ ec.), altro teorema importante da cui si ha che un' ordinata y o in generale una *funzione* qualunque di y è sempre la differenza della somma dei termini che la precedono. Dunque 1°. lo spazio Hi, l'arco Hh ec., tutte funzioni di y come vedremo, son la differenza della somma degli spazj GI, EF ec. o degli archi GH, EG ec., ovvero d'uno spazio qualunque CI o di un qualunque arco CH ec.: 2°. supposta costante $\delta y=\delta'y=\delta''y$ ec. $=1$, sarà $y=\delta(y-1+y-2+y-3+$ec.): in tal caso se x è funzione di y, la serie ec. $'''x$, $''x$, $'x$, x, x', x'', x''' ec. si scrive da molti x_0, x_1, x_2 .... x_{y-2}, x_{y-1}, x_y, x_{y+1}, x_{y+2} ec.: noi non useremo questa notazione.

175.

988. Come il cercar la differenza d'una variabile dicesi *differenziare*, così il risalir dalla differenza alla variabile stessa chiamasi *sommare* o *integrare*; e come la differenza si indica con δ, così la somma può indicarsi con σ; onde $\sigma\delta x$,

$\sigma\delta^2 x$ ec. vuol dir la somma di cui δx o $\delta^2 x$ son la differenza. Ma quì si rifletta 1°. che tanto è $\sigma a\delta x$ che $a\sigma\delta x$ perchè l'integrazione non riguarda mai le costanti; onde se δx sia costante (985), si avrà $\sigma\delta x = \delta x\sigma 1$ ec.: 2°. che δx tanto è differenza di x che di $x \pm a$, giacchè a essendo costante non ha differenza, cioè non cresce nè scema (984); onde l'eguaglianza della differenziale di due variabili non prova già che le variabili sono eguali, ma solo che posson differire d'una costante, la quale sparisce differenziando, e poi si supplisce sommando coll'aggiungere alla somma l'indeterminata C (*costante*) da determinarsi secondo le circostanze: così $\sigma\delta x = x + C$, $\sigma\delta^2 x = \delta x + C$ ec. Tra poco faremo sentire anche meglio la necessità e l'uso di quest' aggiunta: passiamo al calcolo delle differenze finite.

989. Vogliasi la differenza finita di $a^2 + bx + cy - fz = u$; avremo (984) $u + \delta u = a^2 + bx \pm b\delta x + cy \pm c\delta y - fz \mp f\delta z = u'$, onde $u' - u = \delta u = \pm b\delta x \pm c\delta y \mp f\delta z$. Dunque all'opposto $\sigma (b\delta x + c\delta y - f\delta z) = bx + cy - fz + C$.

990. Sia da differenziarsi $x^n = u$; avremo $u + \delta u = (x \pm \delta x)^n = u'$, ed $u' - u = \delta u = \pm nx^{n-1} \delta x + n . \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 \pm n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} x^{n-3} \delta x^3 \pm$ ec.: così $\delta(x^2) = 2x\delta x + \delta x^2$, $\delta(x^3) = 3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3$, ec. Dunque $\sigma (\pm nx^{n-1} \delta x + n . \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 \pm$ ec. $) = x^n + C$. Sia δx costante e 1°. $n = 1$; dunque $\sigma\delta x =$ (988) $\delta x\sigma 1 = x$, e $\sigma 1 = \frac{x}{\delta x}$: 2°. $n = 2$; dunque $\sigma (2x\delta x + \delta x^2) = 2\delta x\sigma x + \delta x^2\sigma 1 = x^2$, e $\sigma x = \frac{x^2}{2\delta x} - \frac{x}{2}$: 3°. $n = 3$; dunque $\sigma (3x^2\delta x + 3x\delta x^2 + \delta x^3) = 3\delta x\sigma x^2 + 3\delta x^2\sigma x + \delta x^3\sigma 1 = x^3$, e $\sigma x^2 = \frac{x^3}{3\delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x\delta x}{6}$ ec. ec.: onde

se $\delta x = 1$, verrà $\sigma 1 = x$, $\sigma x = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, $\sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$, ec. ec. E nel modo stesso dalle seguenti differenze dei rotti, dei radicali, delle funzioni circolari ec. si otterranno le respettive somme che lasceremo ormai di notare, bastandoci di avvertire in generale che per aver le somme bisogna riflettere molto sulle differenze.

991. Si voglia la differenza di $\frac{x^2}{a+x} = u$; avremo $u + \delta u = \frac{(x \pm \delta x)^2}{a + x \pm \delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \frac{\pm(2ax + x^2)\delta x + (a+x)\delta x^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} = \frac{\pm(2ax + x^2)\delta x}{(a+x)^2 \pm (a+x)\delta x} + \frac{\delta x^2}{a + x \pm \delta x}$, cioè riducendo in serie questi rotti (324) e sommando le serie, $\delta u = \frac{\pm(2ax + x^2)\delta x}{(a+x)^2} + \frac{a^2\delta x^2}{(a+x)^3} \mp \frac{a^2\delta x^3}{(a+x)^4}$ ec.

992. Sia da differenziarsi $\sqrt{(a+x)} = u$; avremo $u + \delta u = \sqrt{(a + x \pm \delta x)} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \sqrt{(a + x \pm \delta x)} - \sqrt{(a+x)}$: ma (182) $\sqrt{(a + x \pm \delta x)} = (a + x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$ ec.; dunque $\delta u = -(a + x)^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}}$ - ec. $= \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$ ec. Del pari: $\delta\left(\sqrt{\frac{a+x}{x}}\right) = \delta u = \ldots$; $\frac{\sqrt{(ax + x^2 \pm x\delta x)} - \sqrt{(ax + x^2 \pm a\delta x \pm x\delta x)}}{\sqrt{(x^2 \pm x\delta x)}}$, cioè riducendo in serie i tre radicali (182) e poi il rotto che ne risulta (324), $\delta u = \frac{\mp a\delta x}{2x(ax + x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(3a^2 + 4ax)\delta x^2}{8x(ax + x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(5a^3 + 12a^2x + 8ax^2)\delta x^3}{16x(ax + x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ec.

993 Sia da differenziarsi $sen\, x$ e $cos\, x$. Supposto $x + \delta x = z$, $sen\, x + \delta(sen\, x) = sen\, z$ e $cos\, x + \delta\, cos\, x) = cos\, z$, si avrà $\delta(sen\, x) = sen\, z - sen\, x =$ (709) $2 sen \frac{1}{2}\delta x\, cos(x + \frac{1}{2}\delta x)$ e $\delta(cos\, x) = cos\, z - cos x$ $=$ (709) $- 2\, sen \frac{1}{2}\delta x\, sen\,(x + \frac{1}{2}\delta x)$. Si troverà nel modo stesso (709) $\delta\,(tang\, x) = \frac{sen\, \delta x}{cos\, x\, cos\,(x + \delta x)}$ e $\delta\,(cot\, x) = - \frac{sen\, \delta x}{sen\, x\, sen\,(x + \delta x)}$.

Anche in altro modo posson differenziarsi $sen\, x$ e $cos\, x$. Poichè fatto $sen\, x = u$, avremo $u + \delta u = sen\,(x \pm \delta x) = u'$, onde $u' - u = \delta u = sen\,(x \mp \delta x) - sen\, x$: ma (703.704) $sen\,(x \pm \delta x) = sen\, x\, cos\, \delta x \pm sen\, \delta x\, cos\, x$, e $sen\, \delta x = \delta x - \frac{\delta x^3}{2.3} + \frac{\delta x^5}{2.3.4.5}$ ec., $cos\, \delta x = 1 - \frac{\delta x^2}{2} + \frac{\delta x^4}{2.3.4}$ ec. (727); dunque $\delta u = - sen\, x + sen\, x \left(1 - \frac{\delta x^2}{2} + \text{ec.}\right) \pm cos\, x \left(\delta x - \frac{\delta x^3}{2.3} + \text{ec.}\right) = \pm \delta x\, cos\, x - \frac{\delta x^2\, sen\, x}{2} \mp \frac{\delta x^3\, cos\, x}{2.3} + \frac{\delta x^4\, sen\, x}{2.3.4} \pm$ ec. Del pari volendo la differenza di $cos\, x = u$, verrebbe $\delta u = cos\,(x \pm \delta x) - cos\, x = - cos\, x + cos\, x \left(1 - \frac{\delta x^2}{2} \text{ ec.}\right) \mp sen\, x \left(\delta x - \frac{\delta x^3}{2.3} \text{ ec.}\right) = \mp \delta x\, sen\, x - \frac{1}{2}\delta x^2\, cos\, x \pm \frac{1}{2.3}\delta x^3\, sen\, x$ ec.

994. Sia da differenziarsi $lx = u$, intendendo per l il logaritmo naturale di x; avremo $u + \delta u = l\,(x \pm \delta x) = u'$ onde $u' - u = \delta u = l\,(x \pm \delta x) - lx = l\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right) =$ (356) $\pm \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\delta x^3}{3x^3} -$ ec.

995. Vogliasi differenziare una quantità con esponente variabile o l'*esponenziale* $a^x = u$; avremo $u + \delta u = a^{x \pm \delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = a^{x \pm \delta x} - a^x$: ma (150) $a^{x \pm \delta x} = a^x . a^{\pm \delta x}$ ed $a^{\pm \delta x} = 1 \pm \delta x la + \frac{1}{2}\delta x^2 l^2 a \pm$ ec: (360); dunque $\delta u = - a^x + a^x\,(1 \pm \delta x\, la + \frac{1}{2}\delta x^2 l^2 a \pm$ ec. $= \pm a^x \delta x la + \frac{1}{2} a^x \delta x^2 l^2 a \pm$ ec.

996. Con egual facilità si differenziano i prodotti di più variabili x, y ec. Ma si osservi che se x cresce mentre y scema, dovrà sostituirsi all'uno $x + \delta x$, all'altro $y - \delta y$; e se sce-

mino ambedue nel tempo stesso, ad ambedue si sostituirà $x-\partial x, y-\partial y$ (984): noi supporremo che nel tempo stesso crescano ambedue. Voglia differenziarsi $xy=u$; avremo $u+\partial u=(x+\partial x)(y+\partial y)=xy+x\partial y+y\partial x+\partial x\partial y=u'$, onde $u'-u=\partial u=x\partial y+y\partial x+\partial x\partial y$. Così si troverà $\partial(ax^3+bx^2y+cxy^2+my^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+ny+k)=(3ax^2+2bxy+cy^2+2ex+fy+h)\partial x+(3ax+by+e)\partial x^2+a\partial x^3+(bx^2+2cxy+3my^2+fx+2gy+n)\partial y+(cx+3my+g)\partial y^2+m\partial y^3+(2bx+2cy+f)\partial x\partial y+b\partial y\partial x^2+c\partial x\partial y^2$. Così $\partial\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x+\partial x}{y+\partial y}-\frac{x}{y}=\frac{y\partial x-x\partial y}{y^2+y\partial y}=(324)$ $\frac{y\partial x-x\partial y}{y^2}-\frac{(y^2\partial x\partial y-xy\partial y^2)}{y^4}$ ec.

997. In fine vogliasi la differenza *seconda*, *terza* ec. di x^n supposta ∂x costante (985): la prima differenza è $nx^{n-1}\partial x+n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\partial x^2+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\partial x^3$ ec. (990), e tutto si ridurrà a trovar le differenze di $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}$ ec. Ora 1°. $\partial(x^{n-1})=(n-1)x^{n-2}\partial x+(n-1)\frac{n-2}{2}x^{n-3}\partial x^2+(n-1)\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}x^{n-4}\partial x^3$ ec. che si moltiplicherà per $n\partial x$: 2°. $\partial(x^{n-2})=(n-2)x^{n-3}\partial x+(n-2)\frac{n-3}{2}x^{n-4}\partial x^2$ ec. che si moltiplicherà per $n.\frac{n-1}{2}\partial x^2$: 3°. $\partial(x^{n-3})=(n-3)x^{n-4}\partial x$ ec. che si moltiplicherà per $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\partial x^3$ ec. Fatte l'operazioni, la differenza seconda sarà $n(n-1)x^{n-2}\partial x^2+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\partial x^3+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}7x^{n-4}\partial x^4$ ec., e col metodo stesso si avrà la terza, la quarta ec.: così essendo $\partial(x^2)=2x\partial x+\partial x^2$, sarà $\partial^2(x^2)=2\partial x^2$; ma non prendendo costante ∂x, si troverà $\partial^2(x^2)=2\partial x^2+(2x+4\partial x+\partial^2 x)\partial^2 x$. Nella medesima ipotesi di ∂x costante, si troverà che la differenza seconda di xy (ricordandosi che ∂y diviene $\partial y+\partial^2 y$) è $2\partial x\partial y+x\partial^2 y+2\partial x\partial^2 y$.

998. Riguardo alle funzioni $\varphi(x), f(x,y)$ ec. (984), poichè la differenza di qualunque funzione di x, di y ec. è come

si è visto finora, una nuova funzione di x, di y ec. moltiplicata per δx, per δy ec., avremo $\delta[\phi(x)] = \delta x\, \phi'(x)$, $\delta[f(x,y)] = \delta(x,y) f'(x,y)$ ec.; del pari $\delta^2[\phi(x)] = \delta x^2\, \phi''(x)$ presa δx costante ec.

Prime Regole de' due Calcoli.

999. Una grandezza variabile G ha per *limite* un' altra grandezza L quando G o sempre crescendo o sempre scemando può accostarsi al valor di L indefinitamente o ad arbitrio, senza poter mai eguagliarlo di fatto (598): così se G accostandosi ad Ω giunga a differirne della quantità ω, sarà $G=\Omega-\omega$, e tanto più si avvicinerà G al valor di Ω quanto più scemerà ω; cosicchè se divenisse $\omega=0$, si avrebbe realmente $G=\Omega$; in tal caso Ω si chiama il limite di G.

Onde 1°. *per avere il limite d' una grandezza bisogna fare zero la differenza tra essa e la grandezza a cui sempre si accosta*: 2°. accostandosi G alle grandezze L, Λ fino a differirne delle quantità l, λ, si avrà $G=L-l$, e $G=\Lambda-\lambda$, onde $L-l=\Lambda-\lambda$, e fatto $l=0$, $\lambda=0$, saranno L, Λ due limiti di G, e verrà $L=\Lambda$, cioè *i limiti d' una stessa grandezza G sono eguali*: 3°. Se le grandezze G, Γ conservando tra loro la stessa invariabil ragione $m:n$, si accostino ad L, Λ fino a differirne delle quantità l, λ, si avrà $G=L-l$, $\Gamma=\Lambda-\lambda$, ed $L-l : \Lambda-\lambda :: m:n :: G:\Gamma$, cioè *se* G, Γ *si accostino proporzionalmente ai limiti* L, Λ, *le grandezze e i limiti staranno tra loro nella stessa ragione*: 4°. *una grandezza* G *continuamente accostandosi al limite* L, *può riguardarsi (se basti una certa approssimazione) come eguale ad* L *quando è giunta allo stato che o immediatamente precede l' eguaglianza perfetta o ne è anche un poco più remoto*, con-

seguenza che talvolta ha luogo nelle stesse Scienze Matematiche, come nella somma delle serie convergenti (343): e ne ha poi moltissimo in tutte le scienze fisiche: 5°. poichè la grandezza G si può tanto accostare al limite L da giungere a differirne inassegnabilmente, *ciò che si dimostra di* G *sarà dimostrato anche di* L.

1000. Ora il *Calcolo differenziale* è il metodo di trovare i limiti della relazione tra le differenze delle quantità variabili: il metodo inverso che consiste nel risalire da questi limiti alla relazione stessa delle quantità, si chiama *Calcolo integrale*. Alcuni esempj renderanno chiare queste nozioni.

1001. Condotte nella curva AMm l'ordinate PM, pm, la corda mM prolungata in S, ed Mr parallela ad Ap, sia l'arco AM$=s$, M$m'm=\delta s$, AP$=x$, PM$=y$, P$p=$M$r=\delta x$, $mr=\delta y$, onde M$m=\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}$: è chiaro che $\frac{\delta s}{\delta x} > \frac{\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}}{\delta x}$, e che quanto più m si accosta ad M, cioè quanto più scema δx, tanto meno differiranno tra loro quelle due ragioni; dunque la ragione $\frac{\delta s}{\delta x}$ è il limite dell'altra $\frac{\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}}{\delta x}$ (999). Similmente condotta ad M la tangente MT, i triangoli simili MPS, mrM danno $\frac{MP}{PS}=\frac{mr}{rM}=\frac{\delta y}{\delta x}$; e poichè $\frac{MP}{PT} > \frac{MP}{PS}$, sarà $\frac{MP}{PT} > \frac{\delta y}{\delta x}$, e quanto più m si accosta ad M, tanto meno differiranno tra loro le due ragioni $\frac{MP}{PT}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$; dunque l'una è il limite dell' altra, e per determinar la prima basta trovare una nuova espressione del limite della seconda: così se AMm è un circolo dell' equazione

184.

$y^2 = 2ax - x^2$ (564), presa la differenza (990) $2y\delta y + \delta y^2 = 2a\delta x - 2x\delta x - \delta x^2$, sarà $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2a - 2x - \delta x}{2y + \delta y}$; ove quanto più scemano $\delta x, \delta y$, tanto più la ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ si accosta a quella di $\frac{2a - 2x}{2y} = \frac{a - x}{y}$; dunque

184. $\frac{a - x}{y}$ è il limite di $\frac{\delta y}{\delta x}$, dunque (999) $\frac{MP}{PT} = \frac{y}{PT} = \frac{a - x}{y}$, e però $PT = \frac{y^2}{a - x}$, come già si sapeva (564).

1002. Per convincersi poi che $\delta y, \delta x$ anche divenendo zero, serban tra loro una ragione, sia $\delta y = a^2 - x^2$, $\delta x = a - x$, e si supponga $x = a$: in tal caso si avrà $\delta y = 0$ e $\delta x = 0$; eppure intanto $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - x^2}{a - x} = a + x = 2a$. Similmente se nel triangolo PBE sia $PB = a$, $BE = b$, e sull'ascissa

45. $BI = x$ si conduca l'ordinata $IG = y$ parallela a BE, si avrà PB (a) : BE (b) :: PI $(a - x)$: IG (y), onde $ay = ab - bx$; e prese le differenze, osservando che l'una delle coordinate scema mentre l'altra cresce, sarà $\mp a\delta y = \mp b\delta x$, ovvero $a\delta y = b\delta x$, e però $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{b}{a}$, cioè le differenze $\delta y, \delta x$ anche annullandosi, come avviene in GI, conservan tra loro la ragion costante $b : a$ delle quantità primitive $y, a - x$ a cui appartengono. Tale è l'idea che bisogna farsi del calcolo differenziale.

1003. Quanto all'integrale, egli è l'opposto del differenziale (1000) ed ogni integrazione esige l'aggiunta d'una costante (988). Per dare anche di questo un'esempio, sia OD una linea retta o curva con due coordinate $HC = x$, $CD = y$ in angolo retto, e presa $Cc = \delta x$, si conduca l'ordinata $cd = cr + rd = y + \delta y$; è chiaro (987) che

lo spazio Cd sarà la differenza di qualunque spazio corrispondente HD, l'arco Dd di qualunque arco corrispondente OD, la superficie descritta da Dd della descritta da OD nella rivoluzion della figura sull'asse HC, il solido generato da Cd del solido generato da HD ec.; cosicchè sommate secondo il bisogno queste differenze, il calcolo integrale determinerà la quadratura degli spazj, la lunghezza delle linee e la dimensione delle superficie curve, la cubatura dei solidi ec.

1004. Supposta dunque per ora OD una retta, sia $PH = a$ e la normale $HO = b$; avremo perciò $a : b :: a + x : y = \frac{b(a+x)}{a}$, onde differenziando, $\delta y = \frac{b \delta x}{a}$, e lo spazio differenziale $Cd = Cr + Drd = \delta x \times y + \frac{\delta x \times \delta y}{2} = \frac{b}{a}\left(a\delta x + x\delta x + \frac{\delta x^2}{2}\right)$; quindi per aver la quadratura di uno spazio corrispondente HD o PCD, bisogna integrar quest' ultima equazione: ma $\sigma a\delta x = ax$ e $\sigma\left(x\delta x + \frac{\delta x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2$ (990); dunque l'integrale completo con l'aggiunta della costante sarà $\sigma(Cd) = \frac{bx}{a}\left(a + \frac{x}{2}\right) + C$. Ora come l'area del trapezio HD è diversa da quella del triangolo PCD, così la costante C avrà nei due casi un diverso valore: infatti il trapezio è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto H, cioè quando $x = 0$; ma il triangolo è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto P, cioè quando $x + a = 0$ ovvero $x = -a$; dunque supposti nulli i due spazj e sostituito nell'integrale il doppio valore di x, verrà 1°. $0 = 0 + C$, e però $C = 0$; 2°. $0 = -b(a - \frac{1}{2}a) + C$, e però $C = \frac{ab}{2}$; onde $\sigma(Cd) = HD = \frac{bx}{a}\left(a + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(b+y)x$,

45. come ben si sapeva (603) e $\sigma(Cd) = PCD = \frac{bx}{a}\left(a + \frac{x}{2}\right) + \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}y(a+x)$, come pure si sapeva (601). Tale è l'idea che bisogna farsi del calcolo integrale.

1005. Ciò supposto, si è convenuto di esprimere con $\frac{dy}{dx}$ il limite della relazione o ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ tra le differenze prime delle variabili y, x: con $\frac{d^2y}{d^2x}$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$ i limiti delle ragioni $\frac{\delta^2 y}{\delta^2 x}$ o $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ tra le lor differenze seconde ec.; e i termini dy, dx del limite $\frac{dy}{dx}$ si son chiamati *differenziali del prim' ordine*, i termini d^2y, d^2x, dx^2 dei limiti $\frac{d^2y}{d^2x}, \frac{d^2y}{dx^2}$ *differenziali del second' ordine* ec.; onde *differenziar le quantità* significa ora cercare il limite della ragione tra le lor differenze; e dicesi *quantità* ed *equazione differenziale* quella che nasce dalla *differenziazione*. All'incontro il carattere o segno $\int$ posto avanti ad una differenziale, indica *somma* o *integrazione*. Del resto molti Geometri a cui piace di abbracciare sotto il comun nome di *Calcolo Infinitesimale* i due Calcoli di cui trattiamo, concepiscono una variabile aumentata o diminuita d'una quantità infinitamente piccola dy o dx, e chiamano dy, dx *infinitamente piccoli* o *infinitesimi del prim' ordine*, d^2y, d^2x, dx^2 *infinitesimi del secondo* ec., riguardando intanto l'integrazione come il ritorno dagli infinitesimi ai finiti. Altri danno a dy, d^2y, d^3y ec. il nome di *flussioni del primo*, *secondo*, *terzo* ec. *ordine*, e chiamano *fluenti* le quantità che si ritrovano col calcolo integrale.

Queste idee ed espressioni, benchè poco esatte, sono assai comuni, e noi non lascieremo di farne uso dopo aver derivate dai fondamenti già stabiliti le prime regole dei due calcoli nelle quali supporremo tutte le variabili crescenti, giacchè in caso diverso si sa come bisogna condursi (996).

1006. Abbiam veduto (999) che il limite d'una ragione si ottiene col fare zero la differenza tra essa e quella a cui sempre si accosta. Dunque 1°. per differenziar $b^2 + ax = u$, si avrà $\delta u = a\delta x$ (989), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = a$, ove non essendo differenza alcuna, sarà a il limite di $\frac{\delta u}{\delta x}$, e però anche $\frac{du}{dx} = a$, e $du = adx$. Quindi per differenziare $a^2 + bx + cy - fz = u$, sarà (989) $\frac{\delta u}{\delta x} = b + \frac{c\delta y}{\delta x} - \frac{f\delta z}{\delta x}$: ma $\frac{\delta u}{\delta x}$ divenendo $\frac{du}{dx}$, anche $\frac{\delta y}{\delta x}$ e $\frac{\delta z}{\delta x}$ debbon divenire $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$; dunque $\frac{du}{dx} = b + \frac{cdy}{dx} - \frac{fdz}{dx}$, e però $du = bdx + cdy - fdz$, cioè *le variabili al primo grado si differenziano come nel calcolo delle differenze finite, sostituendo ad esse le lor differenziali e scancellando le costanti se vi sono.*

1007. Dunque II°. per differenziare $x^n = u$, avremo prima $\delta u = nx^{n-1}\delta x + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x^2$ ec. (990), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = nx^{n-1} + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x$ ec., e poi fatta $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$ e $du = nx^{n-1}dx$ cioè *si differenzia una variabile a qualunque grado diminuendone l'esponente d'un'unità e moltiplicandola per il prodotto dell'esponente primitivo nella sua differenziale;* così $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$ ec.

1008. Da ciò si raccoglie che $d[\sqrt{(a+x)}] = d(a+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}}$, come può dedursi anche dalla dottrina dei limiti (992); $d[\sqrt[m]{(ay+y^2)}] = d(ay+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a+2y)dy}{2\sqrt{(ay+y^2)}}$, e in generale $d[\sqrt[m]{(ax+x^2)}] = \frac{(a+2x)dx}{m\sqrt[m]{(ax+x^2)^{m-1}}}$, cioè *si differenzia un radicale del grado* m *dividendo la differenziale della quantità sotto al segno per il prodotto dell' esponente* m *nella radice* m *di questa quantità alzata alla potenza* m − 1.

1009. Dunque III°. per differenziare $xy=u$, si avrà prima $\delta u = x\delta y + y\delta x + \delta y\delta x$ (996), onde $\frac{\delta u - x\delta y}{\delta x} = y + \delta y$, e poi fatto $\delta y = 0$, verrà $\frac{du - xdy}{dx} = y$, e $du = xdy + ydx$, cioè *si differenzia un prodotto di variabili sommando i prodotti della differenziale di ciascuna variabile per tutte l' altre*: così $d(z\varphi\omega) = \varphi\omega dz + z\omega d\varphi + z\varphi d\omega$; $d(x^3y) = 3yx^2dx + x^3dy$, ec.

1010. Dal che segue che volendo differenziare $\frac{x}{y} = u$, si avrà $x = uy$, $dx = \frac{xdy}{y} + ydu$ e $du = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ (996) cioè *si differenzia un rotto prendendo il prodotto del denominatore per la differenziale del numeratore, sottraendone quello del numeratore per la differenziale del denominatore, e dividendo il resto per il quadrato del denominatore*: così $d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2}$; $d\left(\frac{x^2}{a+x}\right) = \frac{(2ax+x^2)dx}{(a+x)^2}$; $d\sqrt{\frac{a+x}{x}} = \frac{-adx}{2x\sqrt{(ax+x^2)}}$, come risulta ancora dalla consueta dottrina dei limiti (991.992) ec.

1011. Dunque IV. per differenziar $sen\,x$ e $cos\,x$, fatto nelle formule (993) δx infinitesimo,

svanirà δx in confronto di x e $sen\,\delta x$ si confonderà con l'arco (707.II); dunque $d(sen\,x) = dx\cos x$, e $d(\cos x) = -dx\,sen\,x$, *cioè si differenzia il seno o coseno d'un arco moltiplicando la differenziale dell'arco positiva o negativa nel suo coseno o seno respettivamente.*

Parimente posto $sen\,x = u$, verrà prima (993) $\delta u = \delta x\cos x - \frac{\delta x^2\,sen\,x}{2}$ ec. onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \cos x - \frac{\delta x\,sen\,x}{2}$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \cos x$ e $du = d(sen\,x) = dx\cos x$; e $d(\cos x) = -dx\,sen\,x$ (993). Così $d(sen^m x) = m\,sen^{m-1} x dx\cos x$; $d(sen\,mx) = mdx\cos mx$; $d(\cos mx) = -mdx\,sen\,mx$; $d\,sen\,x\cos x = dx\cos^2 x - dx\,sen^2 x = dx\cos 2x$ (705); $d\sqrt{\frac{(1+\cos x)}{2}} = d(\cos\frac{1}{2}x)$ (705) $= -\frac{1}{2}dx\,sen\,\frac{1}{2}x$, $d[\sqrt{(a^2 - b\,sen\,x)}] = d(a^2 - b\,sen\,x)^{\frac{1}{2}} = \frac{-bdx\cos x}{2\sqrt{(a^2 - b\,sen\,x)}}$ ec.: e si osservi che se il raggio non fosse 1 ma a, avrebbe sempre luogo la regola data altrove (695).

1012. Dal che si ha 1°. $d(tang\,x) = d\frac{sen\,x}{\cos x} =$ (1010) $\frac{dx\cos^2 x + dx\,sen^2 x}{\cos^2 x} =$ (696) $\frac{dx}{\cos^2 x}$: 2°. $d(\cot x) = d\frac{1}{tang\,x} = \frac{-dx}{\cos^2 x\,.\,tang^2 x} =$ (699) $\frac{-dx}{sen^2 x}$: 3°. $d(\sec x) = d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \ldots \frac{dx\,tang\,x}{\cos x}$: 4°. $d(cosec\,x) = d\left(\frac{1}{sen\,x}\right) = \frac{-dx\cot x}{sen\,x}$: 5°. $d(sen.v.x) = d(1-\cos x) = dx\,sen\,x$: 6°. $d(\cos v.\,x) = d(1 - sen\,x) = -dx\cos x$.

1013. Onde se x è un arco qualunque e p il suo seno o coseno o tangente ec., sarà 1°. $dx = d$(*arco il cui seno è* p) $= \frac{d(sen\,x)}{\cos x} = \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$: 2°. $dx = d(arc.\cos p) = \frac{-d(\cos x)}{sen\,x} = \frac{-dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$: 3°. $dx = d(arc.\ tang\,p) = \cos^2 x\,.\,d(tang\,x) = \frac{d(tang\,x)}{1+tang^2 x} = \frac{dp}{1+p^2}$: 4°. $dx = d(arc.\cot p) = -sen^2 x.d(\cot x) = \frac{-d(\cot x)}{1+\cot^2 x} = \frac{-dp}{1+p^2}$: 5°. $dx = d(arc.\sec p) = \frac{\cos x\,.\,d(\sec x)}{tang\,x} = \frac{d(\sec x)}{\sec x\sqrt{(\sec^2 x - 1)}} = \frac{dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$: 6°. $dx = d(arc.\ cosec\,p) =$

$-\frac{sen\,x\,.\,d(cosec\,x)}{cot\,x}=\frac{-d(cosec\,x)}{cosec\,x\sqrt{(cosec^2 x-1)}}=\frac{-dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$: 7°. $dx=d(arc.\,sen\,v.\,p)=\frac{d(sen\,v.\,x)}{sen\,x}=\frac{dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}$: 8°. $dx=d(arc.\,cos\,v.\,p)=\frac{-d(cos\,v.\,x)}{cot\,x}=\frac{-dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}$.

1014. Dunque V°. per differenziare $lx=u$, si avrà prima (994) $\delta u=\frac{\delta x}{x}-\frac{\delta x^2}{2x^2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{1}{x}-\frac{\delta x}{2x^2}$ ec., e poi fatto $\delta x=0$, verrà $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$, e $du=d(lx)=\frac{dx}{x}$, cioè *si differenzia il logaritmo d' una variabile dividendo per essa la sua differenziale*; e poichè si ha $dx=xd(lx)$, è chiaro che *la differenziale d' una quantità x è il prodotto di essa nella differenziale del suo logaritmo*, il che dà un nuovo metodo di differenziare. Si noti ancora che per un sistema del modulo m, si avrebbe $d(lx)=\frac{mdx}{x}$; ma noi parleremo dei soli logaritmi naturali il cui modulo è 1: così $d(lx^n)=d(nlx)=\frac{ndx}{x}$; $d(lxy)=\frac{ydx+xdy}{xy}$; $d\left(l\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy}$; $d[l(a^2-x^2)]=\frac{-2xdx}{a^2-x^2}$; $d\left(l\frac{a+x}{a-x}\right)=\frac{2adx}{a^2-x^2}$; $d[l\sqrt[m]{(a+bx^n)^r}]=\frac{r}{m}d[l(a+bx^n)]=\frac{bnrx^{n-1}dx}{m(a+bx^n)}$; $d\left(l\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right)=(1010)\frac{dx}{x(1+x^2)}$; $d(cos\,lx)=(1011)-dlx\,sen\,lx=-\frac{dx}{x}sen\,lx$ ec. Del pari volendo differenziar potenze di logaritmi, si troverebbe $d(l^mx)=(1007)\,ml^{m-1}x.\frac{dx}{x}$; $d(x^m l^n x)=(1009)\,mx^{m-1}dx\,l^n x+nx^{m-1}\times dx\,l^{n-1}x=x^{m-1}dx\,l^{n-1}x\,(n+mlx)$: e per differenziare un logaritmo di logaritmo come $llx=u$, si farà $lx=t$ e sarà $llx=lt=u$, onde $dx=\frac{dt}{t}=\frac{d(lx)}{lx}=\frac{dx}{xlx}$.

1015. Dunque VI°. per differenziare $a^x=u$, si avrà prima (995) $\delta u=a^x\delta xla+\frac{a^x\delta x^2l^2a}{2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x}=a^xla+\ldots\frac{a^x\delta xl^2a}{2}$ ec., e poi fatto $\delta x=0$, verrà $\frac{du}{dx}=a^xla$ e $du=a^xdxla$: onde se sia $1=l\,2{,}7182818$ (361) $=le$, cioè se si chiami e il numero il cui logaritmo naturale è 1, sarà $d(e^x)=e^xdxle=e^xdx$; $d(e^{-mx})=-me^{-mx}dx$; e $d(e^{lx})=dx$ (361). Del pari $d(x^y)=(1014)\,x^yd(ylx)=x^y\left(dylx+\frac{ydx}{x}\right)$; e per differen-

ziare *gli esponenziali di second' ordine*, come $x^{y^2}=u$, si farà $y^2=t$ e sarà $x^{y^2}=x^t=u$, onde $x^t d(tlx)=x^{y^2}d(y^2lx)=x^{y^2}\left[y^2\left(dzlylx+\frac{2dylx}{y}\right)+\frac{y^2dx}{x}\right]=x^{y^2}y^2\left(dzlxly+\frac{2dylx}{y}+\frac{dx}{x}\right)$; se $x=y=e$, sarà $d(e^{e^2})=e^{e^2}e^2dz$.

1016. Dunque VII°. la differenziale prima delle funzioni $\varphi(x)$, $f(x,y)$, $F(ay+x^2)$ ec. sarà $dx\varphi'(x)$, $d(x,y)f'(x,y)$, $(ady+2xdx)F'(ay+x^2)$, ec.: e la seconda, prendendo costante dx, sarà $dx^2\varphi''(x)$ ec. (998).

1017. Dunque VIII°. per differenziar la seconda volta $x^n=u$, o per trovarne, presa dx costante, la differenziale seconda, si avrà primieramente (997) $\delta^2 u=n(n-1)x^{n-2}\delta x^2+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x^3$ ec. onde $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=n(n-1)x^{n-2}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x$ ec., e poi fatto $\delta x=0$, verrà $\frac{d^2u}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2}$ e $d^2u=n(n-1)x^{n-2}dx^2$: così $d^2(x^2)=2dx^2$; $d^2(x^3)=6xdx^2$ ec. Ma se dx non sia costante, siccome $d(x^2)=2xdx$ (1007) avremo $d^2(x^2)=d(2xdx)=$ (1009) $2dx^2+2xd^2x$: in generale, poichè $d(x^n)=nx^{n-1}dx$, sarà $d^2(x^n)=d(nx^{n-1}dx)=n(n-1)x^{n-2}dx^2+nx^{n-1}d^2x$. Similmente essendo $d(xy)=xdy+ydx$, sarà $d^2(xy)=xd^2y+2dxdy+yd^2x$; $d\left(\frac{ydx}{dy}\right)=dx+\frac{yd^2x}{dy}-\frac{ydxd^2y}{dy^2}$; e in generale, supposto $Y=ax^my^n+bx^py^q+$ec., $dY=Pdx+Qdy=(amy^nx^{m-1}+bpy^qx^{p-1}+\text{ec.})dx+(anx^my^{n-1}+bqx^py^{q-1}+\text{ec.})dy$, onde $P=amy^nx^{m-1}+bpy^qx^{p-1}+$ec., e $Q=anx^my^{n-1}+bqx^py^{q-1}+$ec., sarà $dP=[am(m-1)y^nx^{m-2}+bp(p-1)y^qx^{p-2}+\text{ec.}]dx+(amnx^{m-1}y^{n-1}+bpqx^{p-1}y^{q-1}+\text{ec.})dy$, e $dQ=(anmy^{n-1}x^{m-1}+bpqy^{q-1}x^{p-1}+\text{ec.})dx+[an(n-1)x^my^{n-2}+bq(q-1)x^py^{q-2}+\text{ec.}]dy$; d'onde è facile di avere il valor di $d^2Y=dPdx+Pd^2x+dQdy+Qd^2y$, e si vede frattanto che il coefficiente di

dy in dP è sempre lo stesso del coefficiente di dx in dQ. Prendendo costante dx o dy, vanno a zero i termini ove è d^2x o d^2y: e col metodo istesso si hanno le differenziali terze ec.

1018. Da quanto si è detto facilmente si comprenderanno le prime regole del calcolo integrale: così $\int adx = ax + C$ (1006); $\int nx^{n-1}dx = x^n + C$ (1007), e quindi $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + C$; dunque fatto $n - 1 = m$, sarà $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, cioè *si integra una differenziale monomia accrescendo d'un' unità l'esponente della variabile, e dividendola per la sua differenziale moltiplicata nell' esponente accresciuto*: così $\int \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}} = \int \frac{dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{dx(a+x)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}dx} = \sqrt{(a+x)} + C$ (1008) ec.

1019. Nel caso però di $m = -1$ la regola non ha luogo, ma allora $x^m dx = x^{-1}dx = \frac{dx}{x}$, e si sa che $\int \frac{dx}{x} = lx + C$ (1014): ciò si avverta per sempre.

1020. Talora si integra più facilmente per mezzo d'una sostituzione; così volendo $a\int x^{n-1} \times dx(b + x^n)^m$, fatto $b + x^n = z$ e però $nx^{n-1}dx = dz$ ed $x^{n-1}dx = \frac{dz}{n}$, verrà $a\int \frac{z^m dz}{n} = \frac{az^{m+1}}{n(m+1)} = \ldots \frac{a(b+x^n)^{m+1}}{n(m+1)} + C$ ec. Bisogna però preparar, se occorra, tali sostituzioni: così $dx\sqrt{(a^2x^2 + x^4)}$ e $(3ax^3 + 4x^4)dx\sqrt{(ax + x^2)}$ si ridurranno prima a $xdx\sqrt{(a^2 + x^2)}$ e a $(3ax^2 + 4x^3)dx\sqrt{(ax^3 + x^4)}$, e poi fatto $\sqrt{(a^2 + x^2)} = z$ e $\sqrt{(ax^3 + x^4)} = z$, si integrerà facilmente.

1021. In generale $\int x^n dx(a + bx^m)^r$ può aversi in due casi: 1°. se $n = m - 1$; poichè fatto $z = a +$

bx^m, sarà $dz = mbx^{m-1}dx = mbx^n dx$, onde $\int x^n \times dx(a+bx^m)^r = \int \frac{z^r dz}{bm} = \frac{(a+bx^m)^{r+1}}{(r+1)bm}$ (1018): II°. se r è numero intero e positivo; poichè sviluppando la differenziale e integrandone ciascun termine, si ha $\int (a^r x^n dx + ra^{r-1} bx^{m+n} dx + \text{ec.}) = C + \frac{a^r x^{n+1}}{n+1} + \frac{ra^{r-1} bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \text{ec.}$, espressione finita nel nostro caso (147).

1022. In due altri casi è integrabile la formula $x^n dx(a+bx^m)^r$. I°. Sia $\frac{n+1}{m} = s$, e fatto $a + bx^m = z$ onde $mbx^{m-1}dx = dz$ ed $x = \sqrt[m]{\frac{z-a}{b}}$, si avrà $x^n dx(a+bx^m)^r = \frac{z^r dz(z-a)^{s-1}}{mb^s}$, integrabile se $s = \frac{n+1}{m}$ è numero intero e positivo (1021): così

$$\int x^3 dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}} = \int \frac{z^{\frac{1}{3}}dz(z-a^2)}{2} = \int \left(\frac{z^{\frac{4}{3}}dz}{2} - \frac{a^2 z^{\frac{1}{3}}dz}{2}\right) = 3z^{\frac{4}{3}}\left(\frac{z}{14} - \frac{a^2}{8}\right) = \frac{3}{56}(4x^2-3a^2)\sqrt[3]{(a^2+x^2)^4} + C.$$

1023. II°. $x^n dx(a+bx^m)^r = x^n x^{mr} dx \left(\frac{a+bx^m}{x^m}\right)^r = x^{n+mr} dx(b+ax^{-m})^r$, integrabile se $\frac{n+mr+1}{-m} (= s)$ è numero intero e positivo (1022), nel qual caso fatto $b + ax^{-m} = z$, l'operazione di sopra dà $\frac{z^r dz(z-b)^{s-1}}{-ma^s}$: così $\int x^{-2} dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}} = \int x^{-7} dx \times (1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}} = \int \frac{z^{-\frac{5}{3}} dz(z-1)}{-3a^2} = \int \left(\frac{-z^{-\frac{2}{3}}dz}{3a^2} + \frac{z^{-\frac{5}{3}}dz}{3a^2}\right) = \frac{-z^{\frac{1}{3}}}{a^2} - \frac{z^{-\frac{2}{3}}}{2a^2} = -\frac{z^{\frac{1}{3}}}{a^2}\left(1 + \frac{1}{2z}\right) = -\frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{a}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{2(1+ax^{-3})}\right) + C.$

FIG.

1024. Infine è manifesto che $\int dx \cos x = \mathrm{sen}\, x + C$; $\int dx\, \mathrm{sen}\, x = -\cos x + C$ (1011) ec.

1025. Egualmente $\int \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}} = \mathrm{arc.\,sen}\, p + C$ (1013) ec., $\int \frac{dx\, l^n x}{x} = \frac{l^{n+1} x}{n+1} + C$; $\int \frac{dx}{x\, lx} = llx + C$; $\int \frac{dx}{x\, lx\, llx} = lllx + C$ (1014) ec.; come pure $\int a^x dx\, la = a^x + C$; $\int x^y \left(dy\, lx + \frac{y dx}{x} \right) = x^y + C$ (1015) ec.; e parimente $\int dx\, \varphi'(x) = \varphi(x)$; $\int d(x,y)\, f'(x,y) = f(x,y)$ ec. (1016). Tra poco daremo altre regole del calcolo integrale.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

Tangenti.

1026. Dei problemi da sciogliersi sopra una curva, il più semplice è di condurre una tangente a un punto della medesima. Ora abbiamo già trovato che se sia $AP = x$, $PM = y$,

185. $AM = s$, le ragioni $\frac{y}{PT}$ e $\frac{ds}{dx}$ sono i limiti di $\frac{\delta y}{\delta x}$ e di $\frac{\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}}{\delta x}$ (1001); dunque $\frac{y}{PT} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$ (1005), e la *suttangente* $PT = \frac{y dx}{dy}$; l'elemento della curva AMm o l'*arco infinitesimo* $Mm = \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; la *tangente* $MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \frac{y}{dy}\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{y ds}{dy} = t$; la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{y dy}{dx}$, la *normale* $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{y ds}{dx} = n$; e se per A si conduca AQ parallela a MP, si avrà $\frac{y dx}{dy} : \frac{y dx}{dy} - x (= AT) :: y : AQ = y - \frac{x dy}{dx}$. Con ciò si trovano i valori di queste varie linee in ciascuna curva, ricavando dalla sua equazion differenziata il valor di ciascuna formula differenziale, e per avere gli *asintoti* facendo x infinita in AT, AQ. Ecco gli esempj.

1027. I. L'equazione al circolo è $y^2 = a^2 - x^2$; dunque

$ydy = -xdx$, e $\frac{ydx}{dy} = -\frac{y^2}{x} = -\frac{(a^2 - x^2)}{x} = $ PT (il segno $-$ indica che la suttangente dev' esser presa nel senso stesso dell' ascissa, perchè nella costruzion della formula si è presa in senso contrario, e dall' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ si è avuto un risultato positivo (1001)): la sunnormale $\frac{ydy}{dx} = -x$; la normale $\sqrt{(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2})} = \sqrt{(y^2 + x^2)} = a =$ al raggio, come dev' essere; l' arco $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{y} = -\frac{ady}{x}$.

II. Nella parabola, $y^2 = px$; dunque $\frac{ydy}{dx} = \frac{p}{2}$, e $\frac{ydx}{dy} = 2x$.

III. Nell' ellisse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, dunque $ydy = \frac{b^2}{a^2}(-xdx)$, $\frac{ydy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2}$, ed $\frac{ydx}{dy} = \frac{-(a^2 - x^2)}{x}$.

IV. Nell' iperbola, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$; dunque $\frac{ydy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \times (a + x)$, e $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$. Si ha ancora AT $= \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ax}{a + x}$, espressione $= a$ quando x è infinita; come AQ $= y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{b^2x}{a^2y}(a + x) = \frac{b^2x}{ay} = \sqrt{\frac{b^2x}{2a + x}}$, si riduce a $\pm b$. Questi valori di AT, AQ danno gli asintoti (916).

V. Nella logaritmica, $x = A\, log\, y$ (942) e $dx = \frac{Ady}{y}$, onde $\frac{ydx}{dy} = A$, e però *la suttangente eguaglia il modulo* (943).

1028. VI. Sia $y^m = x^n a^{m-n}$; si avrà $nlx + (m - n)la = mly$, onde (1014) $\frac{ndx}{x} = \frac{mdy}{y}$, e la suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{mx}{n}$. Tutte le curve rappresentate dall' equazion generale $y^m = x^n \times a^{m-n}$ si chiaman parabole quando m, n son positive: se $m = 2$, $n = 1$, si ha $y^2 = ax$, equazione alla parabola ordinaria; se $m = 3$, $n = 1$, si ha $y^3 = a^2x$, equazione alla *prima parabola cubica*; se $m = 3$, $n = 2$, si ha $y^3 = ax^2$, equazione alla *seconda parabola cubica* ec. Che se n è negativa, le parabole divengono iperbole la cui equazione è $y^m = x^{-n} a^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{x^n}$, cioè $x^n y^m = a^{m+n}$; onde la suttangente di queste curve è in generale $-\frac{mx}{n}$, cioè dee prendersi nel senso stesso delle x. Se $m = n = 1$, si ha l' iperbola ordinaria la cui suttangente $= -x$ (920).

FIG. 156. VII, Sia la curva aQ a doppia curvatura: poichè in essa x è s, ed y è z (961), $\frac{ydx}{dy}$ diverrà $\frac{zds}{dz} = \frac{z}{dz}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Così se le sue equazioni sieno $y^2 = px, z^2 = qy$, verrà $z = \sqrt[4]{pq^2x}$ (961), $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, $dz = \frac{qdy}{2\sqrt{qy}} = \frac{pqdx}{4\sqrt[4]{p^3q^2x^3}}$, $\frac{z}{dz} = \frac{4x}{dx}$ e $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\frac{4x + p}{4x}}$; dunque la suttangente $\frac{z}{dz}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 4x\sqrt{\frac{4x + p}{4x}} = 2\sqrt{(4x^2 + px)}$.

159. 1029. Siano due curve BIOC, BMA tali che prolungando l'ordinate OP della prima fino alla seconda, la retta MO sia una funzione qualunque dell'arco BIO, e debba condursi la tangente MT. Immagino l'ordinata mp infinitamente vicina, ad MP, ed Mr parallela alla tangente TO: fatto BIO $= z$, MO $= u$, sarà (1005) $mr = du$, $rM = Oo = dz$, e $du : dz :: u : OT = \frac{udz}{du}$, che determina il punto T.

Sia per esempio $u = \frac{bz}{a}$, sarà $du = \frac{bdz}{a}$, ed $OT = \frac{udz}{du} = z =$ BIO. Se BIOC è un arco di circolo, AMB è una cicloide, e questa costruzione si è già data (948).

160. Nella quadratrice, fatto $\frac{cx}{r} = z =$ BE (950), onde $= \frac{x}{r} = \frac{z}{c}$, si ha (952) $y = \frac{z}{c} \cot z$; dunque ricordandosi che il raggio è quì r, verrà $dy = \frac{dz}{c}\cot z - \frac{r^2 zdz}{c\, sen^2 z}$, e $\frac{zdy}{dz}\left(= \frac{xdy}{dx}\right) = y - \frac{r^2 z^2}{c\, sen^2 z}$. Ma condotta un' ordinata infinitamente vicina ad MP, si trova $-\frac{xdy}{dx} =$ OT (presa $-dy$ perchè y diminuisce mentre x cresce); dunque $OT + y = CT = \frac{r^2z^2}{c\, sen^2 z} = \frac{cx^2}{sen^2 z} = \frac{c}{r^2}$ CM^2, giacchè CB (r) : sen BE ($sen\, z$) :: CM : MO (u); ma quando CM è nel punto D, si ha $CM = CT = CD = \frac{r^2}{c}$; dunque $CT = \frac{CM^2}{CD}$; onde presa CT terza proporzionale dopo la base CD e la retta CM, si avrà il punto T della tangente cercata.

161. 1030. Con un raggio CA descritto un circolo, sia una curva CKM tale che condotto il raggio CMN, la linea CM sia una funzione dell'arco ADEN; condurre una tangente MT al dato punto M. Immagino due raggi infinitamente vicini CMN, Cmn, e il piccolo arco Mr descritto dal centro C col raggio CM, e conduco CT perpendicolare a CM. Sia ora CM $= y$,

FIG.

ADBN $= x$, CA $= a$, e si avrà $a:y::Nn\,(dx):Mr=\frac{ydx}{a}$, e 161.
(955) $rm(dy):\frac{ydx}{a}::y:CT=\frac{y^2dx}{ady}$. Sia per esempio $y=\frac{ax}{\pi}$,
la curva CKM sarà la spirale d'Archimede, e si avrà $\frac{dx}{dy}=\frac{\pi}{a}$, $CT=\frac{y^2\pi}{a^2}=\frac{xy}{a}=MQO$ (955).

Sia la spirale iperbolica, in cui $xy=ab$; si avrà $xdy+ydx=0$, $ydx=-xdy$, $CT=-\frac{xydy}{ady}=-\frac{xy}{a}=-b$ (959). 163.

1031. Nella spirale logaritmica, ove l'angolo CMT è costante, immagino i raggi infinitamente vicini CM, Cm, e descritto dal centro C con un raggio CN un circolo, faccio CM $=y$, CN $=a$, e segnato sulla circonferenza del circolo un punto fisso A, suppongo l'ascissa AN $=x$, il che mi dà $a:dx::y:Mr=\frac{ydx}{a}$. Sia $tang\ Mmr=t=\frac{sen\ Mmr}{cos\ Mmr}=\frac{Mr}{mr}=\frac{ydx}{ady}$ onde $\frac{dx}{at}=\frac{dy}{y}=d(ly)$ (1014): dunque $ly=\frac{x}{at}+C$. Ora quest'equazione fa vedere 1°. che la spirale fa un'infinità di rivoluzioni intorno al suo centro tanto per accostarsene quanto per allontanarsene; poichè in luogo di x può sostituirsi successivamente $x+\pi$, $x+2\pi$, $x+3\pi$ ec. $-\pi+x$, $-2\pi+x$ ec., essendo π la circonferenza ANB; 2°. che facendo $C=lC'$, si avrà $l\frac{y}{C'}=\frac{x}{at}=\frac{x}{at}le$ (1015) ovvero $\frac{y}{C'}=e^{\frac{x}{at}}$ ed $y=C'e^{\frac{x}{at}}$; dunque nel punto A ove $x=0$, si ha $CD=y=C'$: 3°. che l'ascisse AN crescendo in progressione aritmetica x, $2x$, $3x$ ec., l'ordinate formano la progressione geometrica $C'e^{\frac{x}{at}}$, $C'e^{\frac{2x}{at}}$, $C'e^{\frac{3x}{at}}$ ec.: 4°. che se $t=\infty$, si ha $y=C'$, proprietà del circolo che taglia ad angoli retti tutti i suoi raggi come si sa. 164.

Evolute.

1032. Se un filo ABC applicato sopra una curva BC, nella cui origine B è la tangente AB, si sviluppi tenendolo sempre egualmente teso, la sua estremità A descriverà una curva AM in cui 1°. MC sarà eguale ad AB + l'arco BC; 2°. l'arco infinitesimo Mm potrà riguardarsi come un arco di circolo descritto dal centro C col raggio CM: 3°. onde nel punto C si riuniranno le due normali infinitamente vicine MN, mn: e 186.

FIG. 186. 4°. la tangente MC della curva BC sarà sempre normale alla curva AM. Ora la curva BC dicesi l'*Evoluta* della curva AM, ed MC è il *Raggio Osculatore* o *di Curvatura*, che si tratta di determinare, supposta nota la curva AM.

1033. Sieno MP, mp due perpendicolari all'asse AQ infinitamente vicine, e CO, Mr parallele allo stesso asse: fatta $MO=u$, $AP=x$, $PM=y$, $Mm=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=ds$, e $dxddx+dyddy=dsdds$, sarà (521) $dx:ds::u:MC=\frac{uds}{dx}$: ma mentre AP, PM, MO variano, MC non varia (1032); dunque differenziando $MC=\frac{uds}{dx}$, verrà $0=\frac{(udds+dsdu)dx-udsddx}{dx^2}$; e poichè $du=mr=dy$, si troverà $u=\frac{dsdxdy}{dsddx-dxdds}$ onde $MC=\frac{ds^2 dy}{dsddx-dxdds}=\frac{ds^3 dy}{ds^2 ddx-dx(dxddx+dyddy)}=\ldots$ $\frac{ds^3}{dyddx-dxddy}=\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Supposta costante ds, si ha $MC=\frac{dsdy}{ddx}=\frac{dy\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{ddx}$: supposta costante dy, si ha $MC=\frac{ds^3}{dyddx}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$; ma supposta, come si fa d'ordinario, costante dx, viene $MC=\frac{ds^3}{-dxddy}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, cioè dividendo tutto per dx^3, $MC=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}:\frac{-ddy}{dx^2}$.

1034. Per sapere in qual punto abbia una curva AM la massima curvatura, si cerca il *minimo* raggio dell'evoluta, giacchè le curvature dei circoli sono in ragione inversa dei raggi (595). Inoltre se la tangente in A è normale all'asse, si determina la retta BA o la distanza del vertice A dall'origine B dell'evoluta con fare $x=0$ nell'espressione del raggio MC. Finalmente per trovar l'equazione dell'evoluta, conduco CQ perpendicolare all'asse, e se $AB=a$, $BQ=t$, $CQ=z$, ho primieramente, presa dx costante, $MO=u=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ (1033) e $z=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}-y$; poi $Mr(dx):rm(dy)::MO:CO=PQ=\frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dxddy}$, ed $AP+PQ-AB=t=x-a+\frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dxddy}$: valori che coll'equazion della curva AM danno l'equazion dell'evoluta.

1035. Fin qui le ordinate eran parallele fra loro. Se par-

FIG. 187.

tono da un punto medesimo, immagino le infinitamente vicine BM, Bm, e le CO, Co perpendicolari ad esse: quindi descritto col centro B l'arco Mr, sia BM $= y$, M$r = dx$, $mr = dy$, M$m = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, MO $= u$; per i triangoli simili Mrm, CMO (521), si ha $dx : u :: dy :$ CO $\left(= \frac{udy}{dx}\right) :: ds :$ MC $= \frac{uds}{dx}$. Differenziando, presa dx costante, si avrà d(MC) $= 0$ (1033) e $du = -\frac{udds}{ds}$; di più OQ $= -d$(CO)(996) $= \frac{-dudy - uddy}{dx} = -\frac{uddy}{dx} + \frac{udydds}{dxds} = -\frac{udxddy}{ds^2}$ (1033), e BM(y) : Mr (dx) :: BO $(y - u) : \frac{-udxddy}{ds^2}$; onde $u = \frac{yds^2}{ds^2 - yddy}$, ed MC $= \ldots$

$\frac{yds^3}{ds^2dx - ydxddy} = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy} = y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \ldots$ $\frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{dx^2}$, che si riduce a $\frac{ds^3}{-dxddy}$ quando $y = \infty$ (poichè allora ds^2dx diventa 0) cioè quando l'ordinate son parallele, come già abbiamo trovato. E se nei valori di CO, MC non si fosse presa dx costante, si sarebbe avuto MC $= \frac{yds^3}{ds^2dx - ydxddy + ydyddx}$. Ecco alcuni esempj.

1036. Sia l'equazion generale alle sezioni coniche $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$ (894.911), che fatto $2a = \infty$ è alla parabola, e fatto $2a = p$ è all'iperbola equilatera e al circolo. Differenziando due volte, presa dx costante, si ha $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{a}$ e $2yddy + 2dy^2 = \pm\frac{pdx^2}{a}$, onde $dy = \frac{pdx(a \pm x)}{2ay}$, e $ddy = -\frac{p^2dx^2}{4y^3}$, sostituiti i valori di dy e poi di y^2; dunque MC $\left(= \frac{ds^3}{-dxddy}\right) = \frac{4y^3ds^3}{p^2dx^3} = \frac{4y^3}{p^2dx^3}\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3} = \frac{4y^3}{p^2dx^3}\sqrt{(dx^2 + \frac{p^2dx^2(a \pm x)^2}{4a^2y^2})^3} = \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{(4a^2y^2 + p^2(a \pm x)^2)^3} =$ (1026) $\frac{4z^3}{p^2} =$ (887.899.915) $\frac{pz^3}{2q^3}$ in tutte le sezioni coniche.

1037. Poichè in queste la tangente nel vertice è normale all'asse, se in MC si faccia $x = 0$ e perciò in forza dell'equazion generale, $y = 0$, sarà AB $= \frac{1}{2a^3p^2}\sqrt{p^6a^6} = \frac{p}{2}$ (1034).

187. Nel circolo ove $p = 2a = 2n$ (496), si ha $MC = n = \frac{p}{2} = a = AB$; onde i raggi osculatori son tutti eguali al raggio del circolo che ha dunque per evoluta il suo centro.

188. Nell' ellisse l'evoluta ha quattro rami BD, Db, bd, dB eguali, con quattro punti d'inflessione. Se in MC si faccia $x = a$, verrà $ED = \frac{a}{p}\sqrt{2ap}$, metà del parametro dell' asse minore (894).

189. Nella parabola, poichè $MN^2 = TN \times PN$ (559) e $PN = \frac{p}{2}$ (887), sarà il raggio $MC \left(= \frac{4MN^3}{p^2}\right) = NT \times \frac{MN}{PN}$ ed $MN : NP :: MC : NT = CO = PQ = 2x + \frac{p}{2}$ (1026.II); dunque $QN = 2x$, $AQ = 3x + \frac{p}{2} = 3x + AB$, onde $BQ = 3x$, il che dà una costruzione assai semplice per determinare il centro C del circolo osculatore. Prendete $BQ = 3AP$, e condotta CQ perpendicolare ad AQ, il punto di concorso C delle due MC, CQ sarà il centro cercato.

Per trovar l'equazione dell' evoluta, sia $BQ (= 3x) = t$, $CQ = z$, si avrà $NP \left(\frac{p}{2}\right) : PM (y) :: NQ (2x) : QC = z = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$ onde $\frac{pz^2}{16} = x^3 = \frac{t^3}{27}$, e $t^3 = \frac{27pz^2}{16}$; cioè *l'evoluta della parabola ordinaria è una seconda parabola cubica il cui parametro è $\frac{27}{16}$ di quello della data*. Ora nell' evolute, $AB + BC = MC$ (1032); dunque $BC = MC - \frac{p}{2} = \frac{4MN^3}{p^2} - \frac{p}{2}$: ma $MN = \sqrt{(px + \frac{p^2}{4})}$ (887) $= \frac{p}{2}\sqrt{(\frac{4x}{p} + 1)}$; dunque facendo $\frac{27}{16}p = a$ e perciò $MN = \frac{8a}{27}\sqrt{(\frac{9t}{4a} + 1)}$, si ha $BC = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9t}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$, espressione d'un arco qualunque della seconda parabola cubica la cui equazione è $t^3 = az^2$.

190. 1038. Sia la cicloide ordinaria AMBa col circolo genitore BOD del diametro $BD = 2a$, con l'ordinata $MP = y$ e con l'ascissa $PB = x$: si avrà per la nota analogia (947) mq (dy) : qM (dx) :: OP $(\sqrt{(2ax - x^2)})$: PB (x); dunque $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazion differenziale della cicloide: e se si faccia piuttosto $AF = x$, $FM = DP = y$ onde $PB = 2a - y$, verrà $dx : dy :: \sqrt{(2ay - y^2)} : 2a - y$, e però $dy = dx\sqrt{\frac{2a - y}{y}}$, altra equazion differenziale della cicloide. Stando alla prima e

posta dx costante, avremo differenziando, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$. Dunque $MC = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a(2a-x)} = 2OD$: ora MNC è parallela a OD poichè (946) la tangente MT è parallela a OB; dunque OD = MN = NC; quindi 1°. nel punto A si ha $x = 2a$ ed MC = o, onde il raggio osculatore in A è zero; e perciò l' evoluta passa per A: 2°. questo raggio nel punto B è la retta BE = 2BD.

190.

1039. Per determinar l'evoluta ACE, compito il rettangolo AE, sul lato AB′ = DE = BD come diametro si descriva un semicircolo AQB′, si conduca AQ parallela a CM e si unisca C e Q; posto ciò, l'angolo NAQ = NDO; dunque OD = AQ (504. 482) e l'arco OID (o la retta AN) = all' arco ALQ. Ora OD = CN; dunque CN = AQ, e però CQ = AN (528) = all' arco ALQ, proprietà distintiva della cicloide ordinaria; onde l' evoluta ACE è una semicicloide eguale ad AMB. Si sarebbe trovato lo stesso cercando direttamente l' equazione dell' evoluta come abbiamo spiegato (1034).

L' arco AC = MC = 2AQ; dunque *un arco qualunque di cicloide è doppio della corda corrispondente del circolo genitore*. Così MB = 2OB, AMB = 2BD, e la cicloide intera ABa è quadrupla del diametro BD.

1040. Sia la spirale logaritmica ADM in cui $t = \frac{ydx}{ady}$ (1031) ovvero $dy = \frac{dx}{t}$, fatto y il raggio arbitrario a: differenziando, supposta dx costante, si avrà $ddy = o$, e il raggio osculatore $MC = \frac{yds}{dx}$ (1035); onde condotte AC, MC normali ad MA e alla tangente in M, il loro punto d' incontro C sarà all' evoluta: perchè Mr (dx) : Mm (ds) :: AM (y) : MC.

191.

1041. L' angolo ACM = AMT (559); onde l' evoluta ABC è la medesima spirale logaritmica ADM. Quindi (1032) la tangente MC è eguale alla spirale ABC, benchè questa faccia un' infinità di rivoluzioni intorno al punto A; dunque del pari condotta AT perpendicolare ad AM, sarà MT = all' arco ADM; onde *la spirale logaritmica e la cicloide sono evolute di se medesime*.

Massimi e Minimi, e Punti d' Inflessione.

1042. L' ordinata MP d' una curva BM essendo maggiore o minore di quelle che la precedono ($p'm'$) e la seguono (pm), si chiama *Massima* o *Minima*, e il *Metodo dei massimi e dei minimi* insegna a determinar queste quantità.

193.

1043. Se CM è il raggio del circolo osculatore nel punto 193. M, l'ordinata MP sarà maggiore o minore di ogn' altra ordinata corrispondente a qualche punto dell' arco KMD descritto col raggio CM; onde MP (prolungata nel caso del *minimo*) passa per il centro del circolo osculatore; e però la tangente in M è parallela all' asse AP, e quindi la suttangente $\frac{ydx}{dy} = \infty$, dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\infty} = 0$. Può anche succedere che l' ordinata 195. PM sia un massimo o un minimo quando la tangente in M è normale all' asse; allora $\frac{ydx}{dy} = 0$ e però $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{0} = \infty$. Ora y 193. può riguardarsi come una funzione dell' ascissa $AP = x$; e però per sapere in qual caso ella diventa un massimo o un minimo, si differenzierà l'equazione tra y ed x, e si eguaglierà a zero o all' infinito il rotto $\frac{dy}{dx}$; l'equazione che ne risulterà, combinata con la prima, darà dei valori di y, x i quali se non sieno assurdi, determineranno il massimo o il minimo.

1044. Ma per distinguer l' uno dall' altro, sia $AP = x$, $PM = y$, $Pp = ndx = a$, $Pp' = -ndx = -a$; dunque (986) $pm = Y = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{2dx^2} + $ ec., e $p'm' = Y = y - \frac{ady}{dx} + \frac{a^2d^2y}{2dx^2} - $ ec. Supposta dunque a infinitesima (986) e $\frac{dy}{dx} = 0$ (1043), svaniranno tutti i termini delle due serie dopo il terzo (273) e verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^2d^2y}{2dx^2}$: parimente se a un tempo stesso si abbia $\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3}$, verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^4d^4y}{2.3.4dx^4}$: se a un tempo stesso si abbia $\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^5y}{dx^5}$, verrà $pm = p'm' = y + \frac{a^6d^6y}{2.3.4.5.6dx^6}$, ec. ec. onde secondochè $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^6y}{dx^6}$ ec. sarà positiva o negativa, ambedue l'ordinate contigue pm, $p'm'$ supereranno o saranno superate da $PM = y$, che perciò nell' un caso sarà un minimo, nell' altro un massimo (1042). In generale, *essendo impari il numero dei rotti* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ec. *che vanno a zero, il seguente se è negativo dà un massimo, se è positivo dà un minimo*. All' incontro se con $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ resti $\frac{d^3y}{dx^3}$, verrà $pm = y + \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$ e $p'm' = y - \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$, cioè $pm > PM$ e $p'm' < PM$,

FIG. 193.

onde PM non sarà nè massimo nè minimo (1042) ec. Ecco gli esempj.

1045. I°. Dividere una retta $2a$ in due parti il cui rettangolo sia un massimo o un minimo. Chiamata x una parte, l'altra $2a - x$, l'espression del massimo o del minimo sarà $2ax - x^2$. Sia dunque $y = 2ax - x^2$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = 2a - 2x = 0$, e però $x = a$. Per saper se la soluzione dà un massimo o un minimo, differenzio l'equazione $\frac{dy}{dx} = 2a - 2x$, ed ho $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, quantità negativa, onde il valore $x = a$ dà un *massimo* $y = a^2$. In generale $y = x^m (a - x)^n$ è un massimo o un minimo se $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} (a - x)^n - nx^m (a - x)^{n-1} = 0 = m(a - x) - nx$. Allora $x = \frac{am}{m + n}$, valore che dà un massimo perchè $\frac{ddy}{dx^2} = -m - n$.

II°. Trovar due diametri conjugati dell' ellisse che faccian tra loro il minimo angolo. Sieno m, n i diametri, p l'angolo che fanno tra loro, e si avrà (905) $mn\, sen\, p = ab$, ed $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, onde $sen\, p = \frac{ab}{n\sqrt{(a^2 + b^2 - n^2)}}$, $\frac{d\, sen\, p}{dn} = \frac{-ab(a^2 + b^2 - 2n^2)}{n^2\sqrt{(a^2 + b^2 - n^2)^3}} = 0$, ed $n = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = m$. Il denominatore eguagliato a zero, cioè il rotto $\frac{d\, sen\, p}{dn}$ eguagliato all'infinito (1043), darebbe $n^2 = a^2 + b^2$ ed $m = 0$, valori che non servono. Sicchè i diametri conjugati ed eguali dell'ellisse forman con la loro intersezione il minimo angolo cercato il cui seno è $sen\, p = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2}{a:b + b:a}$. Perciò se $a : b = tang\, u = tang\, CaB$ (741), sarà $sen\, p = \frac{2\, tang\, u}{1 + tang^2 u} = \frac{2\, tang\, u}{sec^2 u} =$ (701) $2\, sen\, u \cos u = sen\, 2u$, onde $p = 2u = Bab$.

138.

III°. Di tutte le parabole del cono retto DCB, determinar la massima in superficie. Sia $BD = a$, $CD = b$, $PB = x$, e sarà $a : b :: x : AP = \frac{bx}{a}$, $PM = \sqrt{(ax - x^2)}$ (563), la superficie $mAMPm = \frac{4bx}{3a}\sqrt{(ax - x^2)} = y$ (930); dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx(3a - 4x)}{3a\sqrt{(ax - x^2)}} = 0 = 3a - 4x$; onde $x = \frac{3a}{4}$, che è un *massimo*, perchè $\frac{ddy}{dx^2} = -4$. Il denominatore eguagliato a zero dà due *minimi* coi due valori $x = 0$, $x = a$ (1043), che riducon la curva ad un punto o ad una retta.

196.

FIG. 197. IV°. Di tutti i triangoli della stessa base AB e dello stesso perimetro, qual è quello della massima superficie? Sia q il semiperimetro, la base $AB = a$, il lato $AM = x$, sarà $MB = 2q - a - x$. Dunque chiamando y la superficie, si avrà (615) $y = \sqrt{[q(q-a)(q-x)(a+x-q)]}$, $2ly = lq + l(q-a) + l(q-x) + l(a+x-q)$, $\frac{2dy}{y} = \frac{-dx}{q-x} + \frac{dx}{a+x-q}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{a+x-q} - \frac{1}{q-x}\right) = 0$; dunque $a + x - q = q - x$, $2q - a - x = x$; e perciò il triangolo cercato è isoscele.

1046. Per trovare ora in quali casi una funzione Y di due variabili x, y indipendenti tra loro, divenga un *massimo* o un *minimo*, supponghiamo che y abbia già il valor proprio a render la funzione Y un *massimo* o un *minimo*; si tratterà dunque di trovare il valor conveniente di x, cioè bisognerà differenziar la funzione Y facendo variare x sola, ed eguagliare a zero il coefficiente di dx. Così per aver y si differenzierà la funzione Y facendo variare y sola, ed eguagliando il coefficiente di dy a zero. Onde se $dY = Pdx + Qdy$, si deve aver $P = 0$, $Q = 0$, equazioni che daranno i valori di x e di y proprj a render la funzione Y un *massimo* o un *minimo*. Per distinguer l'uno dall'altro, posto $dY = Pdx + Qdy$ e prese dx, dy costanti, sarà $d^2Y = dPdx + dQdy$; onde fatto $dP = Adx + Bdy$, $dQ = Bdx + Cdy$ (1017), verrà $d^2Y = (Adx + Bdy)dx + (Bdx + Cdy)dy$: ma si è visto che dee aversi $P = 0$ è però $dP = Adx + Bdy = 0$; dunque $dx = \frac{-Bdy}{A}$ e $d^2Y = dQdy = (Bdx + Cdy)dy = \left(-\frac{B^2}{A} + C\right)dy^2$ ovvero $\frac{d^2Y}{dy^2} = C - \frac{B^2}{A}$. Ora quando si ha una sola variabile x o y, e però $y = 0$ oyvero $x = 0$, viene $dY = Pdx$; $d^2Y = dPdx = Adx^2$ ovvero $dY = Qdy$, $d^2Y = dQdy = Cdy^2$, e si è detto che Y è *minimo* o *massimo* se $A > 0$ e $C > 0$ ovvero $A < 0$ e $C < 0$ (1044); dunque se si abbiano x, y insieme, sarà Y un *minimo* quando $A > 0$, $C > 0$ ed inoltre $C - \frac{B^2}{A} > 0$, ovvero $AC > B^2$: e sarà un *massimo* quando $A < 0$, $C < 0$ ed inoltre $C - \frac{B^2}{A} < 0$ ovvero (giacchè ora A, C son negativi) $-C + \frac{B^2}{A} < 0$ cioè $AC > B^2$ come nel caso del *minimo*. Questa teoria facilmente si estende alle funzioni di tre, quattro ec. variabili.

Si voglia dividere il numero dato $3a$ in tre parti il cui prodotto sia un *massimo*. Chiamando x, y due di queste parti, la terza sarà $3a - x - y$, ed avremo $xy(3a - x - y)$, la cui differenziale è $(3a - 2x - y)ydx + (3a - 2y - x)xdy$. Eguagliando a zero separatamente i coefficienti di dx, dy, si

avrà $3a-2x-y=0=3a-2y-x$, onde $y=x=a$; e poichè $P=(3a-2x-y)y$, $dP=-2ydx+(3a-2x-2y)dy$, $A(=-2y=-2a)<0$, $B=3a-2x-2y=-a$, e poi $Q=(3a-2y-x)x$, $dQ=-2xdy+(3a-2x-2y)dx$, $C(=-2x=-2a)<0$, sarà $AC(=4a^2)>B^2(=a^2)$, e perciò dividendo il dato numero in tre parti eguali, il loro prodotto darà un *massimo*.

Tra tutti i triangoli isoperimetri vogliasi quello che ha maggior superficie. Sieno x, y due de' suoi lati, $2q$ il perimetro, $2q-x-y$ sarà l'altro lato, e la superficie $Y=\sqrt{[q.(q-x)(q-y)(x+y-q)]}$ (615.VI.); dunque $2lY-lq=l(q-x)+l(q-y)+l(x+y-q)$, e $dY=\frac{Ydx}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-x}\right)+\frac{Ydy}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-y}\right)$. Eguagliando a zero i coefficienti di dy, dx, si ha $x+y-q=q-y=q-x$; onde $x=y=\frac{2q}{3}=2q-x-y$, e il triangolo ricercato è equilatero.

1047. Serve questo metodo a determinare ancora i *punti d' inflessione* (873); poichè nei due triangoli infinitesimi $mm'r$, $m'or'$ d'una stessa base dx, l'angolo $mm'r(=mtP)<m'or'(=m't'P)$, onde anche $mr<m'r'$ (741) cioè la differenza dy dell'ordinata che da A scorre in PM, e da PM o procede avanti o torna indietro, scema sempre nella concavità della curva; e potrebbe dimostrarsi nel modo stesso che sempre cresce nella sua convessità. Dunque nel punto M d' inflessione la differenza dy diviene un minimo o un massimo, cioè (1043) $ddy=0$ ovvero ∞: ma il raggio osculatore MC, presa dx costante, diviene infinito se $ddy=0$, e diviene zero se $ddy=\infty$ (1033. 1035); dunque *nel punto d' inflessione il raggio osculatore è sempre infinito o nullo*, e perciò $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}:-\frac{ddy}{dx^2}=\infty$ ovvero $=0$, e $\frac{-ddy}{dx^2}=0$ ovvero ∞. Si differenzierà dunque due volte l'equazion della curva, posta dx costante, e il valor di $\frac{-ddy}{dx^2}$ eguagliato a zero o all' infinito, darà i valori di x, y convenienti ad uno o più punti d'inflessione. Che se l'ordinate partano da un punto fisso, si avrà $\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2}=0$ ovvero ∞ (1035).

194.

1048. Per vedere se $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ dà veramente un' inflessione in M, condottavi la tangente Tt e presa $Pp=Pp'=a$, alzo l'ordinate pvm, $p'm'v'$ e da M, v' le normali Mr, $v'r'$. I trian-

192.

192. goli simili MTP, $vMr = Mv'r'$ danno TP $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$: PM (y) : : $Mr\ (a) : rv = r'M = \frac{ady}{dx}$, onde $pv = y + \frac{ady}{dx}$ e $p'v' = Pr' = y - \frac{ady}{dx}$. Or fatta $\frac{d^2y}{dx} = 0$ ed a negativa in Pp' ed infinitesima, si ha come sopra (1044) $pm = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$ e $p'm' = y - \frac{ady}{dx} - \frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}$; dunque se $\pm \frac{d^3y}{dx^3}$ non sia zero, verrà (col segno +) $pm > pv$ e $p'm' < p'v'$, o (col segno −) $pm < pv$ e $p'm' > p'v'$; dunque degli archi Mm', Mm l'uno sarà di quà, l'altro di là da Tt, e si avrà in M un'inflessione (853), ciò che non potrebbe concludersi se fosse $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ec. In generale, *essendo impari il numero dei rotti* $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ec. *che vanno a zero, il seguente determinerà l'inflessione*: in altro caso ella non vi sarà. Ecco gli esempj.

I. Sia la prima parabola cubica in cui $y^3 = a^2x$; si avrà $dy = \frac{dx}{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \frac{2}{9x}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}} = 0$ nel punto d'inflessione; dunque $x = 0$, e questo punto è nell'origine.

II. Sia la concoide in cui $y = \frac{b+x}{x}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ (937); si avrà $dy = \frac{-dx(a^2b + x^3)}{x^2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \frac{a^2x^3 + 3a^2bx^2 - 2a^4b}{(a^2x^3 - x^5)\sqrt{(a^2 - x^2)}} = 0$; onde $x^3 + 3bx^2 - 2a^2b = 0$, equazione che risoluta (392) dà per x il valor conveniente al punto d'inflessione.

III. Sia la curva dell'equazione $y - a = (x - a)^{\frac{3}{5}}$; si avrà $dy = \frac{3dx}{5\sqrt[5]{(x-a)^2}}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$, che eguagliato a zero, nulla fa conoscere; ma eguagliato all'infinito dà $x = a = y$, valori corrispondenti al punto d'inflessione.

Rotti i cui termini si riducono a zero.

1049. Si trovan talvolta dell'espressioni algebriche in forma di rotti che si riducono a $\frac{0}{0}$, come $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ quando $x = a$. Questi risultati apparentemente indeterminati, son suscettibili di valori determinati; ed ecco un metodo per trovarli.

Sia $\frac{P}{Q}$ una funzione di x il cui numeratore e denominatore si riducono a zero quando $x=a$. Si sostituisca $a\pm dx$ ad x in P ed in Q (si prende — se + guida ad assurdo) e trascurati i termini ove è dx^2, dx^3 ec. come infinitesimi rispetto a dx, si avrà il valore del rotto proposto, se pure i termini del nuovo rotto non si annullino nuovamente. Ecco gli esempj.

I. Cerco il valor di $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ quando $x=a$. Quì $P=x^2-a^2$, e $Q=x-a$; dunque $\frac{(a+dx)^2-a^2}{a+dx-a}=\frac{2adx}{dx}=2a$.

II. La somma della progressione ∺ $x : x^2 : x^3 \ldots . x^n$, è $\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$ il cui valore quando $x=a=1$, sarà .... $\frac{(1+dx)^{n+1}-1-dx}{1+dx-1}=n$.

III. Sia $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ ed $x=a$. Si avrà $\sqrt{(2a^3x-x^4)}=a\sqrt{(a^2-2adx)}=a(a-\frac{2adx}{2a}$ ec. (180)), $-a\sqrt[3]{a^2x}=-a\sqrt[3]{(a^3+a^2dx)}=-a(a+\frac{a^2dx}{3a^2}$ ec.), $a-\sqrt[4]{ax^3}=a-\sqrt[4]{(a^4+3a^3dx)}=a-(a+\frac{3a^3dx}{4a^3}$ ec.); riducendo si trova $\frac{-4adx}{3\times-\frac{3dx}{4}}=\frac{16a}{9}$.

1050. Ma se succeda che anche il nuovo rotto divenga $\frac{0}{0}$, si passerà a considerar dx^2, dx^3, ec., finchè si abbia in quantità finite uno almeno dei suoi termini.

Es. Differenziata l' equazione $x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$, si divida per $\frac{dx}{x}$, e verrà $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}$ quando $x=1$, e sostituendo $1+dx$ ad x, si ha nuovamente $\frac{0}{0}$: ma se non si trascuri dx^2, come si fece in principio (1049), verrà . . . . $\frac{n(n+2)(n+1)dx^2-(n+1)^2ndx^2}{2dx^2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

1051. Con ciò si trova nei casi particolari il valore di

$0\times\infty$ e di $\infty-\infty$; poichè $0\times\infty=0\times\frac{a}{0}=\frac{0}{0}$, ed $\infty-\infty=\frac{a}{0}-\frac{b}{0}=\frac{0}{0}$; così se $x=1$, si ha $\frac{1}{lx}-\frac{x}{lx}=\infty-\infty$, onde sostituendo $1+dx$ ad x, verrà $\frac{-dx}{l(1+dx)}=(354)\frac{-dx}{dx\ \text{ec.}}=-1$.

1052. Possono anche determinarsi i punti multipli delle curve (872) e la loro moltiplicità; poichè differenziando per esempio l'equazione $a(y-b)^2-x(x-a)^2=0$, si trova $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-a)(3x-a)}{2a(y-b)}=\frac{0}{0}$ quando $x=a, y=b$; sostituendo dunque $a+dx$ ad x, e $b+dy$ ad y, trascurato dx^3, verrà $\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}$, $\frac{dy^2}{dx^2}=1$, e $\frac{dy}{dx}=\pm1$: ma $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente dell'angolo che la curva (o la sua tangente) fa con l'asse delle x (712); dunque se questa tangente ha più valori, apparterrà a più rami di curva che passano per uno stesso punto; e nel nostro caso all'ascissa $x=a$ corrisponderà un'ordinata $y=b$ che incontra la curva in un punto multiplo, ove son due tangenti eguali al raggio 1, e che fanno perciò un angolo di 45° con la retta condotta per il punto multiplo parallelamente all'asse.

1053. Questo metodo per valutare $\frac{0}{0}$ è generale; quello di Bernoulli che prescrive di differenziar separatamente quante volte occorre, il numeratore e il denominator del rotto non sempre riesce: così dato $\sqrt{\left(\frac{2a^2-3ax+x^2}{a-x}\right)}$ e supposto $x=a$, dal nostro metodo se ne avrà subito il valore $\sqrt{a}$, che da quello di Bernoulli non si otterrà giammai.

Teorema di Taylor.

1054. Già si è detto (986) che supposta Y una funzione di x, se questa divenga $x\pm ndx$ e sia $ndx=a$ quantità finita, si avrà $Y=y\pm\frac{ady}{dx}+\frac{a^2d^2y}{2dx^2}\pm\frac{a^3d^3y}{2.3dx^3}+\frac{a^4d^4y}{2.3.4dx^4}\pm$ ec., presa dx costante. Questa serie si chiama il *Teorema di Taylor* dal dotto Geometra Inglese che la trovò.

1055. Per vederne la verità in un esempio semplice, suppongasi $y=xx-2x+1$, e si cerchi il valor di questa quantità sostituendo $x+1$ ad x. Avremo $a=1$, $\frac{dy}{dx}=2x-2$, $\frac{ddy}{dx^2}=2$, $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ ec.; dunque y si cangia in $xx-2x+1+2x-2+1=xx$, il che è evidente.

1056. Sia $y = x^m$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$, $\frac{ddy}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$ ec. Dunque se x diviene $x + a$, y diventerà $(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} +$ ec.; facendo $a = \frac{-bx}{x+b}$ e però $x + a = \frac{x^2}{x+b}$, avremo $(x+a)^m = \frac{x^{2m}}{(x+b)^m} = x^m - \frac{mbx^m}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2x^m}{2(x+b)^2} -$ ec. ovvero $\frac{1}{(x+b)^m} = (x+b)^{-m} = x^{-m} - \frac{mx^{-m}b}{x+b} + \frac{m(m-1)x^{-m}b^2}{2(x+b)^2} -$ ec. $= x^{-m}\left(1 - \frac{mb}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2}{2(x+b)^2} - \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{2.3(x+b)^3} +\text{ ec.}\right)$, serie che ha un numero finito di termini quando m è un intero: se $n = -m$, si avrà $(x+b)^n = x^n\left(1 + \frac{nb}{x+b} + \frac{n(n+1)b^2}{2(x+b)^2} +\text{ ec.}\right)$. Si posson verificar queste formule riducendo i rotti $\frac{1}{x+b}$, $\frac{1}{(x+b)^2}$, ec. in serie, che serviranno a trovar le radici dei numeri prontamente perchè posson sempre rendersi convergentissime.

1057. Sia ora $y = lx$, onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{xx}$ ec., e si avrà $l(x \pm a) = lx \pm \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} \pm \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} \pm$ ec. Sia $\pm a = \frac{\mp xx}{b \pm x}$, e avremo $l(x \pm a) = l\frac{bx}{b \pm x} = lbx - l(b \pm x) = lx \mp \frac{x}{b \pm x} - \frac{x^2}{2(b \pm x)^2} \mp \frac{x^3}{3(b \pm x)^3} -$ ec. Dunque $l(b \pm x) = lb \pm \frac{x}{b \pm x}\left(1 \pm \frac{x}{2(b \pm x)} + \frac{x^2}{3(b \pm x)^2} \pm \text{ec.}\right)$, serie convergenti che facilitan molto il calcolo dei logaritmi.

1058. Sia $y = b^x$; avremo $\frac{dy}{dx} = b^x lb$, $\frac{ddy}{dx^2} = b^x l^2 b$ ec.; dunque $b^{x+a} = b^x(1 + alb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} +$ ec.$)$, e perciò $b^a = 1 + alb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} +$ ec. (360).

1059. Sia y un arco il cui seno è x che indicheremo con $y = \text{A} \, sen \, x$; si avrà $x = sen \, y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos \, y} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen \, y}{cos^3 y} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$ ec.; dunque A $sen \, (x \pm$

$a)=\text{A}\,sen\,x \pm \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{a^2 x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \pm \frac{a^3(1+2x^2)}{6\sqrt{(1-x^2)^5}} + \text{ec.} =$ $\text{A}\,sen\,x \pm \frac{a}{cos\,y} + \frac{a^2 x}{2cos^3 y} \pm \text{ec.}$

1060. Queste serie sono attissime a calcolar l'arco che corrisponde a un seno dato. Preso dalle Tavole l'arco più vicino, la differenza del suo seno x dal dato renderà a piccolissima, e si avrà l'arco cercato aggiungendo $\pm \frac{a}{cos\,y} + \frac{a^2 x}{2\,cos^3 y}$ ec. a quello il cui seno è x. Osservate 1°., che la serie è sì convergente che i due primi termini danno i minuti quinti in circa: 2°. che l'arco è espresso in parti del raggio 1, e per ridurle a secondi, a terzi ec., bisogna dividerle per la lunghezza dell'arco di 1'' (608), posto il logaritmo dell'unità $= 10$: il quoziente dà i secondi, e di quì i terzi, i quarti ec.

1061. Esemp. Sia un'iperbola della potenza 1 e b l'angolo fatto dai suoi asintoti; sarà $sen\,blz$ la superficie d'un trapezio asintotico compreso tra l'ordinate 1, $\frac{1}{z}$ (933), e questo spazio rappresenterà il logaritmo tavolare dell'ascissa z quando sia il modulo $0{,}4342944819 = sen\,b$ (934); cerchiamo dunque l'angolo b. Il più prossimo a 0,4342 ec. nelle Tavole ordinarie è $25°,44' = y$, $sen\,y = x = 0{,}4341833$, onde $a = sen\,b - sen\,y = 0{,}0001112$, $cos\,y = \sqrt{(1-x^2)} = 0{,}9008245$, e i due primi termini $\frac{a}{cos\,y} + \frac{a^2 sen\,y}{2\,cos^3 y} = \frac{a}{2\,cos^3 y}(2cos^2 y + a\,sen\,y) = \frac{a}{2\,cos^3 y}(1 + cos\,2y + a\,sen\,y) = \frac{a}{2\,cos^3 y}(1 + cos\,51°,28' + a\,sen\,25°,44') = \frac{a}{2\,cos^3 y} \times 1{,}6230180$, il cui logaritmo è 6,0914775; togliendo quello dell'arco di 1'' cioè 4,6855749, resta 1,4059026 $= l\,25{,}4626 = 25'' + 0{,}4626'' = 25'', 27''', 45''''$ ec.; onde l'angolo degli asintoti d'un'iperbola i cui spazj rappresentano i logaritmi delle Tavole, è di 25°, 44', 25'', 27''' ec.

1062. Facciamo $y = \text{A}\,cos\,x$, e avremo $x = cos\,y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sen\,y} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$, ec.; dunque $\text{A}\,cos\,(x \pm a) = \text{A}\,cos\,x \mp \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{a^2 x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \mp \frac{a^3(1+2x^2)}{6\sqrt{(1-x^2)^5}} -$ ec., serie di cui si fa lo stesso uso che delle precedenti. Se ne troveranno delle simili per l'arco la cui tangente sia $x \pm a$.

1063. Sia ora $y = sen\,x$, e avremo $\frac{dy}{dx} = cos\,x$, $\frac{ddy}{dx^2} = - sen\,x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = - cos\,x$ ec.; dunque $sen\,(x \pm a) = sen\,x \pm a\,cos x - \frac{a^2}{2}\,sen\,x \mp \frac{a^3}{6}\,cos\,x + \frac{a^4}{24}\,sen\,x +$ ec. Parimente se $y = cos\,x$, si avrà $cos\,(\,x \pm a\,) = cos\,x \mp a\,sen\,x - \frac{a^2}{2}\,cos\,x \pm \frac{a^3}{6}\,sen\,x + \frac{a^4}{24}\,cos\,x -$ ec. Queste formule son di grandissimo uso per interpolar le Tavole dei seni. Se sia $x = 0$, i valori di $sen\,(x + a)$, $cos\,(x + a)$ diverranno a cagion di $sen\,x = 0$ e di $cos\,x = 1$, quelli che già trovammo (727).

1064. Fatto $y = tang\,x$ onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 x} \ldots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{sen\,x}{cos^3 x} \ldots \frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{cos^2 x} + \frac{3 sen^2 x}{cos^4 x} = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$ (696) ec., sarà $tang\,(x \pm a) = tang\,x \pm \frac{a}{cos^2 x} + \frac{a^2\,sen\,x}{cos^3 x} \pm \frac{a^3}{cos^4 x} + \frac{a^4\,sen\,x}{cos^5 x} \pm$ ec. $\mp \ldots \frac{2a^3}{3\,cos^2 x} - \frac{a^4\,sen\,x}{3\,cos^3 x} \mp$ ec.: ma $\frac{\pm a + a^2\,tang\,x}{cos^2 x}$, $\frac{\pm a^3 + a^4\,tang\,x}{cos^4 x}$, $\pm$ ec. è una progression geometrica il cui primo termine $= \frac{\pm a + a^2\,tang\,x}{cos^2 x}$, l'ultimo $= \frac{1}{\infty} = 0$, e il quoziente $= \frac{a^2}{cos^2 x}$; dunque la somma (299) $= \frac{a^2\,tang\,x \pm a}{cos^2 x - a^2}$, e però $tang\,(x \pm a) = tang\,x + \frac{a^2\,tang\,x \pm a}{cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3cos^2 x} - \frac{a^4\,sen\,x}{3cos^3 x} -$ ec. $= \ldots \frac{sen\,x\,cos\,x \pm a}{cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3cos^2 x} - \frac{a^4\,sen\,x}{3\,cos^3 x} \mp$ ec. Si troveranno delle formule simili per $cot\,(\,x \pm a\,)$.

1065. Sia ora $y = ml\,sen\,x$ o al logaritmo ordinario di $sen\,x$ se m rappresenta il modulo; si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{m\,cos x}{sen\,x}$ (1014), $\frac{ddy}{dx^2} = - \frac{m}{sen^2 x} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2m\,cos\,x}{sen^3 x}$ ec.; dunque $l\,sen\,(\,x \pm a\,) = l\,sen\,x \pm am\,\frac{cos\,x}{sen\,x} - \frac{ma^2}{2sen^2 x} \pm \frac{a^3 m\,cos\,x}{3\,sen^3 x}$ ec.

1066. Se $y = ml\,cos\,x$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{-m\,sen\,x}{cos\,x}$ (1014), $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-m}{cos^2 x} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = - \frac{2m\,sen\,x}{cos^3 x}$ ec.; dunque $l\,cos\,(\,x \pm a\,) = l\,cos\,x$

$\mp \frac{am\, sen\, x}{cos\, x} - \frac{a^2 m}{2cos^2 x} \mp \frac{a^3 m\, sen\, x}{3 cos^3 x} -$ ec. Sia $y = ml\, tang\, x$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{2m}{sen\, 2x} \cdots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2m\, cos\, 2x}{sen^2\, 2x}$ ec. e perciò $ltang(x \pm a) = l\, tang x \pm \frac{2am}{sen\, 2x} -$ ec.. Lo stesso sarà per $ml\, cot\, x$.

1067. Supposto ora che y sia l'arco il cui logaritmo del seno è x, ovvero $y = Al\, sen\, x$, si avrà $x = l\, sen\, y$, e perciò $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\, y}{m\, cos\, y} \cdots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\, y}{m^2 cos^3 y}$ ec.; dunque $Al\, sen\, (x \pm a) = y \pm \frac{a\, sen\, y}{m\, cos\, y} + \frac{a^2\, sen\, y}{2m^2\, cos^3\, y} \pm$ ec.

1068. Sia $y = Al\, tang\, x$; verrà $\frac{dy}{dx} = \frac{sen\, 2y}{2m}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\, 4y}{4m^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{sen\, 2y\, cos\, 4y}{2m^3}$ ec.; dunque $Al\, tang\, (x \pm a) = y \pm \ldots \frac{a\, sen\, 2y}{2m} + \frac{a^2\, sen\, 2y\, cos\, 2y}{4m^2} \pm \frac{a^3\, sen\, 2y\, cos\, 4y}{12m^3} +$ ec. Queste formule posson servire a risolvere con molta approssimazione i problemi sull' uso delle Tavole dei seni.

1069. La serie $y \pm \frac{ady}{dx} +$ ec. (1054) da cui nascono queste ed infinite altre applicazioni, induce talvolta in inganno se si adopri senza cautela, come può vedersi nei casi benchè semplicissimi di $y = lx$ (1057) e di $y = sen^{\frac{m}{n}} x$ quando $x = 0$ nel primo, ed $n > m$ nel secondo.

ALTRE REGOLE DEL CALCOLO INTEGRALE

Metodo per ridurre l'integrazione di più differenziali binomie a quella d'altre differenziali conosciute.

1070. Debbasi integrare $x^n dx (a + bx^m)^k$ supponendo nota l'integrale di $x^p dx (a + bx^m)^k$, ed $n > p$. Poichè $d[x^{q+1} (a + bx^m)^{k+1}] = a(q+1) x^q dx (a + bx^m)^k + b(mk + m + q + 1) x^{m+q} dx (a + bx^m)^k$, sarà integrando quest' equazio-

ne, $\int x^{m+q}dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+m+q+1)} - \ldots\ldots$ $\frac{a(q+1)\int x^q dx(a+bx^m)^k}{b(mk+m+q+1)}$. Sia $m+q=n$, o $q=n-m$; si avrà $\int x^n dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)}$ $\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$. Se in questa stessa espressione in vece di n si scriva $n-m$, $n-2m$ ec., si avranno i valori di $\int x^{n-m}$ $dx(a+bx^m)^k$, di $\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^k$, in generale di $\int x^{n-im}$ $dx(a+bx^m)^k$, essendo i un intero positivo, e la formula sarà $\int x^n dx(a+bx^m)^k = (a+bx^m)^{k+1}\left(\frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)} - \right.$ $\frac{a(1+n-m)(A)}{bx^m(1+n+m(k-1))} - \frac{a(1+n-2m)(B)}{bx^m(1+n+m(k-2))} - \ldots\ldots -$ $\left.\frac{a(1+n-m(i-1))(Z)}{bx^m(1+n+m(k-i+1))}\right) \pm \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\ldots\ldots\ldots(1+n-im)}{b^i(1+n+mk)(1+n+m(k-1))\ldots(1+n+m(k-i+1))}\int x^{n-im} dx$ $(a+bx^m)^k$, ove le lettere (A), (B)....(Z) indicano che il termine in cui sono, dee moltiplicarsi per il precedente ed il segno superiore ha luogo quando i è pari, l' inferiore quando è impari. Ora se $n-im=p$, cioè se $\frac{n-p}{m}=i$ è un intero positivo, $\int x^n dx(a+bx^m)^k$ potrà con la formula precedente ridursi a $\int x^p dx(a+bx^m)^k$, presi tanti termini della serie e tanti fattori nel numeratore e denominator del termine fuor di serie, quante sono unità in i.

Esemp. Sia $\int x^{10}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ da ridursi a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, che si ha quadrando il circolo, come vedremo; sarà $n=10$, $a=1$, $b=-1$, $m=2$, $k=\frac{1}{2}$, $p=0$, $\frac{n-p}{m}=i=5$; dunque $\int x^{10}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{12}x^9 - \frac{9}{12.10}x^7 - \frac{9\cdot7}{12.10.8}x^5 - \frac{9\cdot7\cdot5}{12.10.8.6}x^3 - \right.$ $\left.\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3}{12.10.8.6.4}x\right) + \frac{9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}{12.10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$.

Così $\int x^{r+cs-1} dx (a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$ si riduce a $\int x^{r-1} dx (a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$: onde se $a=1, b=-1, c=1, s=2, t=-1, u=2$, anche $\int x^{r+1} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ si ridurrà a $\int x^{r-1} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; e poichè $r=1$, $=2$ dà $\int x^{r-1} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = arc.sen x$ (1013) $= -\sqrt{(1-x^2)}$, si avrà sempre $\int x^{r+1} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ o il numero intero e positivo r sia impari o sia pari.

1071. Se i sia numero intero negativo, in luogo di ridurre $\int x^n dx (a+bx^m)^k$ a $\int x^p dx (a+bx^m)^k$, si ridurrà questa alla prima.

Esemp. Sia $\int x^{-4} dx (1+x^2)^{-1}$ da ridursi a $\int dx (1+x^2)^{-1} = arc.\ tang\ x$ (1013); si avrebbe $n=-4$, $m=2$, $p=0$ ed $\frac{n-p}{m} = -2$; riducendo dunque la seconda alla prima, si avrà $n=0, a=1, b=1, m=2, k=-1, p=-4, \frac{n-p}{m} = 2 = i$; onde $\int dx (1+x^2)^{-1} = -x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} + \int x^{-4} dx (1+x^2)^{-1}$; dunque $\int x^{-4} dx (1+x^2)^{-1} = x^{-1} - \frac{x^{-3}}{3} + \int dx (1+x^2)^{-1}$.

1072. Sia proposto ora di ridur $\int x^n dx (a+bx^m)^p$ a $\int x^r dx (a+bx^m)^q$. Poichè $d[x^{n+1}(a+bx^m)^p] = (n+1)x^n dx (a+bx^m)^p + bmpx^{m+n} dx (a+bx^m)^{p-1}$, sarà $\int x^n dx (a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \frac{bmp}{n+1} \int x^{m+n} dx (a+bx^m)^{p-1}$. Se in questa stessa espressione si scriva $n+m$, $n+2m$ ec. per n, e $p-1$, $p-2$ ec. per p, si avranno i valori di $\int x^{n+m} dx (a+bx^m)^{p-1}$, di $\int x^{n+2m} dx (a+bx^m)^{p-2}$ ec. e si troverà la seguente formula; $\int x^n dx (a+bx^m)^p = (a+bx^m)^p \times$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{1+n} - \frac{bmpx^m(A)}{(1+n+m)(a+bx^m)} - \frac{bm(p-1)x^m(B)}{(1+n+2m)(a+bx^m)} - \ldots\ldots - \frac{bm(p-i'+2)(Z)}{(1+n+m(i'-1))(a+bx^m)}\right) \pm \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b^{i'} m^{i'} p(p-1)\ldots\ldots(p-i'+1)}{(1+n)(1+n+m)\ldots\ldots(1+n+m(i'-1))} \int x^{n+i'm} dx (a+bx^m)^{p-i'};$$

ove i segni e il numero dei termini e dei fattori si prendono come prima (1070). Ora se $p-i'=q$ o se $p-q=i'$ è intero, l'integrale di $x^n dx(a+bx^m)^p$ si ridurrà a $\int x^{n+i'm} dx(a+bx^m)^q$, la quale potendo ridursi a $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ quando $n+i'm-im=r$, cioè quando $\frac{n-r}{m}$ è un intero positivo $i-i'$, anche la formula proposta vi si potrà ridurre.

Esemp. Sia da ridursi $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; si avrà $n=4$, $a=1$, $b=-1$, $m=2$, $p=\frac{5}{2}$, $r=0$, $q=\frac{1}{2}$, $p-q=i'=2$. Dunque $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{5x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5\cdot 7}+\frac{5\cdot 3}{5\cdot 7}\int x^8dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$: ma (1070) $\int x^8dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{x^7}{10}-\frac{7x^5}{10.8}-\frac{7.5x^3}{10.8.6}-\frac{7.5.3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{7.5.3.1}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$;

dunque $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^7}{10}-\ldots\frac{3x^5}{10.8}-\frac{3.5x^3}{10.8.6}-\frac{3.5.3x}{10.8.6.4}\right)+\frac{3.5.3}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

Così $\int x^{r-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\pm 1}$ e $\int x^{r\pm s-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}\mp 1}$ si riducono a $\int x^{r-1}dx(a+bx^s)^{\frac{t}{u}}$.

1073. Se i' sia numero intero negativo, si operi come sopra (1071).

Integrazione dei Rotti differenziali razionali.

1074. Suppongo $\frac{Pdx}{Q}$ un rotto razionale, ed il maggiore esponente di x in P almeno d'un'unità minore che in Q, condizione che può sempre ottenersi con la divisione: così $\frac{x^4\,dx}{a+bx^3}=\frac{xdx}{b}-\frac{axdx}{b(a+bx^3)}$ la cui seconda parte è quale l'abbiam supposta per $\frac{Pdx}{Q}$. Ora cerco i fattori di Q (379), e se questi son tutti del primo grado, reali, ed ineguali, il rotto proposto avrà la forma $\frac{ax^{m-1}+bx^{m-2}+\text{ec.}\ldots\ldots+\omega}{(x-f)(x-g)(x-k)\text{ ec.}}\times dx$,

supponendo che il numero de' fattori $x-f, x-g$ ec. sia m. Per integrare in questo caso, decompongo il rotto così: $\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+$ ec. la cui integrale è $Al(x-f)+Bl(x-g)+$ ec. $+C$, e determino al solito i coefficienti di A, B ec. (324).

Es. Si voglia integrar $dy=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$; faccio $\frac{Adx}{x}+\frac{Bdx}{a-x}+\frac{Ddx}{a+x}=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$, e operando al solito, trovo

$$\left.\begin{matrix} Aa^2+Bax+Bxx \\ -1+Da-A \\ -D \end{matrix}\right\}=0;\ \text{dunque } A=\frac{1}{a^2},\ B=\frac{1}{2a^2},$$

$D=-\frac{1}{2a^2}$, e $dy=\frac{dx}{a^2x}+\frac{dx}{2a^2(a-x)}-\frac{dx}{2a^2(a+x)}$; onde $y=\frac{lx}{a^2}-\frac{l(a-x)}{2a^2}-\frac{l(a+x)}{2a^2}+\frac{lC}{a^2}=\frac{1}{a^2}\,l\,\frac{xC}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Si troverà pure $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\,l\,\frac{C(a+x)}{a-x}$.

1075. Se alcuni fattori di Q sieno eguali, ed $(x-a)^m$ esprima un numero m di essi, il rotto si decomporrà in $\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+$ ec. $+\frac{A'x^{m-1}+B'x^{m-2}+\text{ec.}\ldots+R}{(x-a)^m}dx$, e determinati i coefficienti come sopra, s'integrerà $\frac{A'x^{m-1}}{(x-a)^m}dx+\frac{B'x^{m-2}}{(x-a)^m}dx+$ ec. facendo $x-a=z$.

Esemp. Sia da integrarsi $dy=\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{Adx}{x}+\frac{(Bx+C)dx}{(x-1)^2}+\frac{(Dx+E)dx}{(x+1)^2}$; onde $A=2, B=-\frac{3}{4}, C=\frac{7}{4}$, $D=-\frac{5}{4}, E=-\frac{7}{4}$; e però $dy=\frac{2dx}{x}+\frac{(7-3x)dx}{4(x-1)^2}-\frac{(5x+7)dx}{4(x+1)^2}$. Per integrare il rotto $\frac{(7-3x)dx}{4(x-1)^2}$, faccio $x-1=z$, il che lo cangia in $\frac{(4-3z)dz}{4z^2}=\frac{dz}{z^2}-\frac{3dz}{4z}$, la cui integrale è $-\frac{1}{z}-\frac{3lz}{4}=\frac{-1}{x-1}-\frac{3l(x-1)}{4}$, e trattando così l'altro rotto, trovo l'integrale $y=2lx-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{4}l(x-1)-\frac{5}{4}l(x+1)+C$.

1076. Se sieno in Q dei fattori immaginarj, esprimendosi un di essi con $x + a + b\sqrt{-1}$, ve ne sarà un altro della forma $x + a - b\sqrt{-1}$. Dunque il loro prodotto $x^2 + 2ax + b^2 + a^2$, o per brevità $x^2 + mx + n$, sarà un fattor reale di Q. Perciò si determinerà (398) questo fattore, e poi si supporrà che $\frac{(Ax + B)dx}{x^2 + mx + n}$ sia uno dei rotti parziali di $\frac{Pdx}{Q}$, e si avrà A e B come sopra. Quindi facendo $x + \frac{m}{2} = z$ ed $n - \frac{m^2}{4} = b'b'$, il rotto diventerà $\frac{(A'z + B')dz}{zz + b'b'} = \frac{A'zdz}{zz + b'b'} + \ldots \frac{B'dz}{zz + b'b'}$. Ora $\int \frac{A'zdz}{zz + b'b'} = \frac{A'}{2} l(zz + b'b')$ (1014) e ....

$$B' \int \frac{dz}{zz + b'b'} = \frac{B'}{b'} \int \frac{\frac{dz}{b'}}{1 + \frac{zz}{b'b'}} = \frac{B'}{b'} \times Arco\,tang\, \frac{z}{b'} + C (1013),$$

ove l'arco è espresso in parti del raggio 1; onde per valutarlo in gradi bisogna moltiplicarlo per 57°, 296 (608).

Es. Sia $dy = \frac{(z^2 - z + 1)dz}{(1 + z)(1 + zz)} = \frac{Adz}{1 + z} + \frac{(Bz + C)dz}{1 + zz}$; si troverà $A = \frac{3}{2}$, $B = C = -\frac{1}{2}$, onde $dy \frac{3dz}{2(1 + z)} - \frac{zdz}{2(1 + zz)} - \frac{dz}{2(1 + zz)}$ ed $y = \frac{3}{2} l(1 + z) - \frac{1}{4} l(1 + z^2) - \frac{1}{2} \times Arco\,tang\,z + C$.

Sia anche $\frac{dx}{x(1 + x)^2(1 + x + xx)}$ che si riduce a $\frac{dx}{x} - \frac{(2x + 3)dx}{(1 + x)^2} + \frac{xdx}{1 + x + xx}$. Quest'ultima quantità, posto $x = z - \frac{1}{2}$, diviene $\frac{zdz}{z^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}dz}{z^2 + \frac{3}{4}}$, la cui integrale, fatto $B' = 1$, $b' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, è $\frac{1}{2} l(z^2 + \frac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\,tang\, \frac{2z}{\sqrt{3}}$. Sostituendo dunque il valor di z, si trova per l'intera integrale $lx - 2l(1 + x) + \frac{1}{2} l(1 + x + x^2) + \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\,tang\, \frac{(2x + 1)}{\sqrt{3}} + C$.

1077. Infine se Q abbia uno o più fattori di questa forma $(x^2 + ax + b)^m$, si supporrà che il rotto parziale provenuto da questo fattore sia $dx \left(\frac{Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + ec. + R}{(x^2 + ax + b)^m} \right)$ e si determineranno i coefficienti A, B ec. come sopra. Quindi facendo $x = z - \frac{a}{2}$ e sostituendo, il rotto diverrà ..... $\frac{A'z^{2m-1} + B'z^{2m-2} + ec. + R'}{(z^2 + b'b')^m} dz$ che può decomporsi così:

$\frac{A'z^{2m-1}}{(z^2+b'b')^m}dz + \frac{B'z^{2m-2}}{(z^2+b'b')^m}dz +$ ec.: ma i termini ove il numeratore ha una potenza impari sono integrabili in parte algebricamente e in parte per logaritmi (1019), e quelli ove z nel numeratore ha una potenza pari essendo della forma $\frac{Mz^{2k}dz}{(z^2+b'b')^m}$ posson ridursi (1071) a $\frac{dz}{z^2+b'b'}$ cioè possono integrarsi in parte algebricamente e in parte per archi di circolo; dunque con questo mezzo si avrà l' integrale del dato rotto.

1078. Ecco un esempio che comprende tutti questi metodi. Sia $dy = \frac{dx}{(1+x)xx(x^2+2)(x^2+1)^2} = \frac{Adx}{1+x} + \frac{(Bx+C)dx}{x^2} + \frac{(Dx+E)dx}{x^2+2} + \frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I)dx}{(x^2+1)^2}$. Si troverà $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{6}$, $E = -\frac{1}{6}$, $F = \frac{1}{4}$, $G = -\frac{1}{4}$, $H = \frac{3}{4}$, $I = -\frac{3}{4}$ e $dy = \frac{dx}{12(1+x)} + \frac{(1-x)dx}{2x^2} + \frac{(x-1)dx}{6(x^2+2)} + \frac{(x^3-x^2+3x-3)dx}{4(x^2+1)^2}$.

Ora $\frac{1}{12}\int\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{12}l(1+x)$... $\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)dx}{x^2} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}$... $\frac{1}{6}\int\frac{x\,dx - dx}{x^2+2} = \frac{1}{12}l(x^2+2)$ (1020) $- \frac{1}{6\sqrt{2}}\,Arc\,tang\,\frac{x}{\sqrt{2}}$ (1076)... $\frac{1}{4}\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{8}l(x^2+1) + \frac{1}{8(x^2+1)}$ (1022).... $\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{8(x^2+1)}$ (1020). Per integrare I. $\frac{-x^2dx}{4(x^2+1)^2}$ II. $-\frac{3dx}{4(1+x^2)^2}$, riduco $\int\frac{dx}{1+x^2}$ alla I., e si avrà (1073) $\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int x^2dx(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int x^2dx(1+x^2)^{-2} = -\frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\,Arc\,tang\,x$: ma riducendo la I. alla II. (1070), $\int x^2dx(1+x^2)^{-2} = -x(1+x^2)^{-1} + \int dx(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int dx(1+x^2)^{-2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\,Arc\,tang\,x$. Riunendo dunque tutte queste integrali, sarà $y = \frac{1}{12}l(1+x) + \frac{1}{12}l(x^2+2) + \frac{1}{8}l(x^2+1) + \frac{1}{2}l\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{(x+1)}{4(1+x^2)} - \frac{1}{2}\,Arc\,tang\,x - \frac{1}{6\sqrt{2}}\,Arc\,tang\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

1079. Dunque ogni differenziale frazionaria e razionale si integra o algebricamente o per logaritmi o per archi di circolo: La difficoltà consiste nel trovare i fattori di Q, difetto piuttosto dell'Algebra che del metodo d' integrazione. Notiamo alcuni casi in cui un rotto radicale può rendersi razionale.

1080. Sia $\left(\frac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt[4]{x}+xx}{x+\sqrt{x}}\right)dx$: ridotti i radicali allo stesso grado (384) verrà $\frac{dx(\sqrt[12]{x^4}+x\sqrt[12]{x^6}+x^2)}{x+\sqrt[12]{x^3}}$, e fatto $\sqrt[12]{x}=z$, onde $x=z^{12}$, $dx=12z^{11}dz$, la differenziale è razionale e però integrabile.

Sia X una funzione razionale di x e $dy=Xdx\sqrt{(a+bx+cx^2)}^{\pm 1}$; cerco i due fattori di $a+bx+cx^2$, e se son reali si troverà x per la nota formula (432), e quindi dx, dopo di che si potrà integrare. Se per esempio, $dy=dx\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}$, si farà (432) $\pm a^2 \mp x^2 = Q = \frac{(x+a)(\pm a \mp x)}{(\pm a \mp x)^2} = \frac{x+a}{\pm a \mp x} = z^2$, onde $x=\frac{\mp a + az^2}{z^2 \pm 1}$, $dx=\frac{\pm 4azdz}{(z^2 \pm 1)^2}$, e $\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}=\frac{2az}{z^2 \pm 1}$; dunque $dy=\frac{\pm 8a^2z^2dz}{(z^2 \pm 1)^3}$. La formula col segno + si integra riducendo $\int dz(z^2+1)^{-1}$ a $\int z^2dz(z^2+1)^{-3}$ (1073), il che dà $\int z^4dz(z^2+1)^{-3}$; onde poi riducendo questa a $\int z^2dz(z^2+1)^{-3}$ (1070), si trova $8a^2\int z^2dz(1+z^2)^{-3} = \frac{2a^2z^3}{(1+z^2)^2} - \frac{a^2z}{1+z^2} + a^2 \times arc\ tang\, z + C$, ovvero sostituito il valor di z, $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 \times arc\ tang \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$. Ma la formula col segno − si integra al solito (1075) e si ha $\int -\frac{8a^2z^2dz}{(z^2-1)^3} = -\frac{a^2}{2}\, l\, \frac{z+1}{z-1} + \frac{a^2z}{2(z+1)^2} + \frac{a^2z}{2(z-1)^2} + C$, ovvero sostituito il valor di z (e osservando che $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)^2}{z^2-1} = \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$), $\int dx\sqrt{(x^2-a^2)} = \frac{x\sqrt{(x^2-a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\, l\, \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a} + C$.

Se $dy=\frac{dx}{\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}}$, fatto come prima $\frac{x+a}{\pm a \mp x}=z^2$, sarà $dy=\frac{\pm 2dz}{z^2 \pm 1}$; e col + verrà $y=2\times arc\ tang \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, col − si avrà $y = l\, \frac{C}{a}[x+\sqrt{(x^2-a^2)}]$ (1074).

1081. Se i fattori di $a+bx+cx^2$ sono immaginarj, faccio svanire il secondo termine ponendo $x+\frac{b}{2c}=z$ ed ho $Zdz\times\sqrt{[z^2+c^2]}^{\pm 1}$. Sia dunque $z^2+c^2=Q$, onde fatto nella nota formula (426) $a=1$, $A=u$, sarà $z=\frac{u^2-c^2}{2u}$ e $dz=\frac{du}{2u^2}\times(u^2+c^2)$, dopo di che si integrerà. Così se $dy=dx\sqrt{(x^2+a^2)}^{\pm 1}$, avremo $x=\frac{u^2-a^2}{2u}$, $u=x+\sqrt{(x^2+a^2)}$, $dx=\frac{du}{2u^2}(u^2+a^2)$, $\sqrt{(x^2+a^2)}=\frac{u^2+a^2}{2u}$, onde $dy=u^{-1}du(u^2+a^2)^{1\pm 1}\times(2u)^{-1\mp 1}$, cioè col segno di sopra, $dy=\frac{du(u^2+a^2)^2}{4u^3}=\frac{udu}{4}+\frac{a^2du}{2u}+\frac{a^4du}{4u^3}$, ed $y=C+\frac{u^4-a^4}{8u^2}+\frac{a^2}{2}lu$: ma $\frac{u^4-a^4}{8u^2}=\left(\frac{u^2-a^2}{4u}\right)\left(\frac{u^2+a^2}{2u}\right)=\frac{x}{2}\sqrt{(x^2+a^2)}$; dunque $y=C+\frac{x}{2}\sqrt{(x^2+a^2)}+\frac{a^2}{2}l[\sqrt{(x^2+a^2)}+x]$. Col segno di sotto, $dy=\frac{du}{u}$ ed $y=lC[\sqrt{(x^2+a^2)}+x]$.

Metodi di integrar per Serie.

1082. Quando una differenziale non ammette integrazione esatta, si ricorre alle approssimazioni, e le serie sono allora l'ultimo compenso. Infatti riducendo in serie una funzione X della variabile x, si ha una serie di termini monomj, le cui integrali riunite danno un valore approssimato di $\int Xdx$. Per esempio, l'integrale di $\frac{dx}{a+x}$ è $l(a+x)$ e $\frac{dx}{a+x}=\frac{dx}{a}-\frac{xdx}{a^2}+\frac{x^2dx}{a^3}-$ ec. (324); dunque $\int\frac{dx}{a+x}$ ovvero $l(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-$ ec. $+$ C: se si fa $x=0$, sarà $C=la$, e $l(a+x)=la+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-$ ec., onde $l(a-x)=la-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-$ ec. Supponghiamo $\frac{x}{a}=\frac{z}{a+z}$, ed avremo $l(a-x)=2la-l(a+z)=la-\frac{z}{a+z}-\frac{z^2}{2(a+z)^2}-$ ec.; dunque $l(a+z)=la+\frac{z}{a+z}+\frac{z^2}{2(a+z)^2}+$ ec., serie tanto più convergente quanto sarà z minor di a. Per

esempio $l\,11 = l\,(10+1) = l\,10 + \frac{1}{11} + \frac{1}{2.11^2} + ec. = 2{,}397$ ec.

Così si ha $dy = \frac{dx}{1+xx} = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx +$ ec. (324): ed $y = arc.\,tang\,x$ (1013) $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ ec.

Così $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = dx\,(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = dx\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3x^4}{2.4} + \frac{1.3.5x^6}{2.4.6} + ec.\right)$ (182); ed $y = arc.\,sen\,x$ (1013) $= x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} - \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} +$ ec., integrale a cui non vi è costante da aggiungere. Sia $x = 1$, e la circonferenza $= \pi$, sarà $y = \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.3.1}{2.4.5} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.7} +$ ec. Se $x = \frac{1}{2}$, l' arco diventa $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3.2^3} + \frac{1.3.1}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.7.2^7} +$ ec.

1083. Bastino questi esempj: ma il seguente *Metodo di integrar per parti* dà delle serie più convergenti.

La formula $Xx = \int Xdx + \int xdX$ dà $\int Xdx = Xx - \int xdX$. Sia $dX = X'dx$; dunque $\int xdX = \int X'xdx$ e fatto $xdx = dz$ onde $\frac{x^2}{2} = z$, sarà $\int X'dz = X'z - \int zdX' = \frac{1}{2}(X'xx - \int xxdX')$. Sia $dX' = X''dx$; dunque $\int x^2dX' = \int X''x^2dx$, e fatto $x^2dx = dz$ onde $\frac{x^3}{3} = z$, sarà $\int X''dz = X''z - \int zdX'' = \frac{1}{3}(X''x^3 - \int x^3dX'')$ ec. Sostituendo questi valori nella prima espressione, si trova $\int Xdx = Xx - \frac{x^2}{2}X' + \frac{x^3}{2.3}X'' - \frac{x^4}{2.3.4}X''' + \ldots \frac{x^5}{2.3.4.5}X'''' -$ ec. ovvero, supposta dx costante, onde $\frac{dX}{dx} = X'$, $\frac{ddX}{dx} = dX'$, $\frac{dX'}{dx} = X'' = \frac{ddX}{dx^2}$ ec., si avrà $\int Xdx = Xx - \frac{x^2}{2}\frac{dX}{dx} + \frac{x^3 ddX}{2.3.dx^2} - \frac{x^4 dddX}{2.3.4.dx^3} +$ ec.

Es. Sia $X = \frac{1}{a+x}$, si avrà $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2}$, $\frac{ddX}{dx^2} = \ldots \frac{2}{(a+x)^3}$, $\frac{dddX}{dx^3} = \frac{-2.3}{(a+x)^4}$, ec. Dunque $\int Xdx = \int \frac{dx}{a+x} =$

$\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+$ ec. . . . $+$ C, ovvero $l(a+x)=la+\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+$ ec., (1057).

1084. Sia $X=m(a+x)^{m-1}$, onde $\frac{dX}{dx}=m(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{ddX}{dx^2}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$, ec. Dunque $\int Xdx=(a+x)^m=C+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ec. Fatto $x=0$, verrà $C=a^m$, ed $(a+x)^m=a^m+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ ec. Facendo $a+x=z$, avremo $z^m=(z-x)^m+mxz^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2z^{m-2}+$ ec onde $(z-x)^m=z^m(1-\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2z^2}-$ec.$)$ . . . $(z+x)^m=z^m(1+\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2.z^2}+$ec.$)$.... $\frac{(z+x)^m}{z^m}=1+\frac{mx}{z}+\frac{m(m-1)x^2}{2z^2}+$ ec. ... e $\frac{(z+x)^{-m}}{z^{-m}}=\frac{z^m}{(z+x)^m}=1-\frac{mx}{z}+\frac{m(m+1)x^2}{2z^2}-$ ec.; dunque se $z+x=b$, avremo $(b-x)^m=b^m(1-\frac{mx}{b-x}+\frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2}-$ ec.$)$ e $(b+x)^m=b^m(1+\frac{mx}{b+x}+\frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2}+$ ec.$)$.

1085. Sia $X=a^x la$, $\frac{dX}{dx}=a^x l^2 a$, $\frac{ddX}{dx^2}=a^x l^3 a$ ec., il che dà $\int Xdx=(1015)\ a^x=C+a^x xla(1-\frac{1}{2}xla+\frac{1}{2\cdot 3}x^2l^2a-$ ec.$)$. Sia $x=0$, si avrà $C=1$, ed $a^x=1+a^x xla(1-\frac{1}{2}xla+$ec.$)$; dividendo per a^x, verrà $1=a^{-x}+xla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec.$)$. Dunque $a^{-x}=1-xla(1-\frac{1}{2}xla+ec)$, e supposta x positiva, le sue potenze impari cangian segno, e la serie è tutta positiva, come si sa (360).

1086. Se $X=\frac{1}{1+x^2}$, la serie sarà troppo complicata. Pongo dunque $\frac{1}{1+x^2}=u$ onde $-\frac{2xdx}{(1+x^2)^2}=du$; dunque $\int\frac{dx}{1+x^2}=\int udx=ux-\int xdu=\frac{x}{1+x^2}+\int\frac{2x^2dx}{(1+x^2)^2}$. Pongo $\frac{1}{(1+x^2)^2}=u$

onde $-\frac{4xdx}{(1+x^2)^3}=du$, e fatto $2x^2dx=dz$ onde $\frac{2x^3}{3}=z$, sarà $\int\frac{2x^2dx}{(1+x^2)^3}=\int udz=uz-\int zdu=\frac{2x^3}{3(1+x^2)^2}+\int\frac{2.4x^4dx}{3(1+x^2)^3}$. Pongo $\frac{1}{3(1+x^2)^3}=u$ onde $\frac{-6xdx}{3(1+x^2)^4}=du$, e fatto $2.4x^4dx=dz$ onde $\frac{2.4x^5}{5}=z$, sarà $\int\frac{2.4x^4dx}{3(1+x^2)^3}=\int udz=uz-\int zdu=\frac{2.4x^5}{3\,5(1+x^2)^3}+\int\frac{2.4.6x^6dx}{3\,5(1+x^2)^4}$ ec. Dunque $\int\frac{dx}{1+x^2}=$ (1013) $Arco\ tang\, x=a=\frac{x}{1+xx}+\frac{2\,.\,x^3}{3(1+xx)^2}+\frac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3}+$ ec. Dunque in generale poichè $x=tang\,a=\frac{sen\,a}{cos\,a}$, sostituendo, e riducendo, si ha $a=cos\,a\,(sen\,a+\frac{2}{3}sen^3a+\frac{2.4}{3.5}sen^5a+\frac{2.4.6}{3.5.7}sen^7a+$ ec.$)=\frac{sen\,2a}{2}(1+\frac{2}{3}sen^2a+\frac{2.4}{3.5}sen^4a+\frac{2.4.6}{3.5.7}sen^6a+$ ec.). Se $a=45^\circ$ e perciò $x=1$, sarà la circonferenza $8a=\pi=4(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2.3}{3.5.7}+$ ec.)

Integrazione delle Differenziali Logaritmiche ed Esponenziali.

1087. Per integrare la differenziale logaritmica $Xdxlx$, supponendo X una funzione di x, sia $y=lx$, e $dz=Xdx$: si avrà $\int Xdxlx=\int ydz=yz-\int zdy=lx\int Xdx-\int\left(\frac{dx}{x}\int Xdx\right)$; dunque l' integrale della quantità proposta si riduce a quella di Xdx che si avrà con le passate regole se $\int Xdx$ non contien trascendenti.

Esemp. Sia $X=x^n$; si avrà $\int Xdx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, e $\int\left(\frac{dx}{x}\int Xdx\right)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$; dunque $\int x^ndxlx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx-\frac{1}{n+1}\right)$, integrale che nel caso di $n=-1$ è $\int lx\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}l^2x$ (1014). Sia ancora $X=\frac{1}{(1-x)^2}$; si avrà $\int Xdx=\frac{1}{1-x}$, e $\int\left(\frac{dx}{x}\int Xdx\right)=\ldots\int\frac{dx}{x(1-x)}=lx-l(1-x)$ (1074). Dunque $\int\frac{dxlx}{(1-x)^2}=\frac{lx}{1-x}-lx+l(1-x)=\frac{xlx}{1-x}+l(1-x)$.

1088. Per integrare $dXl^n x$ si fa $\int dXl^n x = Xl^n x - n\int \frac{Xdx}{x} l^{n-1}x$; e posto $\frac{Xdx}{x} = dX'$, si ha $\int dX'l^{n-1}x = X'l^{n-1}x - (n-1)\int \frac{X'dx}{x} l^{n-2}x$; fatto $\frac{X'dx}{x} = dX''$, verrà $\int dX''l^{n-2}x = X''l^{n-2}x - (n-2)\int \frac{X''dx}{x} l^{n-3}x$ ec. Dunque $\int dXl^n x = Xl^n x - nX'l^{n-1}x + n(n-1)X''l^{n-2}x - n(n-1)(n-2)X'''l^{n-3}x +$ ec., espressione che ha un numero finito di termini e n sia intero e positivo.

Sia per esempio $dX = x^m dx$; sarà $X = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\int \frac{Xdx}{x} = X' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, $\int \frac{X'dx}{x} = X'' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$, $X''' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^4}$ ec. Dunque $\int x^m dx l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} l^{n-2} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} l^{n-3} x + \text{ec.}\right)$. Il solo caso che sfugge alla regola generale è quello in cui $m = -1$ e allora si ha $\int \frac{dx}{x} l^n x = \frac{l^{n+1}x}{n+1} + C$ (1025).

1089. Questa formula applicata ad n negativa dà per integrale una serie infinita; ecco dunque un altro mezzo d'integrare. Riduco $\frac{Xdx}{(lx)^n}$ alla forma $Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n}$; fatto $lx = u$, sarà $l^n x = u^n$ e $\frac{dx}{x} = du$, onde $\int \frac{dx}{xl^n x} = \int u^{-n} du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)l^{n-1}x} = z$, e posto $Xx = y$, si avrà $\int Xx \cdot \frac{dx}{xl^n x} = \int \frac{Xdx}{l^n x} = \int y\,dz = yz - \int z dy = \frac{-Xx}{(n-1)l^{n-1}x} + \frac{1}{n-1}\int \frac{d(Xx)}{l^{n-1}x}$. Se ora sia $d(Xx) = X'dx$, $d(X'x) = X''dx$, $d(X''x) = X'''dx$ ec., avremo, ponendo $n-1 = m$, $\int \frac{d(Xx)}{l^{n-1}x} = \int \frac{X'dx}{l^m x}$, formula simile alla prima e che si integra perciò nel modo stesso: dunque $\int \frac{Xdx}{(lx)^n} = \frac{-x}{(n-1)l^{n-1}x}\left(X + \frac{X'lx}{n-2} + \frac{X''l^2x}{(n-2)(n-3)} + \text{ec.}\right)$ fino ad un termine della forma $\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}\int \frac{Xdx}{lx}$, la cui integrazione, se è possibile, darà quella della formula proposta.

Sia per esempio $X = x^{m}$; avremo $d(Xx) = X'dx = d(x^{m+1})$ $= (m+1)x^{m}dx$, onde $X' = (m+1)x^{m}$, $X'' = (m+1)^2 x^{m}$, $X''' = (m+1)^3 x^{m}$ ec.; dunque $\int \frac{x^m dx}{l^n x} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)l^{n-1}x} \Big(1 + \frac{m+1}{n-2} lx + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)} l^2 x + \frac{(m+1)^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} l^3 x + \text{ec.} \Big) + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{x^m dx}{lx}$, integrale che fatto $x^{m+1} = u$, si riduce a $\int \frac{du}{lu}$, e questa si ha sol per le serie come vedremo, fuorchè nel caso di $m = -1$; poichè allora $\int \frac{dx}{xl^n x} = \frac{l^{1-n}x}{1-n}$.

1090. Debba ora integrarsi la formula esponenziale $a^x X dx$. Osservo che $a^x dx la = d(a^x)$ (10:5), onde fatto $a^x dx = dz = \frac{d(a^x)}{la}$, sarà $z = \frac{a^x}{la}$ e perciò $\int a^x X dx = \int X dz = zX - \int z dX = \frac{a^x X}{la} - \frac{1}{la} \int a^x dX$. Sia $dX = X'dx$; si avrà $\int a^x dX = \int a^x X' dx$ $= \int X' dz = X'z - \int z dX' = \frac{a^x X'}{la} - \frac{1}{la} \int a^x dX'$ ec.; dunque $\int a^x X dx = \frac{a^x}{la} \Big(X - \frac{X'}{la} + \frac{X''}{l^2 a} - \ldots \pm \frac{X^{(n)}}{l^n a} \Big) \mp \frac{1}{l^{n+1} a} \times \int a^x X^{(n+1)} dx$. Se la formula fosse $a^{mx} X dx$, fatta $a^m = b$, si troverebbe egualmente $\int a^{mx} X dx = \frac{a^{mx}}{mla} \Big(X - \frac{X'}{mla}$ ec. $\Big)$ ec.

1091. Se e è il numero il cui logaritmo $= 1$, si ha $\int e^x X dx = e^x (X - X' + X'' - X''' + X'''' - \text{ec.})$. Sia per esempio $X = x^n$; sarà $X' = nx^{n-1}$, $X'' = n(n-1)x^{n-2}$, $X''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ ec.; dunque $\int e^x x^n dx = e^x (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{ec.})$. Così $\int e^{mx} x^n dx = e^{mx} \Big(\frac{x^n}{m} - \frac{nx^{n-1}}{m^2} + \text{ec.} \Big)$.

1092. Per trovar $\int \frac{a^x dx}{x}$ riduco in serie, ed ho (1085) $\frac{a^x dx}{x} = \frac{dx}{x} + dx la + \frac{x dx}{2} l^2 a + \text{ec.}$; dunque $\int \frac{a^x dx}{x} = C + lx + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2 \cdot 2} + \frac{x^3 l^3 a}{3.2.3} + \text{ec.}$, e $\int \frac{e^x dx}{x} = C + lx + x + \frac{x^2}{2.2} +$

$\frac{x^3}{3.2.3}$ + ec. Sia $e^x = z$; si avrà $\int \frac{e^x dx}{x} = \int \frac{dz}{lz} = C + llz + lz + \frac{l^2 z}{2.2} + \frac{l^3 z}{3.2.3}$ + ec.: e poichè $\int \frac{dz}{zlz} = llz$ (1025) $= y$, sarà $\int \frac{dz}{lz} = \int z . \frac{dz}{zlz} = \int zdy = zy - \int ydz = zllz - \int llzdz$, e però $\int llzdz = zllz - \int \frac{dz}{lz} = zllz - C - llz - lz -$ ec.

1093 Quando le precedenti regole non abbian luogo, la quantità esponenziale si ridurrà in serie per la formula $a^x = 1 + xla +$ ec. (1085). Sia $dy = x^{mx} dx$; si avrà per le serie, $dy = dx + mxdxlx + \frac{m^2}{2} x^2 dx l^2 x +$ ec., la cui integrale si trova per mezzo di quella di $x^m dx l^n x$ (1088) e si ha $\int x^{mx} dx = x(1 - \frac{mx}{2^2} + \frac{m^2 x^2}{3^3} -$ ec.$) + mx^2 lx \left(\frac{1}{2} - \frac{mx}{3^2} + \frac{m^2 x^2}{4^3} - \text{ec.}\right) + \frac{m^2 x^3 l^2 x}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{mx}{4^2} + \frac{m^2 x^2}{5^3} - \text{ec.}\right) +$ ec. che nel caso di $x = 1$, si riduce ad $1 - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4} +$ ec.

Integrazione delle Quantità differenziali ove entrano Seni, Coseni ec.

1094. Poichè (1024) $\int dx \cos x = \text{sen}\, x$, e $\int dx\, \text{sen}\, x = -\cos x$, sarà $\int dy \cos ny = \frac{\text{sen}\, ny}{n}$, e $\int dy\, \text{sen}\, ny = -\frac{\cos ny}{n}$, $\int dz \cos z\, \text{sen}^n z = \frac{\text{sen}^{n+1} z}{n+1}$, e $\int dz\, \text{sen}\, z \cos^n z = -\frac{\cos^{n+1} z}{n+1}$. Similmente $\int dy\, \text{sen}\, y \cos ay =$ (708) $\frac{1}{2} \int dy\, \text{sen}(a+1)y - \frac{1}{2} \int dy\, \text{sen}(a-1)y = -\frac{\cos(a+1)y}{2(a+1)} + \frac{\cos(a-1)y}{2(a-1)}$.

1095. Sarebbe lo stesso per $dx\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, ax$, $dx \cos x \cos ax$ ec., e si tratterebbe colla stessa facilità $dx\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, ax \cos bx$ ec. riducendo questi prodotti a seni o coseni semplici per mezzo dei valori di $\text{sen}\, a \cos b$, $\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$ ec.: ma per integrar $dx\, \text{sen}^2 x$, $dx\, \text{sen}^3 x$ ec. è preferibile il metodo seguente.

1096. Poichè $dx\, \text{sen}^n x = dx\, \text{sen}\, x\, \text{sen}^{n-1} x$ e $\int dx\, \text{sen}\, x = -\cos x = z$, fatto $\text{sen}^{n-1} x = y$, sarà $\int dx\, \text{sen}^n x = \int ydz = zy - \int zdy = -\cos x\, \text{sen}^{n-1} x + (n-1) \int dx\, \text{sen}^{n-2} x \cos^2 x = \ldots\ldots$

$-\cos x \, sen^{n-1} x + (n-1)\int dx \, sen^{n-2} x - (n-1)\int dx \, sen^{n} x$; e trasponendo, $\int dx \, sen^{n} x = -\frac{\cos x \, sen^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int dx \, sen^{n-2} x$;

dunque anche $\int dx \, sen^{n-2} x = -\frac{\cos x \, sen^{n-3} x}{n-2} + \frac{n-3}{n-2}\int dx \times sen^{n-4} x$; onde in generale $\int dx \, sen^{n} x = -\frac{\cos x}{n}\Big(sen^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} sen^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} sen^{n-5} x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)} sen^{n-7} x + \text{ec.}\Big)$ $-\frac{(n-1)(n-3)\ldots.2}{1.3.5\ldots n} \cos x$ se n è impari; e se è pari, $+\frac{(n-1)(n-3)\ldots..1}{2.4\ldots n} x$. Per esempio, $\int dx \, sen^{5} x = C - \frac{\cos x}{5}\Big(sen^{4} x + \frac{4 sen^{2} x}{3} + \frac{4.2}{3}\Big)$; e $\int dx \, sen^{6} x = C - \frac{\cos x}{6}\big(sen^{5} x + \frac{5}{4} sen^{3} x + \frac{5.3}{4.2} sen \, x\big) + \frac{5.3.1}{6.4.2} x$.

1097. Facciasi $x = 90° - z$; avremo $dx = -dz$, $sen \, x = \cos z$, $\cos x = sen \, z$, e $\int dz \cos^{n} z = \frac{sen \, z}{n}\Big(\cos^{n-1} z + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3} z + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5} z + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)}\cos^{n-7} z + \text{ec.}\Big) + \ldots..$ $\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots2}{1.3.5\ldots n} sen \, z$ se n è impari; e se è pari, $+\frac{(n-1)(n-3)\ldots1}{2.4\ldots n} z$. Per esempio, $\int dy \cos^{5} y = C + \frac{sen \, y}{5}(\cos^{4} y + \frac{4}{3}\cos^{2} y + \frac{4.2}{3.1})$; e $\int dy \cos^{6} y = C + \frac{1}{6} sen \, y \,(\cos^{5} y + \frac{5}{4}\cos^{3} y + \frac{5.3}{4.2}\cos y) + \frac{5.3.1}{6.4.2} y$.

1098. Sia ora da integrarsi $dy \, sen^{m} y \cos^{n} y$; poichè $d(sen^{p} y. \cos^{q} y) = p\cos^{q+1} y \, sen^{p-1} y \, dy - q\cos^{q-1} y \, sen^{p+1} y \, dy$ (1011), sarà $\int dy \, sen^{p-1} y \cos^{q+1} y = \frac{1}{p} sen^{p} y \cos^{q} y + \frac{q}{p}\int dy \cos^{q-1} y \, sen^{p+1} y$: dunque fatto $p - 1 = m$, $q + 1 = n$, verrà $\int dy \, sen^{m} y \cos^{n} y = \frac{sen^{m+1} y \cos^{n-1} y}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int dy \cos^{n-2} y \, sen^{m+2} y$; sostituendo $1 - \cos^{2} y$ in vece di $sen^{2} y$ e trasponendo, si ha $\int dy \, sen^{m} y \cos^{n} y = \frac{sen^{m+1} y \cos^{n-1} y}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int dy \, sen^{m} y \cos^{n-2} y = C + \frac{sen^{m+1} y}{m+n} \times$

$\left(\cos^{n-1} y + \frac{(n-1)\cos^{n-3} y}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3)\cos^{n-5} y}{(m+n-2)(m+n-4)} + \text{ec.}\right) + \ldots$
$\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2\,\text{sen}^{m+1} y}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+1}$ se n è impari; e se è pari, $+$
$\frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+2}\int dy\,\text{sen}^m y$ (1096).

1099. Facciasi $y = 90° - z$; avremo $\int dz \cos^m z\,\text{sen}^n z = C - \frac{\cos^{m+1} z}{m+n}\left(\text{sen}^{n-1} z + \frac{(n-1)\,\text{sen}^{n-3} z}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3)\,\text{sen}^{n-5} z}{(m+n-2)(m+n-4)} + \text{ec.}\right) -$
$\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2\cos^{m+1} z}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+1}$ se n è impari; e se è pari, $+$
$\frac{(n-1)(n-3)\ldots 1 \,.\int dz \cos^m z}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+2}$ (1097).

Per esempio, la prima formula dà $\int dy \cos^3 y\,\text{sen}^5 y = C + \frac{1}{8}\text{sen}^6 y\,(\cos^2 y + \frac{1}{3}) = C + \frac{1}{8}\text{sen}^6 y\,(\frac{4}{3} - \text{sen}^2 y)$, e la seconda $\int dy \cos^3 y\,\text{sen}^5 y = C - \frac{1}{8}\cos^4 y\,(\text{sen}^4 y + \frac{2}{3}\text{sen}^2 y + \frac{1}{3})$. Bisogna dunque che i due risultati siano eguali, o differiscan solo d' una quantità costante, che nel caso nostro è $\frac{1}{24}$, riducendo tutto in seni e osservando che $\cos^4 = (1 - \text{sen}^2)^2$.

1100. Consideriamo ora i rotti nei quali entrano seni ec.:
1°. $\int\frac{dy}{\text{sen}\,y} = \int\frac{dy\,\text{sen}\,y}{\text{sen}^2 y} = \int\frac{-d(\cos y)}{1-\cos^2 y} = (1074) - \frac{1}{2}\int\frac{d(\cos y)}{1+\cos y} -$
$\frac{1}{2}\int\frac{d(\cos y)}{1-\cos y} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1-\cos y}{1+\cos y} = \frac{1}{2}\,l\,\text{tang}^2\frac{1}{2}y$ (714) $= l\,\text{tang}\,\frac{1}{2}y$.
Fatto $y = 90° - z$, avremo $dy = -dz$, $\text{sen}\,y = \cos z$; dunque
2°. $\int\frac{dz}{\cos z} = -l\,\text{tang}\,(45° - \frac{z}{2}) = -l\cot(45° + \frac{z}{2})$ (723) $=$
$l\,\text{tang}\,(45° + \frac{z}{2})$ (701): 3°. $\int\frac{dy\cos y}{\text{sen}\,y} = \int\frac{d(\text{sen}\,y)}{\text{sen}\,y} = l\,\text{sen}\,y =$
$\int dy \cot y$: 4°. $\int\frac{dy\,\text{sen}\,y}{\cos y} = \int\frac{-d(\cos y)}{\cos y} = -l\cos y = l\sec y =$
$\int dy\,\text{tang}\,y$: 5°. $\int\frac{dy}{\text{sen}\,y\cos y} = \int\frac{dy}{\cos^2 y\,\frac{\text{sen}\,y}{\cos y}} = \int\frac{dy}{\cos^2 y\,\text{tang}\,y} = l\,\text{tang}\,y$.

1101. Posto ciò, cerco $\int\frac{dy}{\text{sen}^m y}$. Poichè (1096) $\int dy\,\text{sen}^n y = -$
$\frac{\cos y\,\text{sen}^{n-1} y}{n} + \frac{n-1}{n}\int dy\,\text{sen}^{n-2} y$, sia $n - 2 = -m$ ovvero $n =$

$2-m$, ed ho $\int \frac{dy}{sen^{m-2} y} = \frac{\cos y \, sen^{1-m} y}{m-2} + \frac{1-m}{2-m} \int \frac{dy}{sen^m y}$; dunque $\int \frac{dy}{sen^m y} = - \frac{\cos y}{(m-1) sen^{m-1} y} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dy}{sen^{m-2} y} = - \frac{\cos y}{m-1}$ $\left(\frac{1}{sen^{m-1} y} + \frac{m-2}{(m-3) sen^{m-3} y} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5) sen^{m-5} y} + \text{ec.} \right) - \frac{(m-2)(m-4) \ldots 2 \cos y}{(m-1)(m-3) \ldots 1 \, sen \, y}$ se m è pari; e se è impari, $+ \frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2}$ $\int \frac{dy}{sen \, y}$ (1100).

1102. Suppongasi $y = 90° - z$, e sarà $\int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{sen \, z}{m-1}$ $\left(\frac{1}{\cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{(m-3) \cos^{m-3} z} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5) \cos^{m-5} z} + \text{ec.} \right) + \frac{(m-2)(m-4) \ldots 2 \, sen \, z}{(m-1)(m-3) \ldots 1 \cos z}$ se m è pari; e se è impari, $+ \ldots \ldots$ $\frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2} \int \frac{dz}{\cos z}$ (1100). Per esempio $\int \frac{dy}{\cos^7 y} = \ldots$ $\frac{sen \, y}{6} \left(\frac{1}{\cos^6 y} + \frac{5}{4 \cos^4 y} + \frac{5 \cdot 3}{4.2. \cos^2 y} \right) + \frac{5.3.1}{6.4.2} l \, tang \left(45° + \frac{y}{2} \right)$.

1103. E' dunque facile integrar la formula $\frac{dy \cos^m y}{sen^n y}$; poichè se $m = 2k+1$, si ha $\frac{dy \cos^{2k+1} y}{sen^n y} = \frac{d(sen \, y)}{sen^n y} (1 - sen^2 y)^k$, che fatto $sen \, y = z$, diventa $z^{-n} dz (1-z^2)^k$ integrabile, giacchè quì k è numero intero e positivo (1021). Se $m = 2k$, allora $\frac{dy \cos^{2k} y}{sen^n y} = \frac{dy (1 - sen^2 y)^k}{sen^n y}$, espressione che sviluppata s'integrerà per mezzo della formula $\int \frac{dy}{sen^m y}$ (1101). Lo stesso sarebbe per $\int \frac{dy \, sen^m y}{\cos^n y}$ e $\int \frac{dy}{sen^m y \cos^n y}$.

Integrazione delle Differenziali a più Variabili.

1104. Se T sia una funzione di più variabili x, y, z ec., le differenze $\overset{x}{d}$T di T per x, $\overset{y}{d}$T di T per y, $\overset{z}{d}$T di T per z ec., le quali si hanno facendo variar solamente o x o y o z ec., si chiamano *differenze parziali* di T: ed all'incontro le somme $\int^x T dx$, $\int^y T dy$, $\int^z T dz$ ec. che si hanno integran-

do per x o per y o per z ec., cioè considerando come variabile la sola x, la sola y, la sola z ec., posson dirsi *somme parziali* di T. Tale è la notazione che adottiamo per le differenze parziali; ella ci sembra più espressiva e meno equivoca di quante ne sono in uso tra gli Scrittori, i più dei quali indicano con $\frac{dT}{dx}dx, \frac{dT}{dy}dy, \frac{dT}{dz}dz$ ec. ciò che noi intendiamo per $\overset{x}{d}T, \overset{y}{d}T, \overset{z}{d}T$ ec. Si osservi intanto, come per principio fondamentale di simili differenze, che supposto $T=\varphi(x,y)$ (984), sarà $\overset{x}{d}T=\varphi(x+dx,y)-T$ (989) e $\overset{y}{d}\overset{x}{d}T=\varphi(x+dx,y+dy)-\overset{y}{d}T-\overset{x}{d}T$: parimente $\overset{y}{d}T=\varphi(x,y+dy)-T$ e $\overset{x}{d}\overset{y}{d}T=\varphi(x+dx,y+dy)-\overset{x}{d}T-\overset{y}{d}T$; dunque $\overset{y}{d}\overset{x}{d}T=\overset{x}{d}\overset{y}{d}T$.

1105. Data pertanto una differenziale $Pdx+Qdy$ a due variabili in cui P, Q son funzioni di x,y, se T ne sia l'integrale, avremo $dT=Pdx+Qdy$; dunque supponendosi x,y indipendenti l'una dall'altra, si potranno formar le particolari equazioni $\overset{x}{d}T=Pdx$, $\overset{y}{d}T=Qdy$: e poichè $\overset{y}{d}\overset{x}{d}T=dx\overset{y}{d}P$, $\overset{x}{d}\overset{y}{d}T=dy\overset{x}{d}Q$ e $\overset{y}{d}\overset{x}{d}T=\overset{x}{d}\overset{y}{d}T$ (1104), sarà $dx\overset{y}{d}P=dy\overset{x}{d}Q$ e $\frac{\overset{y}{d}P}{dy}=\frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, cioè *una differenziale* Pdx + Qdy *sarà esatta o potrà integrarsi se la differenza parziale di* P *per* y *divisa per* dy *eguagli quella di* Q *per* x *divisa per* dx.

Dunque 1°. giacchè $\overset{x}{d}T=Pdx$, $\overset{y}{d}T=Qdy$, sarà $\overset{x}{d}T+\overset{y}{d}T=Pdx+Qdy=dT$, e in generale da V, funzione di x,y, si ha sempre $\overset{x}{d}V+\overset{y}{d}V=dV$: 2°. se varj la sola x e poi la sola y, sarà I°. $T=\int^x Pdx+C$, II°. $T=\int^y Qdy+C'$ e potrà esser $C=\varphi(y)$, $C'=\varphi(x)$: 3°. le due espressioni $\int^x Pdx, \int^y Qdy$ avranno *comuni* tutti i termini ove si trova xy; onde i termini *non comuni* in quelle espressioni conterranno x senza y in $\int^x Pdx$, ed y senza x in $\int^y Qdy$ (996): 4°. poichè dalla I. equazione si ha $\overset{y}{d}T\ (=Qdy)=\overset{y}{d}\int^x Pdx+dy\varphi'(y)$ (1016), dalla II. $\overset{x}{d}T\ (=Pdx)=\overset{x}{d}\int^y Qdy+dx\varphi'(x)$, sarà (1025) $\varphi(y)=\int(Qdy-\overset{y}{d}\int^x Pdx)$, $\varphi(x)=\int(Pdx-\overset{x}{d}\int^y Qdy)$ e perciò III. $T=\int^x Pdx+\int(Qdy-\overset{y}{d}\int^x Pdx)$, IV. $T=\int^y Qdy+\int(Pdx-\overset{x}{d}\int^y Qdy)$.

1106. Per render più comode queste integrali, chiamo S i termini *comuni* o simili, e D, D' i *non comuni* o dissimili in $\int^x Pdx$, $\int^y Q dy$ (1105.3°.), onde $\int^x Pdx = S + D$, $\int^y Qdy = S + D'$. Sostituiti questi valori nella somma della III. e IV. equazione, verrà $2T = D + D' + 2S + \int(Pdx + Qdy) - \int(d^y D + d^y S + d^x D' + d^x S)$: ma $\int(Pdx + Qdy) = T$, $d^y S + d^x S = dS$ (1105.1°.), $d^y D = 0$, $d^x D' = 0$ (1105.3°.); dunque $T = D + D' + S$, cioè *l'integrale d'una differenziale esatta* $Pdx + Qdy$ *si ha dalle somme parziali di* Pdx *per* x *e di* Qdy *per* y, *presi una sola volta i termini simili*. Così giacchè la differenziale $(3x^2 + 2bxy - 3y^2)dx + (bx^2 - 6xy + 3cy^2)dy$ è esatta, trovandosi $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx} = 2bx - 6y$, integro $3x^2 dx + 2byxdx - 3y^2 dx$ per x e viene $x^3 + byx^2 - 3xy^2$; integro $bx^2dy - 6xydy + 3cy^2dy$ per y ed ho $bx^2y - 3xy^2 + cy^3$: onde $T = D + D' + S = x^3 + byx^2 - 3y^2x - cy^3 + C$. Ma poichè talora è necessaria qualche sostituzione per giunger più facilmente all'integrali, ne porremo quì varj esempj.

I. $\int \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$: fatto $\frac{y}{x} = z$, si ha $\int \frac{x^2 dz}{(x - zx)^2} = \int \frac{dz}{(1-z)^2}$.

II. $\int \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$: fatto $\frac{x}{y} = z$, si ha $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$.

III. $\int \frac{3xdx + ydx - xdy - 3ydy + 2dy\sqrt{a}\sqrt{(x+y)}}{2\sqrt{(x+y)}}$: fatto $\sqrt{(x+y)} = z$, si ha $\int [(2z - \sqrt{a})dx + (2x - 3z^2 + 2z\sqrt{a})dz]$.

IV. $\int \frac{3(a+y)(3xdy + dx) + xdylx}{3x\sqrt[3]{(a+y)^2}}$: fatto $\sqrt[3]{(a+y)} = z$, si ha $\int (zx^{-1}dx + dzlx + 9z^3dz)$.

V. $\int \frac{-(5xy + 6y^2)dx - (5xy + 6x^2)dy}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x + y = z^2$, onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $dx + dy = 2zdz$, moltiplico la I. per la IV. e la II. per la III. ed ho $xydx + xydy = 2pzdz$, ed $x^2dy + xydx + xydy + y^2dx = z^2dp$; dunque $5xydx + 5xydy = 10pzdz$ e $6x^2dy + 6y^2dx = 6z^2dp - 12pzdz$; sommate queste due equazioni, la data integrale diviene $\int (p^{-3}dz - 3zp^{-4}dz)$.

VI. $\int \frac{a(x^3dy + y^3dx)}{(x^2 + y^2)\sqrt{(a^2x^2 + a^2y^2 - x^2y^2)}}$: fatto I. $xy = p$,

II. $x^2 + y^2 = z^2$ onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $xdx + ydy = zdz$, moltiplico come sopra ed ho $x^2ydx + xy^2dy = pzdz$, ed $x^3dy + yx^2dx + xy^2dy + y^3dx = z^2dp$; dunque sottratte queste due equazioni, la data diviene $\int \frac{a(zdp - pdz)}{z\sqrt{(a^2z^2 - p^2)}}$, ove fatto $\frac{p}{z} = u$, si ha $\int \frac{adu}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}$.

VII. $\int \frac{(2x^2y - y^3)dx + (x^3 - 2xy^2)dy}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x^2 - y^2 = z^2$, onde III. $xdy + ydx = dp$, IV. $xdx - ydy = zdz$, moltiplico al solito ed ho $yx^2dx - xy^2dy = pzdz$, ed $x^3dy + yx^2dx - xy^2dy - y^3dx = z^2dp$; dunque sommando queste due equazioni, la data diviene $\int (pdz + zdp)$.

1107. Data una differenziale a tre variabili $Pdx + Qdy + Rdz$, e chiamata la sua integrale T, sarà $d^xT = Pdx$, $d^yT = Qdy$, $d^zT = Rdz$; dunque (1105) perchè la differenziale sia completa o possa integrarsi, bisogna che sia $\frac{d^yP}{dy} = \frac{d^xQ}{dx}$, $\frac{d^zP}{dz} = \frac{d^xR}{dx}$, $\frac{d^zQ}{dz} = \frac{d^yR}{dy}$.

1108. Avverandosi queste condizioni, *l'integrale* $T = D + D' + D'' + S$ *si otterrà integrando* Pdx *per* x, Qdy *per* y, Rdz, *per* z, *presi tutti i termini diversi e una sola volta i simili* (1106). Così poichè in $(2y^2x + 4bz^2x^3)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{(y^2 + z^2)}} + 3y^2 + 2x^2y\right)dy + \left(4z^3 + 2bx^4z + \frac{z}{\sqrt{(y^2 + z^2)}}\right)dz$ si avverano le tre condizioni, viene $\int^x Pdx = y^2x^2 + bz^2x^4$, $\int^y Qdy = \sqrt{(y^2 + z^2)} + y^3 + x^2y^2$, $\int^z Rdz = z^4 + bx^4z^2 + \sqrt{(y^2 + z^2)}$, onde $T = D + D' + D'' + S = y^2x^2 + bz^2x^4 + \sqrt{(y^2 + z^2)} + y^3 + z^4 + C$. Così si trovan le condizioni per le differenziali di un più gran numero di variabili, e si integra quando hanno luogo.

1109. Data ora la differenziale del second' ordine $Pd^2x + Qdx^2$ ove P, Q son funzioni di x, prendo quella del primo Pdx, la cui differenziale è $Pd^2x + dxdP$; dunque paragonando la data con questa, verrà $Qdx = dP$, equazione che avverandosi dà $\int (Pddx + Qdx^2) = Pdx$. Così $mx^{m-1}ddx + m(m-1)x^{m-2}dx^2$ è integrabile, poichè $dP = m(m-1)x^{m-2}dx = Qdx$, e l'integrale è $mx^{m-1}dx$, che nuovamente integrata dà $x^m + C$.

1110. Con dx costante la differenziale è Qdx^2, onde $\int Qdx^2 = dx\int Qdx$ + la costante Cdx. Per esempio $\int dx^2(1-x^2) = dx\int(dx - x^2 dx) = dx(x - \frac{1}{3}x^3) + Cdx$, e nuovamente integrando, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^4 + Cx + C'$.

1111. Data la differenziale del terz'ordine $Rd^3x + \int dxd^2x + Tdx^3$, prendo quella del secondo $Pd^2x + Qdx^2$, che differenziata dà $Pd^3x + (dP + 2Qdx)d^2x + dQdx^2$, ed ho $R = P$, $Sdx = dP + 2Qdx$, $Tdx = dQ$ e perciò $Q = \int Tdx + C$. Sostituiti i valori di P, Q nella seconda equazione, verrà $\frac{S}{2} - \frac{dR}{2dx} - \int Tdx = C$, equazione che avverandosi, dà l'integrale $Rddx + dx^2(\int Tdx + C)$. Per esempio $x^2d^3x + 2x^3dxddx + (3x^2 - 1)dx^3$ ha la condizione necessaria, e l'integrale è $x^2ddx + dx^2(x^3 - x + C)$.

1112. Se dx è costante, si avrà l'integrale $dx^2(\int Tdx + C)$; dunque integrando, $dx\int(dx\int Tdx + C) + C'dx$, e di nuovo integrando, $\int(dx\int dx\int Tdx + C) + C'x + C''$. Così $dx^2\int x^m dx = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$. Nel modo stesso si trovano le condizioni e le integrali di differenziali più elevate.

1113. Sia la differenziale del second'ordine a due variabili $Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$. Prendo la differenziale di $Adx + Bdy$, nella quale A e B son funzioni qualunque di x, y, ed ho $Addx + Bddy + dAdx + dBdy$, che fatto $dA = \overset{x}{d}A + \overset{y}{d}A$, $dB = \overset{x}{d}B + \overset{y}{d}B$, diviene $Addx + Bddy + \frac{\overset{x}{d}A}{dx}.dx^2 + \left(\frac{\overset{y}{d}A}{dy} + \frac{\overset{x}{d}B}{dx}\right)dxdy + \frac{\overset{y}{d}B}{dy}.dy^2$; onde $P = A, Q = B$. e perciò $R = \frac{\overset{x}{d}P}{dx}$, $S = \frac{\overset{y}{d}P}{dy} + \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, e $T = \frac{\overset{y}{d}Q}{dy}$. Verificandosi queste condizioni, l'integrale sarà $Pdx + Qdy$: tanto avviene in $yddx - xddy$ il cui integrale è $ydx - xdy$.

1114. Con dx costante, dovrà integrarsi $Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$, che nascendo come prima da $Adx + Bdy$, darà $Q = B, R = \frac{\overset{x}{d}A}{dx}$, $S = \frac{\overset{y}{d}A}{dy} + \frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$, $T = \frac{\overset{y}{d}Q}{dy}$; dunque $\overset{x}{d}A =$

Rdx, $A=\int^x Rdx+\varphi(y)$, ove essendo $d^y A\left(=Sdy-\frac{d^x Qdy}{dx}\right)=d^y\int^x Rdx+dy\varphi'(y)$, verrà $\varphi(y)=\int\left(Sdy-\frac{d^x Qdy}{dx}-d^y\int^x Rdx\right)$; e le condizioni per integrare saranno $S=\frac{d^x Q}{dx}+\ldots\ldots\frac{d^y(\int^x Rdx+\varphi(y))}{dy}$, $T=\frac{d^y Q}{dy}$; onde l'integrale $Adx+Bdy$ diverrà $dx\int^x Rdx+dx\,\varphi(y)+Qdy+Cdx$. Per esempio $(ax+x^2)ddy+ydx^2+(3x+2y+a)dxdy$, presa dx costante, ha le condizioni prescritte, e l'integrale è $(xy+y^2+C)dx+(ax+x^2)dy$. Nel modo stesso si trovan le condizioni per più di due variabili.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE.

Le applicazioni del Calcolo Integrale si estendono a tutte le parti delle Matematiche; ma noi ci limiteremo a quelle che son puramente geometriche e che servon di fondamento all'altre (1003).

Quadratura delle Curve.

198. 1115. Sia la curva AM con le coordinate $AP=x$, $PM=y$ e vogliasi la quadratura dello spazio $AMP=Q$. Condotta l'ordinata mp e la Mr parallela a Pp, sarà $Pp=Mr=\delta x$, $rm=\delta y$, e lo spazio $MmpP=(y+\frac{1}{2}\delta y)\delta x$, onde $\frac{\delta Q}{\delta x}>y+\frac{1}{2}\delta y$: dunque presi i limiti (1001) o fatto $\delta y=0$ (999), verrà $dQ=ydx$ e $Q=AMP=\int ydx+C$, onde $AMQ=\int xdy+C$: ove si noti 1°. che se le coordinate facciano un angolo obliquo $P=\varphi$, sarà (758) $AMP=sen\,\varphi\int ydx+C$: 2°. che per integrar queste formule deve y esser data per x o x per y.

199. 1116. Es. I. Sia un quadrante di circolo descritto col centro A e col raggio a: si avrà $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$ e $\int ydx=AQMP=\int dx\sqrt{(aa-xx)}+C=C+ax-\frac{x^3}{2.3a}-\frac{1.x^5}{2.4.5a^3}-\frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5}-\frac{1.3.5x^9}{2.4.6.8.9a^7}-$ ec. (180). Fatto $x=0$, sarà $AQMP=0$, e però

$C=0$; dunque AQMP $= ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$ — ec. (927). 199.

II. Nell'ellisse, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$; dunque $\int ydx = \frac{b}{a}(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$ — ec.) (929).

III. Nella parabola, $ydx = dx\sqrt{px}$ e $\int ydx = \frac{2x}{3}\sqrt{px} = \frac{2}{3}xy$ (930). L'equazione alle parabole di tutti i gradi è $y^m = x^n a^{m-n}$; dunque $mly = nlx + (m-n)la$, $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$ ed $m:n::ydx:xdy::\int ydx:\int xdy$:: AMP : AMQ: onde lo spazio AMP sta al rettangolo circoscritto APMQ $::m:m+n$. 198.

IV. Nell'iperbola equilatera, $xy = aa$ ed $ydx = \frac{aadx}{x}$; dunque $\int ydx = aalx + C$. Se si voglion prendere gli spazj dall' origine A, lo spazio sarà $=0$ quando $x=0$; dunque $C = -aal0 = \infty$ (361), e lo spazio Q'APMN $= aalx - aal0 = \infty$. Se $x = AD = a$, allora lo spazio Q'ADBN $= aala - aal0$; dunque BDPM $= aalx - aala = aal\frac{x}{a}$ (933). 200.

V. Nella cicloide AEB', $xdy = dx\sqrt{(2ax-x^2)}$ (1038) e $\int xdy$ (= ACR) (1115) $= \int dx\sqrt{(2ax-x^2)}$ = ALQP (1038.1115); dunque tutto lo spazio AED eguaglia tutto il semicircolo AQB' ec. (947). 190.

VI. Nella cissoide, $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ (940) e $\int ydx$ = AKMPA $= \int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ora $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}}$ = ACONP (I.); e se si riduca $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}}$ a $\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, si troverà (1072) $\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Dunque $\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} - 2x(ax-xx)^{\frac{1}{2}}$, ovvero APMKA = 3ACONP − 4ANP = 3ACONA − ANP. Dunque poichè quando $x=a$ il triangolo ANP svanisce e il segmento ACONA si cangia nel semicircolo ACNB, lo spazio infinitamente lungo MKABQ è triplo del semicircolo genitore. 201.

VII. Nella logaritmica, $ydx = Ady$ (1028), e $\int ydx$ = BAPM $= Ay + C$: ma quando $y = 1 = AB$, lo spazio ABMP diventa nullo; dunque $C = -A$, e ABMP $= A(y-1)$ = al rettangolo OIQM. Se si fa $y=0$, si avrà lo spazio infinitamente lungo BXYA $= -A$ = al rettangolo PQIT. 202.

203. VIII. Sia una curva BM che abbia per equazione $y = x^x$; si avrà (1093) lo spazio ABMP $= \int x^x dx = x\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{4^4} + \text{ec.}\right) + xxlx\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{4^3} - \text{ec.}\right) + \frac{x^3 l^2 x}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^3} - \text{ec.}\right) + \text{ec.}$ Se $x = AP = PM = 1$, lo spazio ABMP $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \text{ec.} = 0{,}783430510712$ ec.

204. IX. Sia la curva dei seni AMA′M′ ec. la cui equazione è $x = \text{arc. sen}\, y$ ovvero $y = \text{sen}\, x$; si avrà APM $= \int dx\, \text{sen}\, x = C - \cos x$. Faccio $x = 0$, sarà $C = 1$, APM $= 1 - \cos x$. Sia $x = 180° = c$, si avrà AMA′ $= 2$, doppio del quadrato del raggio. Se $x = 2c =$ AA″, si avrà lo spazio AMA′A + A′M′A″A′ $= 0$, il che è chiaro, poichè l'uno è positivo e l'altro negativo. In generale se $x = 2kc$, lo spazio sarà zero; e se $x = (2k + 1)c$, lo spazio sarà $= 2$. Posta l'origine degli x nel punto A,

205. medio di A′A′, la retta x diverrà $\frac{1}{2}c - x = 90° - x$, e si avrà $y = \cos x$; onde lo spazio ABMP $= \text{sen}\, x$, lo spazio ABA′A $= 1$, e A′MBA′A $= 0$, o non attendendo alle sue due parti positiva e negativa, A′MBA′A $= 2$.

211. X. Nella curva CE a doppia curvatura volendo lo spazio CEF (parte della superficie curva CDEF normalmente alzata sulla curva CD (961)) y è $s = \int \surd(dy^2 + dz^2)$ (961); dunque $\int y dx$ diverrà $\int dx \int \surd(dy^2 + dz^2)$. Così se le sue equazioni sieno $y^2 = px$, $(y^2 + 2p^2)^3 = 9p^4 z^2$, verrà $dx = \frac{2ydy}{p}$, $dz^2 = \frac{(y^2 + 2p^2)y^2 dy^2}{p^4}$, $\surd(dy^2 + dz^2) = \frac{dy}{p^2}(p^2 + y^2)$, $\int \surd(dy^2 + dz^2) = y + \frac{y^3}{3p^2}$, e $\int dx \surd(dy^2 + dz^2) = \int\left(\frac{2y^2 dy}{p} + \frac{2y^4 dy}{3p^3}\right) = \frac{2y^3}{3p} + \frac{2y^5}{15p^3}$ senza costante, perchè $y = 0$ dà lo spazio $= 0$.

206. 1117. Se l'ordinate partono da un punto fisso C, il rettangolo pPMr di prima (1115) diventa un triangolo CMr, e quindi lo spazio COMC $= \frac{1}{2}\int y dx + C$. Sia ϕ l'angolo che fa CM con una retta fissa CA; avremo M$r = yd\phi$ (759. 727), e COMC $= \frac{1}{2}\int y^2 d\phi + C$.

207. 1118. Esemp. I. Sia la concoide AM, il suo polo P, PM $= y$, QM $= a$, PB $= b$, e l'angolo APM $= \phi$; si avrà (756) PQ $=$

FIG.

$\frac{b}{\cos\varphi}$, ed $y = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a$; dunque lo spazio APM $= \frac{b^2}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \pm$ 207
$ab\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{a^2}{2}\int d\varphi = \frac{b^2 tang\,\varphi}{2} \pm ab\,l\,tang\,(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ (1100) $+$
$\frac{1}{2}a^2\varphi$ senza costante; dunque poichè PBQ $= \frac{1}{2}b^2\,tang\,\varphi$ (755), sarà $\pm$ APM $\mp$ PBQ $=$ ABQM $= ab\,l\,tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \pm \frac{1}{2}a^2\varphi$, ed AAMM $= 2ab\,l\,tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$.

II. Nella cissoide se si fa AB $= a$, AM $= y$, MAB $= \varphi$, sarà AQ $= \frac{a}{\cos\varphi}$ (750), AO $=$ MQ $= a\cos\varphi$ (757), AP $= y\cos\varphi$, 201.
PM $= y\,sen\,\varphi$, $y = \frac{a}{\cos\varphi} - a\cos\varphi$, ed $y^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} - 2a^2 +$
$a^2\cos^2\varphi$; dunque AKMOA $= \frac{a^2}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - a^2\int d\varphi + \frac{a^2}{2}\int d\varphi\cos^2\varphi$
$= \frac{1}{2}a^2\,(tang\,\varphi + \frac{1}{4}sen\,2\varphi - \frac{3}{2}\varphi)$ (1097). Dunque AKMPA $=$ AMP $(= \frac{1}{2}y^2\,sen\,\varphi\cos\varphi) -$ AKMOA $= \frac{1}{2}a^2\,(\frac{3}{2}\varphi - \frac{5}{4}sen\,2\varphi + sen\,\varphi\cos^3\varphi)$. Ma $sen\,\varphi\cos^3\varphi = \frac{1}{4}sen\,4\varphi + sen^3\varphi\cos\varphi$ (735) $=$
$\frac{1}{8}sen\,4\varphi + sen\,\varphi\cos\varphi - sen\,\varphi\cos^3\varphi$ (696) e però $sen\,\varphi\cos^3\varphi =$
$\frac{1}{4}\,(\frac{1}{2}sen\,4\varphi + sen\,2\varphi)$; dunque AKMPA $= \frac{1}{2}a^2\,(\frac{3}{2}\varphi - sen\,2\varphi + \frac{1}{8}sen\,4\varphi)$. Fatto $\varphi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ (607); si ha $sen\,2\varphi = 0 = sen\,4\varphi$ (692), e poichè $\frac{1}{4}a^2\varphi$ è il semicircolo AONB (606), sarà lo spazio infinitamente lungo MKABQ $= \frac{3}{4}a^2\varphi =$ 3AONB.

III. Nella spirale d' Archimede, AGFBN $= x$, AGFBA $=$ c, CM $= y$, CA $= a$, M$r = \frac{ydx}{a}$, d(COMC) $= \frac{Mr.CM}{2}$ (1117) $=$ 206.
$\frac{y^2dx}{2a}$, $x = \frac{cy}{a}$ (954), $dx = \frac{cdy}{a}$; dunque COMC $= \frac{cy^3}{2.3a^2}$ senza costante; onde fatto $y = a$, lo spazio COMAC $= \frac{ac}{2.3} =$ al terzo di tutto il circolo,

Non si è preso quì l' integrale $\frac{1}{2}\int y^2 d\varphi$ perchè questo non può estendersi al di là di $\varphi = 360^\circ$, altrimenti i triangoli elementari $\frac{1}{2}y^2 d\varphi$ conterrebbero i già sommati, difetto a cui può supplirsi calcolando i trapezj elementari compresi tra due spire vicine. Lo stesso inconveniente ha luogo per la formula ordinaria $\int ydx$ se più ordinate corrispondano alla stessa ascissa.

IV. Nella spirale iperbolica scemando x mentre cresce y (957), sarà CN (a) : Nn $(-dx)$ :: CM (y) : M$r = -\frac{ydx}{a}$; dunque COMC $= \frac{1}{2}\int\frac{-y^2dx}{a}$: ma $xy = ab$ (958), e però $-ydx =$ 208.

$xdy = \frac{ab.ly}{y}$; dunque $-\frac{y^2 dx}{a} = bdy$, e lo spazio compreso tra la curva e due ordinate $= \frac{1}{2}l'y + C$.

146. V. Questo metodo può applicarsi anche alle curve che han l'ordinate parallele. Vogliasi per esempio la quadratura del settor parabolico AFM. Fatto l'angolo $AFM = \beta = 2\varphi$ e perciò $FM = y = \frac{\frac{1}{4}p}{\cos^2\varphi}$ (887), sarà $\frac{1}{2}\int y^2 d\varphi = \frac{p^2}{16}\int\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} =$ (1102) $\frac{p^2}{16}\left[\frac{1}{3}sen\,\varphi\left(\frac{1}{\cos^3\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\right)\right] = \frac{p^2}{16}\left[\frac{1}{3}tang\,\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}+2\right)\right]$ $= (700.697)\frac{1}{16}p^2\left(\frac{1}{3}tang^3\varphi + tang\,\varphi\right)$ senza costante se il settore cominci dal punto A.

135. Quindi (sia detto quì di passaggio) in due parabole AM, A′M′ col fuoco ed asse medesimo e coi parametri p, p', i settori AFM, A′FM′ compresi tra due raggi vettori comuni, saran tra loro $:: p^2 : p'^2 :: FM^2 : FM'^2 :: x^2 : x'^2$ ec. (887).

Rettificazione delle Curve.

209. 1119. Poichè (1026) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, sarà l'arco $AM = s = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$ o l'ordinate sieno parallele o partano da un punto fisso.

199. 1120. Es. I. Nel circolo, $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $dy^2 = \frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dx^2}{a^2-x^2}$, e $QM = s = \int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} =$ (1082) $x + \frac{x^3}{2.3a^2} + \frac{1.3x^5}{2.4.5a^4} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7a^6} +$ ec.; dunque l'arco $MB = y + \frac{y^3}{2.3a^2} + \frac{1.3y^5}{2.4.5a^4} +$ ec. (732).

198. II. Nella parabola, $AM = \int dy\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)} = \frac{2}{p}\int dy\sqrt{\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)} =$ (1081) $C + \frac{y}{p}\sqrt{\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)} + \frac{p}{4}\,l\left[y + \sqrt{\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)}\right]$. Facciamo $y=0$, e sarà $C = -\frac{p}{4}\,l\,\frac{p}{2}$; dunque $AM = \frac{y}{p}\sqrt{\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)} + \frac{p}{4}\,l2\left[\frac{y + \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)}}{p}\right]$.

209. 1121. Può osservarsi che se col centro A e col semiasse maggiore $BA = \frac{1}{2}p$ si descrive un'iperbola equilatera BN′, lo spazio ABN′Q sarà $\int xdy$ (1115) $= \int dy\sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)}$ (909); dun-

que $AM = \frac{2}{p}\int dy\sqrt{(y^2 + \frac{p^2}{4})} = \frac{2}{p} \times ABN'Q$ e però $AM \times \frac{1}{2}p = ABN'Q$; onde *la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell' iperbola e reciprocamente*.

III. Nell' ellisse, supposto il semiasse maggiore $=1$, sarà $y^2 = b^2(1-x^2)$, e fatto $1 - b^2 = c^2$ (895), si ha $BM = \int dx\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}}$, integrale che non può aversi con le regole precedenti. Bisogna dunque ridurre in serie: ma per maggior semplicità riducendo solamente $\sqrt{(1-c^2x^2)}$, avremo $BM = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}(1 - \frac{c^2x^2}{2} - \frac{c^4x^4}{2.4} - \frac{1.3c^6x^6}{2.4.6} - \frac{1.3.5c^8x^8}{2.4.6.8} - \text{ec.}) = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{c^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{c^4}{2.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1.3c^6}{2.4.6} \times \int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \text{ec.}$ Ora riducendo le integrali di ciascun termine a $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (1070) fatto $k = -\frac{1}{2}$, $m=2$, $a=1$, $b=-1$, $n=2,4,6$, ec., $i=1,2$, ec., $p=0$, si avrà $BM = (1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \text{ec.})\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + c^2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{2^2} + \frac{3c^2}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2} + \text{ec.}] + c^4x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{2.4^2} + \frac{3.5c^2}{2.4^2.6^2} + \frac{3.5^2 7c^4}{2.4^2.6^2.8^2} + \text{ec.}]$: ma $DN = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (1120.I.); dunque son note tutte le quantità di questa serie di cui è facile conoscer la legge.

Sia $x=1$; si avrà $AMB = (1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \text{ec.})$ AND. Dunque la periferia dell' ellisse è a quella del circolo circoscritto :: $1 - \frac{1}{2^2}.\frac{c^2}{a^2} - \frac{1.1^2}{2^2.4^2}.\frac{3c^4}{a^4} - \frac{1.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{5c^6}{a^6} -$ ec. : 1 (supposto a il semiasse maggiore). Questa serie sarà convergentissima quando i fuochi saran vicini. Per esempio se $c = \frac{1}{10}a$, la circonferenza dell' ellisse sarà a quella del circolo circoscritto : : 0,997 495 292 861 261 : 1.

1122. La rettificazion dell' iperbola si ha quasi collo stesso metodo, e può vedersi nelle Memorie di Berlino an. 1746 e seg. la maniera di ridurre alla rettificazione di queste due curve l' integrali d' un gran numero d' altre differenziali.

IV. Nella seconda parabola cubica, $y^3 = ax^2$; dunque $s =$

$\int dy \sqrt{\left(1+\frac{9y}{4a}\right)} = \frac{8}{27}a\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$ (1022); fatto $y=o$, si ha $C=-\frac{8}{27}a$ e l'arcò preso dall' origine $=\frac{8}{27}a\left[\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$ (1037).

211. V. Nella cicloide, $dy = dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$ (1038) preso $AB=a$; dunque $s=\int dx\sqrt{\frac{a}{x}} = 2\sqrt{ax} = 2AN$ (1039).

VI. Nella logaritmica, $ydx = ady$, $s=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(y^2+a^2)}$; se $\sqrt{(y^2+a^2)}=z$, si avrà $\frac{dy}{y}=\frac{zdz}{z^2-a^2}$ ed $s=\int\frac{z^2dz}{z^2-a^2}=z+\frac{a}{2}l\frac{z-a}{z+a}$ (1074) $=z+al\sqrt{\frac{z-a}{z+a}}=z+al\left(\frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{z+a}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}+al\left(\frac{y}{a+\sqrt{(y^2+a^2)}}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}-al\left(\frac{a+\sqrt{(aa+yy)}}{y}\right)+C$, espressione d'un arco di logaritmica in cui C è facile a determinarsi (1116. VII).

206. VII. Nella spirale d'Archimede, $ds = Mm = \sqrt{(rm^2+Mr^2)} = \sqrt{\left(dy^2+\frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}$ (1118): ma $x=\frac{cy}{a}$; dunque $s=COM=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(yy+\frac{a^4}{c^2}\right)}$. Descritta una parabola CN′ con $p=\frac{2a^2}{c}$, fatto $CQ=CM=y$ e condotta l'ordinata QN′, sarà $CN'=\int\frac{cdy}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+yy\right)}$ (1120); dunque $CN'=COM$, onde regna dell' analogìa tra questa spirale e la parabola.

208. VIII. Nella spirale iperbolica, $x=\frac{ab}{y}$, $dx=-\frac{abdy}{y^2}$ ed $rM\left(=-\frac{ydx}{a}\text{ (1118) }\right)=\frac{bdy}{y}$, onde $mM^2\,(=rm^2+rM^2)=dy^2+\frac{b^2dy^2}{y^2}$, e l'arco $COM=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(bb+yy)}$. Dunque descritta una logaritmica NK la cui suttangente $=b=$ a quella della spirale (1030), si avrà (Esem. VI.) MOC = all' arco infinito NK, prendendo l'ordinata $NR=CQ=CM$. Ma per l' espressione d'un'arco di spirale o di logaritmica compreso tra le due ordinate y, y', si troverà $\sqrt{(b^2+y^2)}-\sqrt{(b^2+y'y')}+bl\frac{y[b+\sqrt{(b^2+y'^2)}]}{y'[b+\sqrt{(b^2+y^2)}]}$.

FIG. 191.

IX. Nella spirale logaritmica (750) $cos\ Mmr\,(c):mr\,(dy)::$ $1:Mm=\frac{dy}{c}$; dunque ADM $=\frac{y}{a}=$ MT (750) per esser simili i triangoli mrM, MAT (516).

211.

X. Nella curva CE a doppia curvatura x è s, ed y è z (961); dunque $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ diviene $\sqrt{(ds^2+dz^2)}=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$). Così se le sue equazioni sieno $y^2=px$, $y^3=\frac{9}{16}pz^2$, verrà $dy^2=\frac{pdx^2}{4x}$, $dz^2=\frac{4ydy^2}{p}=dx^2\sqrt{\frac{p}{x}}$, e $\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=\int\sqrt{(dx^2+\frac{pdx^2}{4x}+dx^2\sqrt{\frac{p}{x}})}=\int dx\,(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}})=x+\sqrt{px}=x+y$ senza costante, perchè $x=0$ dà l'arco della curva $=0$.

Misura delle Solidità.

1123 Un solido S da misurarsi s'immagini decomposto in un'infinità di piccoli strati paralleli. Chiamando t la base d'un di essi, dx la sua altezza o una parte infinitesima della distanza x dello strato dal vertice, sarà $S=\int tdx+C$.

1124. Per esempio, sia B la base del solido, A la sua altezza; se le basi degli strati son proporzionali a una potenza m della loro distanza dal vertice, si avrà $A^m:B::x^m:t=\frac{Bx^m}{A^m}$; dunque $\int tdx=\frac{B}{A^m}\int x^m dx=\frac{Bx^{m+1}}{(m+1)A^m}$ senza costante se la porzione cominci dal vertice. Onde il solido intero $=\frac{BA}{m+1}$, poichè allora $x=A$; perciò la solidità delle piramidi, in cui $m=2$ (625), è $\frac{1}{3}$BA (649).

213.

1125. Se il solido BAB′ = S è di rivoluzione, fatta MP $=y$, P$p=\delta x$, sarà $mp=y+\delta y$, e il cono troncato $Mmm'M'=\pi\delta x\,(y^2+y\delta y+\frac{1}{3}\delta y^2)$ (650), onde $\frac{\delta S}{\delta x}>\pi\,(y^2+y\delta y+\frac{1}{3}\delta y^2)$; dunque presi i limiti (1001) o posto $\delta y=0$ (999), verrà $dS=\pi y^2dx$ ed $S=\pi\int y^2dx+C$.

Esem. I. Nella sfera, $y^2=2ax-x^2$; dunque la solidità d'un segmento sferico (655) $=\pi x^2\,(a-\frac{1}{3}x)$ e la sfera $=\frac{4}{3}a^3\pi=$ ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

II. Nell'ellisse, $yy=\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$; dunque il solido generato dalla sua rivoluzione intorno all'asse maggiore sta alla sfera circoscritta $::bb:aa$, ovvero è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

1126. Si chiama *Ellissoide allungata* quella che abbiamo considerata, ed *Ellissoide compressa* quella che è formata dalla rivoluzione dell'Ellisse intorno al suo asse minore. E' fa-

FIG. cile il trovare che anche quest' ultimo solido è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto. Dunque l' ellissoide allungata sta all' ellissoide compressa : $acbb : aab :: b : a$.

III. In una parabola di un ordine qualunque si ha $y^m = x^n a^{m-n}$, onde $\pi y^2 dx = \pi dx \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n}}$, e $\int \pi y^2 dx = \ldots\ldots$ $\frac{m\pi \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n+m}}}{2n+m} = \frac{m\pi x \sqrt[m]{a^{2m-2n} x^{2n}}}{2n+m} = \frac{m\pi x y^2}{2n+m}$, espressione del solido che perciò starà al cilindro circoscritto $:: m : m+2n$; quindi il paraboloide ordinario nel quale $m=2, n=1$, è la metà del cilindro circoscritto.

212. IV. Similmente se l' iperbola la cui equazione è $y^m x^n = a^{m+n}$ gira intorno all' asintoto CP, prendendo $CD = AD = a$, il solido descritto dal trapezio ADPM avrà per espressione $\frac{m}{2n-m} \pi (a^3 - xy^2)$, e perciò supposto $2n > m$, il solido descritto dallo spazio infinitamente lungo OADX sta al cilindro descritto da AECD $:: m : 2n-m$, e nell' iperbola ordinaria è eguale a questo cilindro.

Superficie curve dei Solidi di rivoluzione.

213. 1127. Sia R una superficie di rivoluzione, e si faccia tutto come sopra (1125): poichè $Mm = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)}$, la superficie del cono troncato $Mmm'M'$ sarà $\pi(2y+\delta y)\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}$ (639), onde $\frac{\delta R}{\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}} > \pi(2y+\delta y)$; dunque fatto $\delta y = 0$, verrà $dR = 2\pi y \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ed $R = 2\pi \int y \sqrt{(dx^2+dy^2)} + C = 2\pi \int n dx + C$, chiamando n la normale MN (1026).

Es. I. Nella sfera, $n = a$ (1026); dunque la superficie d' un segmento sferico qualunque è $2a\pi x$, e quella della sfera è $4a^2\pi$ o quattro circoli massimi.

II. Nel paraboloide ove $n = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$ (887), si ha $2\pi \int dx \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} = \frac{4\pi}{3p} \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)^3} + C$ (1021). Sia $x = 0$; sarà $C = -\frac{\pi p^2}{6}$.

214. III. Nell' ellisse fatto a il semiasse di rivoluzione che sarà il trasverso nell' ellissoide allungata e il conjugato nella compressa, e posto ne' due diversi casi $\pm a^2 \mp b^2 = c^2$; si avrà (897.892) $n = \frac{bc}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$, e però se la curva giri o intorno ad AA o intorno ad EE, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2\right)}$.

Nel peimo easo, descritto col raggio $CD = \frac{a^2}{c}$ un arco DBN, la superficie fatta da AM intorno ad AA sarà (1116) $\frac{2bc\pi}{a^2} \times$ ABNP; ma nel secondo, determinata C col porre $x = 0$, sarà (1081) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+x^2\right)} + \frac{a^2 b\pi}{c}\, l\, \frac{c}{a^2}\left[x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+x^2\right)}\right]$.

IV. Nell'iperbola fatto a il semiasse di rivoluzione che può essere o il trasverso o il conjugato, e posto $a^2 + b^2 = c^2$, si avrà (915.908) $n = \frac{bc}{a^2}\sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$, e però se la curva giri o intorno a CA o intorno a CQ, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx \times \sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2}\right)}$. Nel primo caso, determinata C col fare $x = a$, la superficie cercata sarà (1080) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)} - b^2\pi - \frac{a^2 b\pi}{c}\, l\, \frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{a(c+b)}$: ma nel secondo, determinata C col fare $x = 0$, sarà (1081) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{\left(x^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)} + \frac{a^2 b\pi}{c}\, l\left[\frac{cx}{a^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{c^2x^2}{a^4}\right)}\right]$.

Metodo inverso delle Tangenti, e Integrazione dell'Equazioni differenziali.

1128. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* quello che insegna a trovar l'equazione d'una curva in cui si conosca una proprietà qualunque delle tangenti. Cerchisi per es. la curva in cui la sunnormale è costante ed $= a$. Poichè (1026) l'espression generale di questa retta è $\frac{ydy}{dx}$, avremo $\frac{ydy}{dx} = a$, $ydy = adx$, e integrando, per esprimere che la proprietà data conviene a tutti i punti della curva, si ha $\frac{1}{2}y^2 = ax$, cioè $y^2 = 2a(x + C)$, equazione alla parabola, che risolve il problema proposto. E' dunque chiaro che questo *Metodo* conduce alla soluzione di equazioni differenziali che diconsi *del primo*, *del secondo* ec. *ordine* se contengono le differenze prime, seconde ec.; e son poi *lineari*, *quadratiche*, *cubiche* ec. se le variabili vi si trovano alla prima, seconda, terza ec. dimensione.

1129. Sieno P, Q due funzioni di x, y; tutte l'equazioni differenziali del prim'ordine a due variabili verranno rappresentate da $Pdx + Qdy = 0$, equazione integrabile 1°. se P e

O sieno funzioni di x o di y sola, giacchè in tal caso ella diventa $dy = Xdx$ o $dx = Ydy$: anzi simili equazioni, fatta dx o dy costante, si integreranno quando pur fossero di un ordine n^{simo}, col *metodo delle ripetute integrazioni*. Poichè da $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ si ha $\frac{d^n y}{dx^{n-1}} = Xdx$, ed integrando, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int Xdx + C$; di nuovo $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}} = dx \int Xdx + Cdx$, ed integrando $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int Xdx + Cx + C'$ ec., ripetuta l'operazione finchè si abbia y. Così se debba sommarsi la serie $y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} +$ ec. *in inf.*, supposto x non maggiore di 1, differenziando si ha $dy = \left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \text{ec.}\right) dx$, e di nuovo differenziando, $ddy = (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \text{ec.}) dx^2$, e differenziando una terza volta, $d^3y = (1 + x^2 + x^4 + \text{ec.}) dx^3 = \frac{dx^3}{1-x^2}$ (300); dunque 1°. $\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{dx}{1-x^2}$, ed integrando (1074), $\frac{ddy}{dx^2} = \ldots \frac{l(1+x) - l(1-x)}{2}$ senza costante, perchè $x = 0$ dà $y = 0$: 2°. $\frac{ddy}{dx} = \frac{dx\, l(1+x) - dx\, l(1-x)}{2}$, ed integrando (1087), $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)\, l(1+x) + (1-x)\, l(1-x)}{2}$: 3°. $dy = \ldots \frac{dx(1+x)\, l(1+x) + dx(1-x)\, l(1-x)}{2}$, ed integrando (1087), $y = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 l(1+x) - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 l(1-x) - \frac{x}{2}$.

Inoltre se sia $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$, $s = \frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$ ec., verrà I. $x = \int \frac{dy}{p}$, II. $x = \int \frac{dp}{q}$ ed $y = \int \frac{pdp}{q}$; III. $x = \int \frac{dq}{r}$ ed $y = \int pdx = \int dx \int qdx = \int \frac{dq}{r} \int \frac{qdq}{r}$; IV. $x = \int \frac{dr}{s}$ ed $y = \int pdx = \int dx \int qdx = \int dx \int dx \int rdx = \int \frac{dr}{s} \int \frac{dr}{s} \int \frac{rdr}{s}$ ec., formule integrabili se p sia funzione di y, q di p, r di q, s di r ec. Così per l'equazione $1 = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$ cioè $1 =$

qr o $r=\frac{1}{q}$, la III. dà $x=\int qdq=\frac{1}{2}q^2+C, \int q^2dq=\frac{1}{3}q^3+$ C' ed $y=\frac{1}{3.5}q^5+\frac{1}{2}C'q^2+C''=\frac{(2x-2C)^{\frac{5}{2}}}{3\cdot 5}+\frac{C'(2x-2C)}{2}+C''$.

Riprese anche le formule $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$ ec., verrà I. $\frac{dpdy}{dx}=pdp=qdy$, $\frac{1}{2}p^2=\int qdy$, $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int qdy}$, ed $x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int qdy}}$: II. $\frac{dqdp}{dx}=qdq=rdp$, $\frac{1}{2}q^2=\int rdp$, $q=\frac{dp}{dx}=\sqrt{2\int rdp}$, $x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int rdp}}$ ed $y=\int\frac{pdp}{\sqrt{2\int rdp}}$: III. $\frac{drdq}{dx}=rdr=sdq$, $\frac{1}{2}r^2=\int sdq$, $r=\frac{dq}{dx}=\sqrt{2\int sdq}$, $x=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}$ ed $y=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int sdq}}$ ec., formule integrabili se q sia funzione di y, r di p, s di q ec. Così per l'equazione $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$ cioè $r=p$ e $\int rdp=\frac{1}{2}p^2+C$, la II. dà $x=\int\frac{dp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=(1081)\ l[p+\sqrt{(p^2+2C)}-lC']=xle$, $C'e^x-p=\sqrt{(p^2+2C)}$, $p=\frac{C'e^x}{2}-\frac{Ce^{-x}}{C'}$, ed $y=\int\frac{pdp}{\sqrt{(p^2+2C)}}=\sqrt{(p^2+2C)}+C''=\frac{C'e^x}{2}+\frac{Ce^{-x}}{C'}+C''=Ce^x+C'e^{-x}+C''$, preso il valore di p e mutate le costanti $\frac{C'}{2}$ in C, e $\frac{C}{C'}$ in C'.

1130. 2°. Si integrerà l'equazione $Pdx+Qdy=0$ se $\frac{\overset{y}{d}P}{dy}=\frac{\overset{x}{d}Q}{dx}$ (1105). Spesso però anche non avverandosi quella condizione, l'equazione può integrarsi col moltiplicarla per un fattore idoneo: tale è $xdy-ydx+xdx=0$ se si moltiplichi per $\frac{1}{x^2}$. Sia dunque F il fattor cercato, e l'equazione diverrà $FPdx+FQdy=0$, che supponendosi ora integrabile, darà $\frac{\overset{y}{d}(FP)}{dy}=\frac{\overset{x}{d}(FQ)}{dx}$, o differenziando, $\frac{F\overset{y}{d}P}{dy}+\frac{P\overset{y}{d}F}{dy}-\frac{F\overset{x}{d}Q}{dx}-\frac{Q\overset{x}{d}F}{dx}=0$, formula generale da cui si avrà F se si prenda per F un'idonea funzione di x e di y con esponenti indeterminati, come $F=x^my^n$; ed m, n si determineranno col sostituir

nella formula i valori di F, P, Q e loro differenziali, e con eguagliare a zero i termini omologhi. Così data l'equazione

$2adx - 2bydx - bxdy = 0$, avrò $P = 2a - 2by$, $\frac{d^y P}{dy} = -2b$,

$Q = -bx$, $\frac{d^x Q}{dx} = -b$, $\frac{d^y F}{dy} = nx^m y^{n-1}$, $\frac{d^x F}{dx} = my^n x^{m-1}$, e sostituendo nella formula, trovo $(m-2n-1)bx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} = 0$. Eguaglio a zero i termini omologhi, ed ottengo 1°. $m - 2n - 1 = 0$: 2°. $2an = 0$; dalla seconda equazione ricavo $n = 0$, onde la prima dà $m = 1$; dunque $F = xy^0 = x$, per cui moltiplicando la data equazione, si ha $2axdx - 2bxydx - bx^2dy = 0$, ed integrando, $ax^2 - byx^2 = C$.

Si osservi 1°. che lo stesso metodo ha luogo se si voglia il fattore che rende esatta una data differenziale, come $dy - ydx$: 2°. che se m, n si abbiano da una sola equazione, come da $m = n + 1$, si potrà fare $n = 0$ e anche prender per n un numero qualunque: 3°. che non si ha fin quì regola alcuna generale per dare ad F una forma adattata ai particolari bisogni, benchè in certi casi sia facile di determinarlo; ed eccone il modo.

Supposto $dF = Adx + Bdy$ onde $\frac{d^x F}{dx} = A$, $\frac{d^y F}{dy} = B$ (1105),

la trovata formula generale diverrà $\frac{Fd^y P}{dy} + BP - \frac{Fd^x Q}{dx} -$

$AQ = 0$, cioè $\frac{d^y P}{dy} - \frac{d^x Q}{dx} = \frac{AQ - BP}{F}$; dunque se il primo membro di quest' equazione sia funzione della sola x onde $d^x Q = dQ$, lo sarà anche il secondo e perciò anche F, e si avrà

$B = 0$, $dF = Adx$, $\frac{dxd^y P}{dy} - dQ = \frac{QdF}{F}$, $\int \frac{dF}{F} (= lF) = \ldots$

$\int \frac{dxd^y P}{Qdy} - \int \frac{dQ}{Q} (= -lQ)$, e quindi $F = \frac{1}{Q} e^{\int \frac{dxd^y P}{Qdy}}$. Data per esempio, l' equazione $rdx + tydx + udy = 0$ ove r, t, u

son funzioni della sola x, sarà $P = r + ty$, $Q = u$, $\frac{d^y P}{dy} = t$

ed $F = \frac{1}{u} e^{\int \frac{tdx}{u}}$, fattore che rende esatta la data, e che per l'equazione $xdy - ydx + xdx = 0$ accennata di sopra, si trova

essere $=\frac{1}{x^2}$ come dicemmo. Con questo metodo si sommano le due serie $y=x^2 \mp \frac{x^4}{4}+\frac{3x^6}{4.6} \mp \frac{3.5x^8}{4.6.8}+$ ec.: poichè differenziando e poi dividendo per x^3, si ha $\frac{dy}{x^3}=\frac{2dx}{x^2} \mp dx+\frac{3x^2dx}{4} \mp$ ec.; dunque $\int\frac{dy}{x^3}=-\frac{2}{x} \mp x+\frac{x^3}{4} \mp$ ec. $=\frac{-2 \mp y}{x}$, onde differenziando, $\frac{dy}{x}=\mp xdy+(2 \pm y)dx$, cioè $(1 \pm x^2)dy \mp yxdx-2xdx=0$, ove $t=\mp x$, $u=1 \pm x^2$ ed $F=$

$$\frac{1}{1 \pm x^2} e^{\mp\int\frac{xdx}{1 \pm x^2}} = \frac{1}{1 \pm x^2} e^{-l\sqrt{(1 \pm x^2)}} \text{ (1019)} = \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1 \pm x^2} e^{l\frac{1}{\sqrt{(1 \pm x^2)}}} \text{ (353)} = \frac{1}{\sqrt{(1 \pm x^2)^3}} \text{ (361)}. \text{ Quindi} \ldots\ldots$$

$\frac{(1 \pm x^2)dy \mp yxdx-2xdx}{\sqrt{(1 \pm x^2)^3}}=0$, e integrando, $\frac{y \pm 2}{\sqrt{(1 \pm x^2)}}=C=\pm 2$, perchè $y=0$ dà $x=0$; dunque $y=\pm 2\sqrt{(1 \pm x^2)} \mp 2$.

Si noti che ad $rdx+tydx+udy=0$ si riduce anche $ry^n dx+tydx+udy=0$ dividendola per y^n e ponendo $y^{1-n}=z$: vi si riducono anche dell'equazioni più complicate, ma non dobbiamo allungarci di più. Intanto il metodo è particolare, e perciò qualor non riesca, si passa a *separar l'equazione* cioè a dividerla in due membri, ciascùn de' quali contenga una sola variabile con la sua differenziale. Anche questo metodo non è generale: ecco alcuni casi in cui la separazione riesce.

1131. Se $P=XY$, $Q=X'Y'$ (X, X' son funzioni di x, ed Y, Y' funzioni di y), sarà $\frac{Xdx}{X'}=-\frac{Y'dy}{Y}$, equazione separata.

1132. Se P e Q son funzioni omogenee di x, y, cioè se tutti i lor termini hanno x, y allo stesso numero di dimensioni, fatto $x=yz$, sarà $\frac{Q}{P}$ una funzione Z di z, e si avrà $dx+Zdy=0=zdy+ydz+Zdy$, e separando, $\frac{dz}{Z+z}=-\frac{dy}{y}$. Così $(ax+by)dx=(mx+ny)dy$, fatto $x=yz$ onde $\frac{Q}{P}=Z=\frac{-mz-n}{az+b}$, diviene $-\frac{dy}{y}=\frac{(az+b)dz}{az^2+(b-m)z-n}$, equazione facile a integrare (1077. 1081).

1133. Sia ora l' equazione generale $ax^m y^n dx^p dy^q + bx^{m'} \times y^{n'} dx^{p'} dy^{q'} + cx^{m''} y^{n''} dx^{p''} dy^{q''} +$ ec. $= 0$ ove per la natura di tali equazioni si ha sempre $p + q = p' + q' = p'' + q'' =$ ec.: fatto $y = z^r$, ella diventa $r^q ax^m z^{r(n+q)-q} dx^p dz^q + \ldots\ldots r^{q'} bx^{m'} z^{r(n'+q')-q'} dx^{p'} dz^{q'} + r^{q''} cx^{m''} z^{r(n''+q'')-q''} \times dx^{p''} dz^{q''} +$ ec. $= 0$, e sarà omogenea se $m + r(n+q) - q = m' + r(n'+q') - q' = m'' + r(n''+q'') - q''$ ec., cioè se $r = \frac{m - q - m' + q'}{n' + q' - n - q} = \frac{m - q - m'' + q''}{n'' + q'' - n - q} =$ ec. Così l' equazione $ay^2x^2dx + bdx + cyxdx + fx^4y^2dy = 0$ dà $m = n = 2$, $m' = n' = 0$, $m'' = n'' = 1$, $m''' = 4$, $n''' = 2$, $q = q' = q'' = 0$, $q''' = 1$ e però $r = \frac{2}{-2} = \frac{2-1}{1-2} = \frac{2-4+1}{2+1-2} = -1$; dunque fatto $y = z^{-1}$, si avrà $az^{-2}x^2dx + bdx + cz^{-1}xdx - fx^4z^{-4}dz = 0$, equazione omogenea e perciò integrabile (1132). Parimente l' equazione $ax^2dx^4 + bx^3y^3dx^2dy^2 + cx^5y^{-11}dx^3dy + gx^5ydy^4 = 0$ dà $m = 2$, $n = 0$, $m' = n' = 3$, $m'' = 5$, $n'' = -11$, $m''' = 5$, $n''' = 1$, $q = 0$, $q' = 2$, $q'' = 1$, $q''' = 4$ e però $r = \frac{2-3+2}{3+2} = \frac{2-5+1}{-11+1} = \frac{2-5+4}{1+4} = \frac{1}{5}$; dunque fatto $y = z^{\frac{1}{5}}$, si avrà $625ax^2dx^4 + 25bx^3z^{-1}dx^2dz^2 + 125cx^5z^{-3}dx^3dz + gx^5z^{-3}dz^4 = 0$, equazione omogenea che facendo $z = ux$ e $dz = (t+u)dx$, si riduce a $\frac{g(t+u)^4}{u^3} + \frac{25b(t+u)^2}{u} + \frac{125c(t+u)}{u^3} + 625a = 0$; or da questa si ha t data per u, onde supposta $t = U$, da $udx + xdu = (t+u)dx$ viene $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t} = \frac{du}{U}$. Del resto, se taluno dei rotti $\frac{m-q-m'+q'}{n'+q'-n-q}$ ec. divenisse $\frac{0}{0}$, non se ne farebbe conto, ciò solamente significando che qualunque valore di r rende omogenei i termini d' onde quel rotto risulta; e se divenissero $\frac{0}{0}$ tutti i rotti, o andassero a zero tutti i loro numeratori o denominatori, ciò indicherebbe che per separar le variabili non vi è bisogno di metodo.

1134. Passiamo ad altre equazioni, e sia da integrarsi $py - \frac{dy}{dx} + X = 0$, ove p, X possono essere funzioni di x. Faccio $y = rz$ ed ho, $przdx - rdz - zdr + Xdx = 0$, onde dando tali valori ad r, z che sia I. $przdx - zdr = 0$, verrà II. $rdz = Xdx$. La I. si integra riducendola a $\frac{dr}{r} = pdx$, onde $lr = \int pdx$ ed $r =$

$e^{\int pdx}$: la II. dà $Xdx\,(=rdz)=e^{\int pdx}dz, z(=\frac{y}{r})=\int\frac{Ydx}{e^{\int pdx}}$, ed $y=e^{\int pdx}\left(\int\frac{Xdx}{e^{\int pdx}}+C\right)$. Così se si abbia $y+\frac{dy}{dx}=x^2$, sarà $p=-1, X=x^2$ ed $y=e^{-x}\int e^x x^2 dx + Ce^{-x}=(1091)\,Ce^{-x}+x^2-2x+2$. A questa equazione si riduce 1°. $py-\frac{dy}{dx}+Xy^{n+1}=0$ col dividerla per y^{n+1} e far poi $\frac{1}{y^n}=u$: 2°. $py^{m+1}-\frac{y^n dy}{dx}+Xy^n=0$ col dividerla per y^n e far quindi $y^{m-n+1}=u$: 3°. $pXy^{m+1}dx-X'y^m dy+X''y^n dx=0$ dividendola per Xdx, facendo $\frac{X'}{X}=r, \frac{X''}{X}=q$ e trattandola poi come la passata.

1135. Ma sia l'equazion lineare del second' ordine $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bddy}{dx^2}=0$ ove a, b, dx son costanti. Fatto $p=\frac{dy}{dx}$ ovvero $mp-\frac{mdy}{dx}=0$ (m è indeterminata) e sommata questa con la data, viene I. $y+(a+m)p-(mdy-bdp)\frac{1}{dx}=0$, che potrebbe integrarsi se la prima sua parte $y+(a+m)p$ o un suo m^{plo} qualunque fosse l'integrale della seconda $mdy-bdp$ (1014). Supponghiamolo dunque giacchè l'indeterminata m lo permette, e avremo $y+(a+m)p=\frac{1}{m}\int(mdy-bdp)=y-\frac{bp}{m}$, onde $a+m=-\frac{b}{m}$ e II. $m=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}$. Fatto ora III. $y+(a+m)p=u=y-\frac{bp}{m}$ e perciò $du=dy-\frac{bdp}{m}$ ovvero $mdu=mdy-bdp$, la I. diverrà $u-\frac{mdu}{dx}=0$ che ci dà (1134) IV. $u=Ce^{\frac{x}{m}}$. Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la III. si scioglierà nelle due $y+(a+m')p=u', y+(a+m'')p=u''$ dalle quali si ha la V. $y=\ldots\ldots\frac{(a+m')u''-(a+m'')u'}{m'-m''}$. Così data $y+\frac{4dy}{5dx}-\frac{ddy}{5dx^2}=0$, sarà $a=\frac{4}{5}, b=-\frac{1}{5}$, onde per la II. viene $m=-\frac{2}{5}\pm\frac{3}{5}$ e perciò $m'=\frac{1}{5}, m''=-1$; dunque per la IV. $u'=Ce^{5x}$ ed $u''=$

$C'e^{-x}$, con che dalla V. si ottiene $y = \frac{1}{6}(Ce^{5x} + 5C'e^{-x})$.

Di quì si ha la somma di tutte le serie della forma $1 + \frac{x^r}{1.2.3 \ldots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3 \ldots 2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3 \ldots 3r} +$ ec. *in infin.*, essendo r numero intero e positivo. Si voglia la somma della serie $y = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} +$ ec.: differenziando abbiamo $dy = (x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.})\,dx$, e nuovamente differenziando presa dx costante, $ddy = (1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.})\,dx^2 = ydx^2$. Si ha dunque $y - \frac{ddy}{dx^2} = 0$, ove $a = 0$, $b = -1$, $m = \pm\sqrt{1}$, $m' = 1$, $m'' = -1$ e perciò $y = \frac{1}{2}(Ce^x + C'e^{-x})$. Per determinar le costanti si osservi che quando $x = 0$, viene $y = \frac{1}{2}(C + C') = 1$, $dy (= \frac{1}{2}(Ce^x dx - C'e^{-x}dx)) = 0 = C - C'$; dunque $C = C' = 1$ ed $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$.

1136. Se nella II. equazione sia $\frac{1}{4}a^2 = b$, verrà $m' = m'' = -\frac{1}{2}a$ e quindi $u' = u''$ nella IV., ed $y = \frac{0}{0}$ nella V., ciòche non potrebbe avverarsi se non fosse anche $C = C'$. Ora per determinar y in questo caso, prendo ω infinitesima e pongo $m'' = m' + \omega$; dunque $\frac{x}{m''} = \frac{x}{m' + \omega} = \frac{x}{m'} - \frac{\omega x}{m'(m' + \omega)}$, ed $u'' = Ce^{\frac{x}{m'}}\left(1 - \frac{\omega x}{m'm''}\right)$ (361), trascurando ω^2, ω^3 ec. (273); e poichè $m' - m'' = -\omega$, la V. equazione diverrà $y = (1 + \frac{2x}{a})\,Ce^{-\frac{2x}{a}}$, onde fatto $\frac{2C}{a} = C'$, viene $y = (C + C'x)e^{-\frac{2x}{a}}$: così se si abbia $y + \frac{4dy}{5dx} + \frac{4ddy}{25dx^2} = 0$, sarà $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{4}{25}$ ed $y = (C + C'x)e^{-\frac{5x}{2}}$. Che se nella stessa equazione II. le radici m', m'' sieno immaginarie, potrà supporsi (205) $m' = \frac{-a + 2g\sqrt{-1}}{2}$, $m'' = \frac{-a - 2g\sqrt{-1}}{2}$, onde $\frac{x}{m'} = \ldots\ldots$ $\frac{-2x(a + 2g\sqrt{-1})}{(a - 2g\sqrt{-1})(a + 2g\sqrt{-1})} = \frac{-2ax - 4gx\sqrt{-1}}{a^2 + 4g^2}$ ed $\frac{x}{m''} = \frac{-2ax + 4gx\sqrt{-1}}{a^2 + 4g^2}$. Sia $\frac{2ax}{a^2 + 4g^2} = t$, $\frac{4gx}{a^2 + 4g^2} = z$; dunque

$y = \frac{e^{-t}[(a+m')C'e^{z\sqrt{-1}} - (a+m')Ce^{-z\sqrt{-1}}]}{m' - m''}$: ma $e^{\pm z\sqrt{-1}} =$ $\cos z \pm \sqrt{-1}.\, sen\, z$ (735); dunque sostituendo, ponendo C e C' invece di $\frac{(a+m')C' - (a+m'')C}{m' - m''}$ e di $\frac{[(a+m')C' + (a+m'')C]\sqrt{-1}}{m' - m''}$,

e rimettendo i valori di t, z, verrà $y = e^{\frac{-2ax}{a^2+4g^2}}\left(C \cos \frac{4gx}{a^2+4g^2} + \right.$ $\left. C' sen \frac{4gx}{a^2+4g^2}\right)$. Così se si abbia $y - \frac{4dy}{5dx} + \frac{ddy}{5dx^2} = 0$, sarà $a = -\frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, $g = \frac{1}{5}$ ed $y = e^{2x}(C \cos x + C' sen\, x)$.

1137. Nel modo stesso potranno integrarsi due equazioni $y + ax + \frac{bdx}{dt} = 0$, $y + fx + \frac{gdy}{dt} = 0$, supposte a, b, f, g costanti; poichè se la seconda si moltiplichi per l' indeterminata m e si sommi con la prima, verrà $(m+1)y + (a+fm)x + (gmdy + bdx)\frac{1}{dt} = 0$; onde fatto come sopra (1135), $(m+1)y + (a+fm)x = \frac{1}{m}\int(gmdy + bdx) = gy + \frac{bx}{m}$, si avrà $m + 1 =$ g, $a + fm = \frac{b}{m}$ ed $\frac{am + fm^2}{b} = g - m$, equazione che determina m. Quindi se sia $(m+1)y + (a+fm)x = u = gy + \frac{bx}{m}$ e perciò $mdu = gmdy + bdx$, l' equazione sommata diverrà $u + \frac{mdu}{dt} = 0$ e avremo al solito $u = Ce^{-\frac{t}{m}}$. Il rimanente si fa come sopra (1135), e tutto ciò ha luogo quando pur l' equazioni sieno $y + ax + \frac{bdx + cdy}{Tdt} = 0$, $y + a'x + \ldots$ $\frac{b'dx + c'dy}{Tdt} = 0$, e si trova $u = Ce^{-\int\frac{Tdt}{m}}$.

1138. Sia anche l' equazione $y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} = X$ ove X è funzione di x. Tutto si farà come sopra (1135), se non che l' equazione è qui $\frac{u}{m} - \frac{du}{dx} - \frac{X}{m} = 0$ che dà $u = e^{\frac{x}{m}}$ (C $-$

$\frac{1}{m}\int e^{-\frac{x}{m}} X dx)$ (1134). Così avendo $y - \frac{dy}{dx} - \frac{3\,ddy}{4dx^2} = 2x$, sarà $a = -1$, $b = -\frac{3}{4}$, $m' = \frac{3}{2}$, $m'' = -\frac{1}{2}$, $X = 2x$, $u' = Ce^{\frac{2}{3}x} + 2x + 3$, $u'' = C'e^{-2x} + 2x - 1$ (1091), ed $y = \frac{1}{4}(C'e^{-2x} + 2x - 1) + \frac{3}{4}(Ce^{\frac{2}{3}x} + 2x + 3)$.

1139. Questo metodo che a cagione dell' indeterminate m ec. introdotte nell' equazioni, si chiama *dei Coefficienti Indeterminati*, vale anche per l'equazioni lineari di un qualunque ordine n^{simo}, le quali sommate con un numero $n - 1$ d'equazioni $mp - \frac{mdy}{dx} = 0$, $kq - \frac{kdp}{dx} = 0$, $gr - \frac{gdq}{dx} = 0$ ec., si integreranno con la stessa facilità fuorchè quando y ha un coefficiente $q = 0$, o l'equazione si riduce a $\frac{d^n y}{dx^n} = X$, che per altra via si è già integrata (1129): il giro però sarà in queste più lungo, attese l'equazioni $n - 1$ da cui debbon dedursi i valori dell' indeterminate k, g ec. dati per m, e quelle del grado $(n - 1)^{simo}$ dalla cui risoluzione dipendono m', m'', m''' ec. e quindi u', u'', u''' ec.

Del resto, con le due equazioni $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ si integrano anche quelle di second' ordine ove manchi y o x e sia integrabile la risultante equazione di prim' ordine tra x o y e p: allora p sarà dato per x o per y e si avrà $y = \int p dx$ o $x = \int \frac{dy}{p}$. Così da $dx^2 + dxdy - Xd^2y = 0$ risulta l'integrabile $\frac{dp}{1+p} = \frac{dx}{X}$: e da $d^2y + mdxdy + nydx^2 = 0$ risulta $q + mp + ny = 0 = qdy + mpdy + nydy = pdp + mpdy + nydy$, parimente integrabile perchè omogenea (1132).

Ma l'omogenee di second' ordine, in cui dx, d^2x ec. si valutano per una dimensione, posson sempre ridursi al primo con le sostituzioni $y = ux$ e $qx = z$, che atteso $dy = pdx$ e $dp = qdx = \frac{zdx}{x}$, danno $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{z}$: così $aydx^2 - bxdxdy + gy^2d^2y = 0$ diventa $au - bp + gu^2qx = 0 = au - bp + gu^2z$, onde $z = \frac{bp - au}{gu^2}$, $\frac{du}{p-u} = \frac{gu^2dp}{bp - au}$ e $dp = \frac{(bp - au)du}{(p-u)gu^2}$, equazion del prim' ordine che se possa separarsi (come nel caso di $a = b$) separerà anche l'altra $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$. Anzi tali equa-

zioni si ridurranno sol che sieno omogenee riguardo ad y, dy, d^2y, qual'è $yd^2y - dy^2 - Xydxdy = 0$; poichè fatto $p = \frac{dy}{dx} = uy$, $q = \frac{dp}{dx} = yz$ onde $dy = uydx$, $dp = yzdx = udy + ydu$, $\frac{dy}{y} = udx = \frac{z.x - du}{u}$, ella diventa $yqdx^2 - p^2dx^2 - Xypdx^2 = 0 = z - u^2 - uX$, che dà $udx = \frac{(u^2 + uX)dx - du}{u}$, onde $\frac{du}{u} = Xdx$, equazione separata del prim'ordine che separa anche $\frac{dy}{y} = udx$.

L'equazioni che non hanno la forma delle precedenti, o non possono affatto integrarsi o esigono delle artificiose sostituzioni per separarne le variabili. D'ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini che ammettono integrazione; ma non vi è regola generale per sostituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo quì varj esempj di sostituzioni con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del primo e second'ordine, ove X, Y esprimon sempre una funzione di x o di y.

I. $x^2dx^2 + axydx\,dy = bdy^2$: compiendo il quadrato si ha $(xdx + \frac{1}{2}aydy)^2 = (\frac{1}{4}a^2y^2 + b)dy^2$, ed estraendo la radice, $xdx = \frac{1}{2}dy[\sqrt{(a^2y^2 + 4b)} - ay]$.

II. $4a^2x^2dx + 4a^2bxdx + 4abyxdx + 2ab^2ydx + b^2y^2dx - ab^3dy = 0$. Osservo che l'equazione può scriversi così: $(2ax + by + ab)^2dx - a^2b^2dx - ab^3dy = 0$; e supposto $(2ax + by + ab)^2dx = 0$, verrebbe $y = -\frac{2ax}{b} - a$. Faccio dunque $y = z - \frac{2ax}{b} - a$, $dy = dz - \frac{2adx}{b}$, e sostituendo e riducendo, viene $dx = \frac{abdz}{a^2 + z^2}$.

III. $-a^3dx - 3yx^2dx + 3y^2xdx - y^3dx + x^3dy + a^3dy = 0$. Osservo che supposto $3yxdx(y - x) = 0$, verrebbe $y = x$, il che si avrebbe anche dall'equazioni combinate $-dx(a^3 + y^3) = 0$, $dy(x^3 + a^3) = 0$. Faccio dunque $y = z + x$, $dy = dz + dx$, e sostituendo e riducendo, viene $\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{a^3 + x^3}$.

IV. $x^2dx + xydy + y^2dx = Xdx$: fatto $xy = z$, si ha $zdz = (X - x^2)xdx$.

V. $2ydy + xdy + ydx = (a + x + y)Ydy$; fatto $x + y = z$, viene $ydz + zdy = (a + z)Ydy$: fatto $yz = u$, viene $du - \frac{uYdy}{y} = aYdy$: fatto $\frac{Ydy}{y} = \frac{dq}{q}$, viene $\frac{qdu - udq}{q^2} = \frac{aYdy}{q}$: fatto $\frac{u}{q} = p$, viene infine $dp = \frac{aYdy}{q}$.

VI. $\frac{2x^2dx + xydy + y^2dx}{x^4 + x^2y^2 + a^4} = \frac{xdx + ydy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$: fatto $x^2 + y^2 = z^2$, viene $\frac{z(xdz + zdx)}{x^2z^2 + a^4} = \frac{dz}{a^2}$: fatto $zx = p$, viene $\frac{a^2dp}{p^2 + a^4} = \frac{dz}{z}$.

VII. $(a^2 - x^2)dy + yxdx = adx\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}$; fatto $a^2 - x^2 = \frac{y^2}{u^2}$ onde $-xdx = \frac{uydy - y^2du}{u^3}$, verrà $\frac{y^2du}{u^2} = adx\sqrt{(u^2 - 1)}$ e $\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)}} = \frac{adx}{a^2 - x^2}$.

VIII. $\frac{Ydy}{x^2} = aY'dy - \frac{dx}{x}$: fatto $aY'dy = \frac{dz}{z}$, viene $\frac{Ydy}{x^2} = \frac{xdz - zdx}{zx^2}$: fatto $\frac{z}{x} = p$, viene $\frac{Ydy}{z^2} = \frac{dp}{p^3}$.

IX. $-\frac{a^3dx}{x} + bydx = aydy$: fatto $bx - ay = az$, viene $bxdz = azdz + \frac{a^3dx}{x}$: fatto $zdz = \frac{a^2dp}{p}$: viene $bxdz = \ldots \frac{a^3(pdx + xdp)}{px}$: fatto $px = u$, viene $\frac{bdz}{p} = \frac{a^3du}{u^2}$.

X. $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} + \frac{(m+1)y^2dx}{x} = ydy$, cioè $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} = y^2\left(\frac{dy}{y} - \frac{(m+1)dx}{x}\right)$: fatto $ly - (m+1)lx = lp$, $y = px^{m+1}$, viene $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + (m+1)bpx^mdx = px^{2m+2}dp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}}(-1 + (m+1)a^{m-1}bp) = a^{m-1}pdp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}} = \frac{a^{m-1}pdp}{(m+1)a^{m-1}bp - 1}$.

XI. $mydx + nxdy = y^r dy$ ovvero $xy\left(\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y}\right) = y^r dy$: fatto $mlx + nly = lp$, $x^my^n = p$, viene $\frac{dp}{p}\sqrt[m]{\frac{p}{y^n}} = y^{r-1}dy$, cioè $\frac{dp}{\sqrt[m]{p^{m-1}}} = dy\sqrt[m]{y^{n+m(r-1)}}$.

XII. $\frac{xdy - ydx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: fatto $x = pz$, $y = p\sqrt{(1 - z^2)}$, viene $\frac{-dz}{\sqrt{(p^2dz^2 + dp^2(1 - z^2))}} = p$: fatto $dz = udp$, qua-

drando, sostituendo il valor di $u=\frac{dz}{dp}$ ed estraendo la radice, viene $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{pdp}{\sqrt{(1-p^4)}}$.

XIII. $aydy=y^2dx+x^2dx$ cioè $x^2dx=y^2\left(\frac{ady}{y}-dx\right)$: fatto $aly-x=lz$, $\frac{y^a}{e^x}=z$, $y=\sqrt[a]{e^x z}$, viene $x^2dx=\frac{dz}{z}\sqrt[a]{e^{2x}z^2}$, cioè $\frac{x^2dx}{\sqrt[a]{e^{2x}}}=\frac{dz}{\sqrt[a]{z^{a-2}}}$.

XIV. $dy=\frac{yxdx}{x^2-a^2}-\frac{y^3dx}{x^3}$: fatto $x^2-a^2=z^2$, $y=pz$, $dy=zdp+pdz=zdp+\frac{pxdx}{z}$, viene $zdp+\frac{pxdx}{z}=\frac{pxdx}{z}-\frac{z^3p^3dx}{x^3}$, cioè $\frac{dp}{p^3}=\frac{(a^2-x^2)dx}{x^3}$.

XV. $(x+y)^2dy=a^2dx$: fatto $x+y=z$, si ha $z^2(dz-dx)=a^2dx$, cioè $dx=\frac{z^2dz}{a^2+z^2}$.

XVI. $\frac{y^2dx-xydy}{\sqrt{(y^2dx^2-2xydydx+y^2dy^2)}}=Y$: fatto $\frac{x}{y}=z$ onde $x=yz$ e $dx=ydz+zdy$, si ha $\frac{y^2dz}{\sqrt{(y^2dz^2-z^2dy^2+dy^2)}}=Y$; quadrando, riducendo allo stesso denominatore e separando, viene $\frac{dz^2}{1-z^2}=\frac{Y^2dy^2}{y^4-Y^2y^2}$, cioè $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\ldots\ \frac{Ydy}{y\sqrt{(y^2-Y^2)}}$.

XVII. $\frac{ddy}{dx^2}-\frac{dy^2}{ydx^2}-\frac{ady^2}{(1+ay)dx^2}+2ay(1+ay)=0$, cioè $\frac{ddy}{y(1+ay)}-\frac{(1+2ay)dy^2}{y^2(1+ay)^2}+2adx^2=0$, che fatta dx costante, si sa integrare (1114).

XVIII. $2y^2dyddy\sqrt{xy}+y^2dy^3\sqrt{\frac{x}{y}}=dx^2(ydx-xdy)$ ove dx è costante: fatto $\frac{x}{y}=z$, viene $ydy^2=dx^2(2\sqrt{z}+C)$.

XIX. $xddx+dx^2=-\frac{yx^2dx^2}{a^3}$ ove dy è costante: fatto $xdx=zdy$, viene $\frac{a^3dz}{z^2}=-ydy$.

XX. $a^{2m}dy^{n-2}\,ddy = Ydx^n$ ove è costante dx: fatto $dy = zdx$, viene $a^{2m}z^{n-1}dz = Ydy$.

XXI. $adxdy = (2addx - 2xddx - 2ddy\sqrt{x} - dx^2)(a-x)\sqrt{x}$: se si faccia $a - x = p^2$ e $dy = pdz$, viene $\frac{adxdz}{2p^2\sqrt{x}} = pddx - \frac{dpdz\sqrt{x}}{p} - ddz\sqrt{x} - \frac{dx^2}{2p}$, cioè posto il valor di $a = p^2 + x$ e di $dx = -2pdp$, $ddz\sqrt{x} + \frac{dxdz}{2\sqrt{x}} = pddx - \frac{dx^2}{2p}$ il cui integrale è $dz\sqrt{x} = pdx$ cioè $pdz\ (= dy) = \frac{p^2dx}{\sqrt{x}} + C$.

XXII. $Ydx^2 - mdy^2 - nyddy = 0$ ove dx è costante: fatto $dx = zdy\sqrt[n]{y^m}$ onde $0 = (dydz + zd^2y)\sqrt[n]{y^m} + \frac{mzdy^2}{n}\sqrt[n]{y^{m-n}}$, cioè $nyddy = -mdy^2 - \frac{nydydz}{z}$, viene $Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}} = -\frac{ndz}{z^3}$ e $dx = dy\sqrt[n]{y^m}\sqrt{\frac{n}{2\int(Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}} + C)}}$.

1140. Del resto dal non potersi separar le variabili non bisogna dedurre che l'equazione non è integrabile: ve ne sono alcune che ricusando in certi casi la separazione, posson generalmente integrarsi; e tale è la famosa *Equazione del Conte Riccati* $dy = ax^m dx + by^2dx$, sopra cui lasceremo che si consulti il Calcolo Integrale di Le-Seur e Iacquier. Ecco ora dei problemi sul metodo inverso delle tangenti.

PROBL. I. Trovar la curva la cui suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{mx}{n}$.

Si avrà dunque separando, $\frac{ndx}{x} = \frac{mdy}{y}$, e integrando, $nlx = mly + lC$; fatto dunque $x = y = c$, sarà $lC = (n-m)lc$, onde $y^m = x^n c^{m-n}$, equazione cercata.

II. Qual'è la curva che ha per suttangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2+x^2}{x}$?

Si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{a^2+x^2}$ ed integrando, $ly = l(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + lC = lC(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $y = C\sqrt{(a^2+x^2)}$: fatto $x = 0$, divien costante l'ordinata $y = Ca = b$, onde $C = \frac{b}{a}$; perciò $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2+x^2)$, equazione all'iperbola (908).

216. III. Qual'è la curva in cui lo spazio $ABM = \frac{m}{n}AMQ$? si ha dunque $\frac{m}{n}\int xdy = \int ydx$ (1115), $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, $y^m = x^n a^{m-n}$.

IV. Trovar la curva BM il cui spazio ABMP eguagli l' arco BM moltiplicato per una costante a, onde $\int y dx = a\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Dunque $\frac{dx}{a}=\frac{dy}{\sqrt{(y^2-a^2)}}$; ed integrando, $\frac{x}{a}=l\frac{c}{a}[y+\sqrt{(y^2-a^2)}]$ (1080).

V. Trovar la curva AM, in cui il raggio osculatore MC $= \frac{m}{n}$ MN. Poichè MO : MC :: MP : MN, supposta dx costante, sarà (1034) $\frac{m}{n}y=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, ovvero $\frac{m}{n}yddy+dx^2+dy^2=0$. Per integrare, sia $dx=pdy$ e differenziando, $ddy=-\frac{dpdy}{p}$ e sostituendo nell' equazione, $\frac{ndy}{my}=\frac{dp}{p(p^2+1)}$; dunque $\frac{n}{m}\,l\,\frac{y}{c}=l\frac{p}{\sqrt{(p^2+1)}}$ (1014), $p=\pm\sqrt[m]{\frac{y^n}{\sqrt{(c^{2n}-y^{2n})}}}$, e $dx=\ldots\ldots$ $\pm dy\sqrt[m]{\frac{y^n}{\sqrt{(c^{2n}-y^{2n})}}}$, equazione differenziale del prim' ordine della curva cercata. Se $n=m$, si ha $dx=\pm ydy(c^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, ed $x=c'\pm\sqrt{(c^2-y^2)}$, equazione al circolo. Se $m=2n$, si ha $dx=\frac{\pm dy\sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}}$, equazione alla cicloide.

218.

VI. Trovar la curva BM tale che conducendo per l' origine A dell' ascisse la retta AO che faccia coll' asse un angolo di 45°, stia sempre l' ordinata PM alla suttangente PT :: una retta data a : OM. Dunque $dy : dx :: a : y-x$, e $adx=(y-x)dy$. Sia $y-x=z$ e si avrà $dx=dy-dz$, onde sostituendo nell' equazione, $\frac{dy}{a}=\frac{dz}{a-z}$, $\frac{y}{a}=l\frac{C}{a-z}$, ed $x=y-a+Ce^{-\frac{y}{a}}$, che potea trovarsi anche per i numeri 1134 e 1135. La minima ordinata BD si ha facendo $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{y-x}=\infty$ (1043) e allora $x=y=al\frac{C}{a}=$ BD $=$ AD. Lo spazio DBMP $=$ PQ $-$ DC $-$ BCQM $=$ $xy-a^2l^2\frac{C}{a}-\int xdy$ (1115). Ora $\int xdy=\int(ydy-ady+Ce^{-\frac{y}{a}}dy)=C'+\frac{y^2}{2}-ay-aCe^{-\frac{y}{a}}$ (1091), e sostituendo in ay il valor di $y=x+a-Ce^{-\frac{y}{a}}$, verrà $\int xdy=C'+\frac{y^2}{2}-$

219.

219. $ax - a^2$: ma quando lo spazio BCQM svanisce, si ha $y = AC = al\frac{C}{a}$ ed $x = CB = al\frac{C}{a}$, onde $C' = a^2 + a^2 l\frac{C}{a} - \frac{a^2}{2} l^2 \frac{C}{a}$; dunque $\int x dy = \frac{y^2}{2} - ax + a^2 l\frac{C}{a} - \frac{a^2}{2} l^2 \frac{C}{a}$, ed infine DBMP $= xy - \frac{y^2}{2} + ax + a^2 l\frac{a}{C} + \frac{a^2}{2} l^2 \frac{a}{C}$.

220. VII. Trovar la Curva EM che faccia per tutto coll'ordinata PM un angolo EMP o TMP proporzionale all'ascissa AP, che sarà perciò m^{pla} dell'arco o angolo TMP. Si avrà dunque TMP $= \frac{x}{m}$, e (742) $y : \frac{ydx}{dy} :: 1 : tang \frac{x}{m} = \frac{dx}{dy}$; dunque

$$\frac{dy}{m} = \frac{dx}{m} \cot \frac{x}{m} = \frac{\frac{dx}{m} \cos \frac{x}{m}}{\operatorname{sen} \frac{x}{m}},$$ e però $y = C + ml \operatorname{sen} \frac{x}{m}$; equazione che nel caso di $y = o$ dando $l \operatorname{sen} \frac{x}{m} = -\frac{C}{m} = -\frac{Cle}{m}$, cioè $\operatorname{sen} \frac{x}{m} = e^{-\frac{C}{m}}$, e però $x = m \times$ *arco di circolo il cui seno è* $e^{-\frac{C}{m}}$, fa vedere che la curva incontra la linea dell' ascisse in punti E, F, E', F' ec. tali, che $l \operatorname{sen} \frac{x}{m} = -\frac{C}{m}$, ed x eguaglia m moltiplicata per tutti gli archi, i cui seni sono $= e^{-\frac{C}{m}}$. Ora il numero di questi archi è infinito; poichè se il primo è a, quelli che avranno lo stesso seno saranno a, $c - a$, $2c + a$, $3c - a$, $4c + a$, $5c - a$, ec. (710): quindi le distanze a cui la curva incontrerà la linea dell' ascisse saranno espresse per ma, $m(c - a)$, $m(2c + a)$, $m(3c - a)$ ec. Presa dunque AE $= ma$, AF $= mc - ma$, AE' $= 2mc + ma$, AF' $= 3mc - ma$ ec. si avranno i valori positivi di x. Si troveranno parimente i suoi valori negativi, cioè le ascisse prese verso la sinistra di AS, e si vedrà inoltre che gli intervalli EF, E'F' ec. sono eguali.

Fatto ora $\frac{dy}{dx} = \cot \frac{x}{m} = o$ per avere il massimo, sarà (701. 693) $\operatorname{sen} \frac{x}{m} = 1$, e i valori che soddisfanno nel senso positivo a quest'equazione, preso $a = 90° = \frac{1}{2}c$ nella serie a, $c - a$, $2c + a$ ec. sono . . . .

$\frac{x}{m} = \frac{1}{2}c$, $\frac{x}{m} = \frac{5}{2}c$, $\frac{x}{m} = \frac{9}{2}c$, $\frac{x}{m} = \frac{13}{2}c$, ec. FIG. 220.

e poichè in questo caso $sen \frac{x}{m} = 1$ e $l\, sen \frac{x}{m} = 0$, si ha $y = C$; onde ai punti più elevati C, C' ec. le ordinate son eguali fra loro ed alla costante.

Se nell'equazione $y = C + l\, sen^n \frac{x}{m}$ si faccia $sen^n \frac{x}{m} = 0$, sarà $y = C + l0 = C - \infty$ (361) $= -\infty$, ovvero $-y = \infty$ e però a tutti gli archi o ascisse x che danno $sen^n \frac{x}{m} = 0$, corrisponde un'ordinata negativa $-y$ che è infinita o asintoto della curva: ora quest'archi sono $x = 0$, $x = \pm cm$, $x = \pm 2cm$ ec. in infinito; dunque la curva ha un numero infinito d'asintoti perpendicolari all'asse. Il primo passa per l'origine dell'ascisse ove $n = 0$ ed è AS, il secondo passa per D alla distanza $AD = cm$, il terzo ad una distanza $AD' = 2AD = 2cm$ ec. Lo stesso è nel senso negativo.

Prima di passare ad altro proporremo alcuni Problemi sopra i due Calcoli Differenziale ed Integrale.

1141. I. Elevare un polinomio a qualunque potenza m, ovvero supposto $(f + gx + hx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{ec.})^m = F + Gx + Hx^2 + Kx^3 + Lx^4 + \text{ec.}$, determinare i coefficienti F, G, H, K, L ec. *Ris.* $F = f^m$, $G = \frac{mgF}{f}$, $H = \frac{2mhF + (m-1)gG}{2f}$,

$K = \frac{3mkF + (2m-1)hG + (m-2)gH}{3f}$, ...

$L = \frac{4mlF + (3m-1)kG + (2m-2)hH + (m-3)gK}{4f}$ ec., ove la legge è manifestissima.

1142. II. Data una Curva di nota tangente e presa in ogni sua ordinata una media proporzionale tra l'ordinata stessa e la corrispondente ascissa, condurre la tangente alla nuova Curva che passa per l'estremità delle medie proporzionali. *Ris.* Se x, y sieno le coordinate della curva data e z l'ordinata della nuova curva, la sua suttangente sarà $\frac{2z^2dx}{xdy + ydx}$, che essendo la data curva una parabola o un circolo del raggio a, diviene $\frac{4x}{3}$ o $\frac{4ax - 2x^2}{3a - 2x}$.

1143. III. Trovare il punto di flesso contrario nella curva dell'equazione $y = \frac{ax}{\sqrt{(rr - x^2)}}$. *Ris.* Il punto cercato corrisponde all'ordinata che ha per ascissa $x = \frac{1}{4}r$.

1144. IV. Qual'è la linea retta che con due date forma

li triangolo massimo? *Ris.* L'ipotenusa; cioè il triangolo massimo è il rettangolo.

1145. V. Qual è il massimo dei triangoli iscrittibili in un dato circolo e sopra una corda data? *Ris.* L'isoscele.

1146. VI. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz che abbia il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = z = \sqrt{ab}$.

1147. VII. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz, tre de' cui lati abbiano il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$, $z = \sqrt{2ab}$.

1148. VIII. Qual è il minimo dei quadrati iscrittibili in un dato quadrato? *Ris.* Se a sia il lato del dato, quello del minimo si troverà $\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$.

1149. IX. Qual è il massimo in superficie convessa o in solidità di tutti i cilindri iscrittibili in una data sfera o in un dato cono? *Ris.* Se $2r$ sia il diametro della sfera o della base del cono, quello della base del cilindro massimo in superficie sarà $r\sqrt{2}$, in solidità sarà $\frac{4}{3}r$.

1150. X Qual deve essere il rapporto tra il diametro della base e l'altezza d'una Misura cilindrica di data capacità affinchè la sua superficie interiore sia un minimo? *Ris.* Il rapporto dee essere di $2:1$, come si trovò sopra (1146).

1151. XI. Determinare il valor dei rotti 1°. $\frac{b(a-x)^2}{(a-x)^2}$ quando $x = a$; 2°. $\frac{1 - \text{sen}\, x + \cos x}{\text{sen}\, x + \cos x - 1}$ quando $x = 90°$; . . . 3°. $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ quando $x = 1$. *Ris.* I valori cercati si troveranno b, 1, -2.

1152. XII. Integrare $\frac{zdz}{z^3 - c^3}$. *Ris.* $\int \frac{zdz}{z^3 - c^3} = \frac{l(z-c)}{3c} - \frac{l(c^2 + cz + z^2)}{6c} + \frac{1}{c\sqrt{3}} \times \text{arc.tang} \frac{2z + c}{c\sqrt{3}} + C$.

1153. XIII. Integrare $yxdx$ posto $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$. *Ris.* $\int yxdx = a\int ydx - \frac{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}{3}$.

1154. XIV. Integrare $\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$. *Ris.* $\int \frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - x^2)}} = \sqrt{(ax - x^2)} + \text{arc.sen v.}\, x$ in un circolo del raggio $\frac{1}{2}a$.

1155. XV. Integrar $\frac{d\varphi}{(1 - b\cos\varphi)^2}$ supposto $b < 1$. *Ris.* . . . $\int \frac{d\varphi}{(1 - b\cos\varphi)^2} = \frac{b\,\text{sen}\,\varphi}{(1-b^2)(1-b\cos\varphi)} + \frac{2}{(1-b^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc.tang}$ . . . $\frac{(1+b)\,\text{sen}\,\varphi}{(1+\cos\varphi)\sqrt{(1-b^2)}} + C$.

1156. XVI. Integrar le formule $x^n dx\, sen\, x$, $x^n dx \cos x$. *Ris.* 1°. $\int x^n dx\, sen\, x = -x^n \cos x + nx^{n-1} sen\, x + n(n-1)x^{n-2} \times \cos x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} sen\, x - n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \cos x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.; 2°. $\int x^n dx \cos x = x^n sen\, x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)x^{n-2} sen\, x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} \cos x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.: preso alternativamente in ambedue i casi $sen\, x$ e $\cos x$ fino al termine ove si trova x^{n-n} col quale è compita l'integrazione.

1157. XVII. Quadrar la curva dell'equazione $y^m = a + x$.

Ris. $\int y dx = \frac{m[(a+x)^{\frac{m+1}{m}} - a^{\frac{m+1}{m}}]}{m+1}$.

1158. XVIII. Quadrare e rettificar la curva trascendente dell'equazione $dx = \pm \frac{dy}{y}\sqrt{(a^2 - y^2)}$. *Ris.* Lo spazio asintotico ed infinitamente lungo compreso dalla curva e dal suo asintoto eguaglia il quadrante d'un circolo del raggio a: un suo arco qualunque eguaglia la corrispondente ascissa d'una logaritmica che cominci dal vertice della curva ed abbia a per suttangente.

1159. XIX. Rettificar la curva dell'equazione $dy = \ldots\ldots \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$. *Ris.* $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(2ax + x^2)}$.

1160. XX. Misurar l'intero solido prodotto dalla rivoluzion della cissoide intorno al diametro del suo circolo genitore. *Ris.* Il solido è infinito.

1161. XXI. Misurar la superficie del solido generato dalla rivoluzione intorno all'asintoto dello spazio asintotico ed infinitamente lungo del n°. 1158. *Ris.* La superficie eguaglia il circolo del raggio $a\sqrt{2}$.

1162. XXII. Misurar la solidità e la superficie convessa dell'unghia cilindrica formata dal taglio obliquo d'un cilindro retto in modo che la sezione passi per il centro della base. *Ris.* Se sia r il raggio della base del cilindro, a l'altezza dell'unghia, se ne troverà la solidità $= \frac{2}{3}ar^2$, e la superficie $= 2ar$.

1163. XXIII. Trovar la curva la cui tangente è costante ed $= a$. *Ris.* L'equazione della curva cercata sarà $dx = \pm \frac{dy}{y}\sqrt{(a^2 - y^2)}$.

1164. XXIV. Trovar la curva la cui suttangente è $\ldots\ldots \frac{x^4}{2x^3 + ay^2 + y^2 x}$. *Ris.* L'equazione è $y^2 = \frac{x^4}{2C - 2ax - x^2}$.

1165. XXV. Trovar la curva la cui sunnormale è ..... $\frac{-y^4}{xy^2+bx^3}$. *Ris.* L'equazione è $y^4 = C^4\left(b + \frac{2y^2}{x^2}\right)$.

1166. XXVI. Trovar la curva la cui area è $\frac{x^3}{3a}$. *Ris.* La curva è una parabola.

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONI A DIFFERENZE FINITE.

1167. Supposta $\delta x = 1$ (990), sia da integrarsi l'equazione lineare del prim'ordine $y' - py - X = 0$, ove $y' = y + \delta y$, e p, X posson esser funzioni di x. Fatto come sopra (1134) $y = rz$, onde $\delta y = r\delta z + z\delta r + \delta r\delta z$, l'equazione si cangierà in $rz(p-1) - r\delta z - z\delta r - \delta r\delta z + X = 0$; e se sia al solito (1134) $rz(p-1) - z\delta r = 0$ ovvero I. $pr = r + \delta r$, verrà $r\delta z + \delta r\delta z = X$, ovvero II. $\delta z = \frac{X}{pr}$. La I. si integra riducendola a $lp = l(r + \delta r) - lr = \delta(lr)$ (994), onde $lr = \sigma lp$ ed $r = e^{\sigma lp}$: perciò dalla II, si ha $\delta z = \frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, $z\left(=\frac{y}{r}\right) = \sigma\frac{X}{pe^{\sigma lp}}$, ed $y = \ldots$ $e^{\sigma lp}\left(\sigma\frac{X}{pe^{\sigma lp}} + C\right)$.

1168. Poichè la somma σ di tutti i valori di lp dipende da x di cui p è funzione (1167), ed $x = \delta(x-1+x-2+x-3$ ec.) (987), si avrà σlp col cangiar successivamente x in $x-1, x-2, x-3 \ldots 3, 2, 1$, e col prender la somma dei logaritmi di queste quantità o il logaritmo del loro prodotto (351) che chiamo $l\pi p$. Quindi $r = e^{\sigma lp} = e^{l\pi p} = \pi p$ (1015), e chiamando p' il termine che viene immediatamente dopo p nella serie ec. $'p, p, p'$ ec., sarà $r + \delta r (= pr) = \pi p'$, e perciò $\delta z\left(=\frac{X}{pr}\right) = \frac{X}{\pi p'}$, $z = \sigma\frac{X}{\pi p'}$ ed $y = \pi p\left(\sigma\frac{X}{\pi p'} + C\right)$. Così data $y + (x+1)\delta y + a(2x+1) = 0$, sarà $-\frac{1}{p-1} = x+1$, $p - 1 = -\frac{1}{x+1}$, $p = \frac{x}{x+1}$, $\pi p = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-3}{x-2}\ldots 3.2.1 = \frac{1}{x}$, $p' = \frac{x+1}{x+2}$, $\pi p' = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}\ldots 3.2.1 = \frac{1}{x+1}$, $\frac{X}{p-1} = a(2x+1)$, $X = -\frac{a(2x+1)}{x+1}$, ed $y = \frac{1}{x}(C - a\sigma(2x+1)) =$ (990) $\frac{C}{x} - ax$. Supposta costante $p = f$, saranno $\pi f, \pi f'$ dei

prodotti f^n, f^{n+1} di f moltiplicata per se stessa tante volte n, $n+1$ quanti sono i termini che precedono y, y' nella serie ec. ${}^{(n)}y \ldots {}''y, {}'y, y, y'$ ec., ed in tal caso si avrà $y = f^n \left(C + \sigma \frac{X}{f^{n+1}} \right)$; e se sia costante anche $X = g$, il rimanente integrale $\sigma \frac{1}{f^{n+1}}$ esprimerà la somma $\frac{f^n - 1}{f^n (f-1)}$ (338) della progression geometrica $\frac{1}{f^n}$, $\frac{1}{f^{n-1}} \ldots \frac{1}{f}$, cioè la somma di tutti i valori che si hanno da $\frac{1}{f^{n+1}}$ cangiando successivamente n in $n-1$, $n-2 \ldots 3, 2, 1$; si avrà dunque allora $y = Cf^n + \frac{g(f^n - 1)}{f - 1}$.

Può sciogliersi con questo metodo il bel Problema già proposto di sopra (476. XXIV.). Se come ivi, sia c la sorte impiegata al frutto semplice di m per 1, t gli anni in cui vuol consumarsi la sorte e il frutto, ed x la somma costante che dee spendersi annualmente, supporrò che nell' anno n^{simo} la sorte sia ridotta ad y, onde tra sorte e frutti si abbia $y(1+m)$; e giacchè in quest' anno si spende x, la sorte nel seguente anno $(n+1)^{simo}$ sarà $y' = (m+1)y - x$, equazione da cui si ha $p = f = m+1$, $X = g = -x$, ed $y = C(m+1)^n - \frac{x[(m+1)^n - 1]}{m}$: ma quando gli anni sono $n = 1$ si ha la sorte $y = c^m$; dunque $c = C(m+1) - x$, $C = \frac{c+x}{m+1}$ ed $y = \frac{x}{m} + \left(c - \frac{x}{m}\right)(m+1)^{n-1}$. Or tutto vuol consumarsi negli anni $n = t$, e perciò nell' anno $n = t+1$ dee aversi $y = 0$; dunque $0 = \frac{x}{m} + \left(c - \frac{x}{m}\right)(m+1)^t$ e la somma cercata $x = \frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t - 1}$.

1169. Sia anche l' equazion lineare del second' ordine $y + a\delta y + b\delta^2 y = X$ in cui a, b son costanti e $\delta x = 1$. Secondo il metodo dei coefficienti indeterminati (1135) pongo $mp - m\delta y = 0$ e sommate le due equazioni, viene I. $y + (a+m)p - m\delta y + b\delta p = X$. Supposto al solito (1135) $y + (a+m)p = \frac{1}{m} \sigma (m\delta y - b\delta p) = y - \frac{bp}{m}$, abbiamo $a + m = \frac{-b}{m}$ con che si determinano i valori m', m'' di m (1135); e fatto II. $y + (a+m)p = u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $\delta u = \delta y - \frac{b\delta p}{m}$ ovvero $m\delta u = m\delta y - b\delta p$, la I. equazione diverrà $u - m\delta u = X$ che ci dà (1168) $u = \sigma (1 +$

$\frac{1}{m})(C - \sigma \frac{X}{m.\pi(1+\frac{1}{m'})})$; onde fatta la costante $1 + \frac{1}{m} =$ h e però $m = \frac{1}{h-1}$, si avrà $u = h^n(C - (h-1)\sigma \frac{X}{h^{n+1}})$ (1168); e se anche X fosse costante, verrebbe $u = h^n(C - (h-1)X\sigma \frac{1}{h^{n+1}}) = Ch^n - X(h^n - 1)$ (1168). Posti pertanto in queste i due valori m', m'' di m o h', h'' di h, si avranno i due u', u'' di u ed $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$ (1135). Vale il metodo stesso per l'equazioni simili del terzo, quarto, r simo ordine (1137. 1139).

1170. Bisogna eccettuarne al solito (1139) l'equazione $qy + a\delta y + b\delta^2 y \ldots\ldots + \omega)^r y = X$ quando si ha $q = 0$, o resta solamente $\omega\delta^r y = X$: ma in quest' ultimo caso ha luogo il metodo delle ripetute integrazioni (1129). Supponghiamo per brevità $\omega = 1$, $r = 4$, $X = 0$, e dovrà integrarsi $\delta^4 y = 0$ ovvero $\frac{\delta^4 y}{\delta x^3} = 0$: dunque 1°. $\frac{\sigma\delta^4 y}{\delta x^3} = \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = C$, o $\frac{\delta^3 y}{\delta x^2} = C\delta x$; 2°. $\frac{\sigma\delta^3 y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = C\delta x\sigma 1 + C' = (990)\ Cx + C'$, o $\frac{\delta^2 y}{\delta x} = \delta x C x + C'\delta x$; 3°. $\frac{\sigma\delta^2 y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} = C\delta x\sigma x + C'\delta x\sigma 1 + C'' = (990)\ C(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + C'x + C''$, o $\delta y = C\delta x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + \delta x C'x + C''\delta x$; 4°. $\sigma\delta y = y = C\delta x\sigma\frac{1}{2}x^2 - C\delta x\sigma\frac{1}{2}x + C'\delta x\sigma x + C''\delta x\sigma 1 + C''' = (990)\ C(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x) - C\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x) + C'(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + C''x + C''' = \frac{1}{6}Cx^3 + \frac{1}{2}(C' - C)x^2 + (\frac{1}{3}C - \frac{1}{2}C' + C'')x + C'''$.

1171. Si applica questa dottrina a varie specie di *Serie Ricorrenti*: noi ci limiteremo alle più semplici. Già si sa (324) che l'equazione $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2$ ec. si riduce a

$$0 = \begin{cases} a^2 A + a^2 Bx + a^2 Cx^2 + a^2 Dx^3 + a^2 Ex^4 + \text{ ec.} \\ -a^2 + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + 2aDx^4 + \text{ ec.}, \\ \quad - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - \text{ ec.} \end{cases}$$

e i due primi coefficienti A, B si determinano dall' equazioni $a^2 A - a^2 = 0$, $a^2 Bx + 2aAx = 0$: riguardo agli altri C, D, E ec., si ha $C = \frac{-2B}{a} + \frac{A}{a^2}$, $D = \frac{-2C}{a} + \frac{B}{a^2}$, $E = \frac{-2D}{a} + \frac{C}{a^2}$ ec., d' onde la serie ricorrente $1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{12x^3}{a^3} + \frac{29x^4}{a^4}$ ec. $=$

$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$ *rotto genitore* della serie. Ora le costanti quantità $\frac{-2}{a}$, $+\frac{1}{a^2}$ dal cui prodotto nei respettivi coefficienti B, A o C, B o D, C che precedono, nasce ciascuno dei coefficienti C, D, E ec. che seguono, si chiama *scala di relazione*: ed è facile osservare 1°. che *la scala di relazione è formata dai coefficienti che ha la variabile nel denominatore ordinato del rotto genitore presi con segni contrarj e divisi per i termini costanti*: 2°. che *per avere il coefficiente di un nuovo termine della serie bisogna moltiplicar l'ultimo già trovato per il primo termine della scala di relazione, il penultimo per il secondo ec., e far la somma di tutto*. Così il rotto $\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$ si cangia nella serie $1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+6z^7+7z^8$ ec., la cui scala di relazione sarà 1, +0, +0, +1, −1, e supposti trovati i primi cinque coefficienti 1, 2, 3, 3, 4, per avere il sesto, il settimo ec., si farà $1.4+0.3+0.3+1.2-1.1=5$ coefficiente del sesto termine, $1.5+0.4+0.3+1.3-1.2=6$, coefficiente del settimo ec.

1172. Data dunque una serie ricorrente $f+gx+hx^2+kx^3$ ec. con la scala di relazione $p, +q, +r$ ec., la sua somma all'infinito sarà un rotto genitore $\frac{s+tx+ux^2 \text{ ec.}}{1-px-qx^2-rx^3 \text{ ec.}}$ di cui la scala di relazione già somministra il denominatore (1171). Per avere i coefficienti s, t, u ec. del numeratore, si divida $s+tx+ux^2$ ec. per $1-px-qx^2$ ec. e paragonando il quoziente $s+(t+ps)x+(u+qs+pt+p^2s)x^2$ ec. con la serie data, si avrà $s=f$, $t=g-pf$, $u=h-pg-qf$, ec.; dunque la somma cercata sarà . . . .

$$\frac{f+(g-pf)x+(h-pg-qf)x^2 \text{ ec.}}{1-px-qx^2-rx^3 \text{ ec.}}$$. Così se la serie sia $1-\frac{2x}{a}+\frac{5x^2}{a^2}$ ec., e la scala di relazione $\frac{-2}{a}$, $+\frac{1}{a^2}$, avremo $f=1$, $g=\frac{-2}{a}$, $h=\frac{5}{a^2}$ ec., $p=-\frac{2}{a}$, $q=\frac{1}{a^2}$, e la sua somma all'infinito sarà $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$ (1171). Che se si voglia la somma fino ad un dato termine τx^n, i termini dopo di esso all'infinito saranno $\upsilon x^{n+1}+\varphi x^{n+2}+\chi x^{n+3}$ ec. $=x^{n+1}\times(\upsilon+\varphi x+\chi x^2 \text{ ec.})=\frac{x^{n+1}[\upsilon+(\varphi-p\upsilon)x+(\chi-p\varphi-q\upsilon)x^2 \text{ ec.}]}{1-px-qx^2-rx^3 \text{ ec.}}$, e però la somma della serie si troverà . . . .

$$\frac{f+(g-pf)x+(h-pg-qf)x^2 \text{ ec.} - \upsilon x^{n+1} - (\varphi - p\upsilon)x^{n+2} - (\chi - p\varphi - q\upsilon)x^{n+3} \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}:$$

onde nel caso d' una scala bimembre $p, + q$ quando $h = pg + qf$ e $\chi = p\varphi + q\upsilon$ (1171), la somma fino al termine τx^n sarà

$$\frac{f + (g - pf)x - \upsilon x^{n+1} - (\varphi - p\upsilon)x^{n+2}}{1 - px - qx^2} = \ldots\ldots$$

$$\frac{f + (g - pf)x - (p\tau + q\sigma)x^{n+1} - q\tau x^{n+2}}{1 - px - qx^2}$$ perchè $\upsilon = p\tau + q\sigma$, $\varphi = p\upsilon + q\tau$ (1171). Così volendo la somma della serie di sopra $1 - \frac{2x}{a}$ ec. fino al quinto termine $\frac{29x^4}{a^4}$, ella si troverà $\frac{a^6 + 70ax^5 - 29x^6}{a^6 + 2a^5x - a^4x^2}$.

1173. Ma questa formula della somma involvendo i termini particolari f, g, h ec. υ, φ, χ ec., non può darci il termine generale (326. 327); onde alla ricerca di esso applicheremo l' equazioni a differenze finite. Supposta $q, + r$ la scala di relazione, yx^n il termine generale, y il general coefficiente della serie ec. $'yx^{n-1}, yx^n, y'x^{n+1}, y''x^{n+2}$ ec. ed n il numero dei termini la cui differenza costante è $\delta n = 1$, si avrà $y'' = qy' + ry$ (1171): ma $y' = y + \delta y, y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$ (986); dunque $y + \frac{(2-q)\delta y + \delta^2 y}{1 - q - r} = 0$, che paragonata con l' equazione di sopra (1169) ci dà $a = \frac{2 - q}{1 - q - r}$, $b = \frac{1}{1 - q - r}$, $X = 0$, $m' = \frac{q - 2 + \sqrt{(q^2 + 4r)}}{2(1 - q - r)}$, $m'' = \frac{q - 2 - \sqrt{(q^2 + 4r)}}{2(1 - q - r)}$, $h' = 1 + \frac{1}{m'}$, $h'' = 1 + \frac{1}{m''}$, $u' = Ch'^n$, $u'' = C'h''^n$ ed $yx^n = \ldots\ldots$ $\frac{[(a + m')u'' - (a + m'')u']x^n}{m' - m''}$ (1169). Così data la serie $1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4$ ec. $= 1x^0 + 0x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4$ ec., la cui scala di relazione $1, + 2$, sarà $q = 1, r = 2, a = -\frac{1}{2}$, $m' = -\frac{1}{2}, m'' = 1, h' = -1, h'' = 2, u' = C(-1)^n, u'' = C'2^n, y = \frac{1}{3}C'2^{n+1} + \frac{1}{3}C(-1)^n$; e poichè fatto $n = 0$, si ha dalla serie $y = 1$, e fatto $n = 1$ si ha $y = 0$, le due equazioni $1 = \frac{2}{3}C' + \frac{1}{3}C, 0 = \frac{4}{3}C' - \frac{1}{3}C$ danno $C' = \frac{1}{2}$, $C = 2$ ed $yx^n = \frac{1}{3}(2^n \pm 2)x^n$, preso il segno $+$, o il segno $-$ secondo che n è pari o impari.

1174. Talvolta per esser $2 - q = 0$ ed $1 - q - r = 0$ si trova $m' = m'' = \frac{0}{0}$: allora l' equazione $y + \frac{(2-q)\delta y + \delta^2 y}{1 - q - r} = 0$

si riduce a $\delta^2 y = 0$ ove la differenziale costante è $\delta n = 1$ (1173); dunque $y = Cn + C'$ (1170). Così data la serie $1 + 6x + 11x^2 + 16x^3$ ec. la cui scala di relazione $q, + r = 2, - 1$ e perciò $q - 2 = 0$, ed $1 - q - r = 0$, sarà $y = Cn + C'$; e poichè quando $n = 0$ si ha $y = 1$, e quando $n = 1$ si ha $y = 6$, le due equazioni $1 = C'$, $6 = C + C'$ o $5 = C$ danno $yx^n = (5n + 1)x^n$. Può anche avvenire che si trovi $m' = m'' = -\frac{1}{2}a$ (1136): allora fatta al solito $m'' = m' + \omega = \frac{2\omega - a}{2}$, $h' = 1 + \frac{1}{m'} = \frac{a-2}{a} = \frac{g}{a}$, $h'' = 1 + \frac{1}{m''} = \frac{a-2-2\omega}{a-2\omega} = \frac{g-2\omega}{a-2\omega}$, sarà $u'' = C\left(\frac{g-2\omega}{a-2\omega}\right)^n$, cioè sviluppando il binomio con trascurare ω^2, ω^3 ec., $u'' = \frac{C(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{-2\omega(a^n - 2na^{n-1}\omega)}$, e però (1169) $y = \frac{Ca(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{-2\omega(a^n - 2na^{n-1}\omega)} - \frac{(a+2\omega)Cg^n}{-2\omega a^n} = \left[Cn - \frac{Cg}{a}(n-1)\right]\frac{g^{n-1}}{a^{n-1}}$; onde fatto $\frac{Cg}{a} = C'$ e restituito il valor di $g = a - 2$, si ha $y = [Cn - C'(n-1)]\left[\frac{a-2}{a}\right]^{n-1}$: così data la serie $1 + 7x + 24x^2 + 68x^3$ ec. la cui scala di relazione $q, + r = 4, - 4$, sarà (1173) $a = -2$ ed $y = [Cn - C'(n-1)]2^{n-1}$; e poichè quando $n = 0$ si ha $y = 1$, e quando $n = 1$ si ha $y = 7$, sarà $C' = 2$, $C = 7$ ed $yx^n = [7n - 2(n-1)]2^{n-1}x^n$. Gli immaginarj non fanno quì difficoltà, come può vedersi nella serie $1 + 2x - x^2 - 12x^3 - 19x^4$ ec. la cui scala è $2, - 5$, e il cui termine generale (fatto $2\sqrt{-1} = g$) si trova $yx^n = \frac{[(1+g)^{n+1} - (1-g)^{n+1}]x^n}{2g}$ senza immaginarj.

1175. Anche nell'Analisi del *Caso* e della *Probabilità* si adoperano le differenze finite. Chiamando noi fortuito o *casuale* un successo allorchè ignoriamo le cagioni che posson farlo avvenire, siamo costretti a riguardar come *egualmente probabile* l'esistenza o inesistenza di due successi casuali se l'uno o l'altro dovendo necessariamente accadere, non vi sia maggior ragione per cui l'uno debba accader piuttosto che l'altro. Si riguarda pure come egualmente probabile l'esistenza di tre avvenimenti che a vicenda escludendosi mentre un di essi dee certamente aver luogo, non ci offrono intanto ragione alcuna onde lo debba aver questo piuttosto che quello: ma quì l'inesistenza di ciascuno è *più probabile* della sua esistenza nel rapporto di 2 a 1, perchè di tre casi possibili l'inesistenza ne ha due in favore e uno solo contrario. Quindi le probabilità Π, Π' dell'esistenza o inesistenza d'un avvenimento son tanto maggiori o minori, quanto direttamente è più grande o più piccolo il numero dei casi F, C a lei favorevoli o contrarj, e quanto reciprocamente è più pic-

colo o più grande quello dei casi possibili P; onde sarà $\Pi = \mathrm{F} \times \frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}}$ e $\Pi' = \mathrm{C} \times \frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}}$; e poichè i casi favorevoli F insieme coi contrarj C formano i casi possibili P, cioè $\mathrm{F} + \mathrm{C} = \mathrm{P}$, si avrà $\Pi + \Pi' = 1$ ed 1 rappresenterà la *certezza*, essendo chiaro che un avvenimento dee di certo accadere o non accadere. Trovata la probabilità si determina la *speranza* Σ degli interessati all'esistenza dell'avvenimento, e questa speranza evidentemente risulta e dalla somma sperata S e dalla probabilità Π d'ottenerla, cioè $\Sigma = \Pi \mathrm{S} = \frac{\mathrm{FS}}{\mathrm{P}}$. Ecco ora un Problema sulle probabilità per far vedere come si applichino a somiglianti ricerche le Differenze finite.

Presa a caso una quantità di monete da un mucchio n di esse, determinar la probabilità che il numero preso sia pari o caffo, supponendo che possa prendersi una sola moneta, o più, o tutte. Chiamando y i casi in cui il numero preso può esser pari, e z quelli in cui può esser caffo, una nuova moneta aggiunta al mucchio e combinata coi precedenti casi in caffo, gli renderà tutti pari, onde allora la somma dei pari sarà I. $y' = y + z$; ma combinata coi precedenti casi pari, gli cangierà tutti in caffo oltre l'unità aggiunta che è caffo, onde la somma dei casi in caffo sarà II. $z' = z + y + 1$. La I. dà $y + \delta y = y + z$ cioè $\delta y = z$ e però $\delta^2 y = \delta z$: dalla II. si ha $z + \delta z = z + y + 1$ cioè $\delta z\ (= \delta^2 y) = y + 1$ e però $y - \delta^2 y = -1$, equazione da cui abbiamo (1169) $a = 0$, $b = -1$, $\mathrm{X} = -1$, $m' = 1$, $m'' = -1$, $h' = 2$, $h'' = 0$, $u' = (\mathrm{C} + 1) 2^n - 1$, $u'' = -1$ ed $y = (\mathrm{C} + 1) 2^{n-1} - 1$; ma quando $n = 1$ non si hanno casi pari e però $y = 0$; dunque $\mathrm{C} = 0$, $y = 2^{n-1} - 1$, $y' = 2^n - 1$, $z\ (= y' - y) = 2^{n-1}$. Ora i casi y pari coi casi z in caffo danno i casi possibili $\mathrm{P} = y + z = 2^n - 1$; dunque la probabilità per i casi pari è $\Pi = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}} = \frac{y}{y + z} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$, e quella per gli impari $\Pi' = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}} = \frac{z}{y + z} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$; e poichè $2^{n-1} > 2^{n-1} - 1$, la scommessa per il numero caffo sarà sempre più vantaggiosa che per il pari.

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONI A DIFFERENZE PARZIALI.

1176. Supposta z una funzione di più variabili x, y ec., diconsi *a differenze parziali del prim' ordine* quelle equazioni in cui z, x, y ec. vanno unite con $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ ec. (1104); *del*

secondo allorchè oltre z, x, y ec., $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ ec. trovansi anche $\frac{dd^x z}{dx^2} = \frac{d^{2x} z}{dx^2}$, $\frac{dd^y z}{dy^2} = \frac{d^{2y} z}{dy^2}$ ec., $\frac{d^x d^y z}{dxdy} = \frac{d^y d^x z}{dydx}$ ec. (1104), differenze parziali seconde, che nascono e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per x, $\frac{d^y z}{dy}$ per y ec. essendo costanti dx, dy ec., e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per y o $\frac{d^y z}{dy}$ per x ec.: così si dica degli altri ordini successivi. Tali equazioni qualche volta s' incontrano nell' alta Geometria, e assai spesso nella Fisica Matematica più sublime: ma come il Calcolo Infinitesimale suppone perfetta l' Algebra, così quello dell' equazioni a differenze parziali suppone perfetto l' Infinitesimale. Per esempio, quì si assume che possa sempre trovarsi il fattore m che rende esatta la differenziale qualunque $Pdx + Qdy$ (1130), e si riguarda come integrata un' equazione a differenze parziali quando è ridotta all' integrazion d' un' equazione a differenze ordinarie: se il fattore non possa aversi o se non si possa integrare l' equazione differenziale, il difetto sarà dei Calcoli inferiori, non di quello di cui trattiamo. Eccone alcune più elementari nozioni.

1177. Se z sia funzione di x, y, si avrà $dz = Pdx + Qdy = d^x z + d^y z$ e però $\frac{d^x z}{dx} = P$, $\frac{d^y z}{dy} = Q$ (1105). Dal che si raccoglie 1°. che l' espressioni $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ son quantità variabili ma finite, denotanti il coefficiente P o Q di dx o di dy quando si differenzia z o per x o per y: 2°. che se nella differenziazione di z si prenda x o y costante, si ha $dz = d^y z = Qdy$ o $dz = d^x z = Pdx$, e l' integrale di queste equazioni sarà $z = \int^y Qdy + C$ o $z = \int^x Pdx + C'$ ove potrà essere $C = \varphi(x)$, $C' = \varphi(y)$ (1105.2°.) se d' altra parte non si sappia che tali funzioni non hanno luogo: 3°. che avendosi $\int Pdx = Px - \int xdP$, e $\int Qdy = Qy - \int ydQ$ (1083), sarà $z = \int Pdx + \int Qdy =$

$Px + Qy - \int(xdP + ydQ) = \frac{xd^x z}{dx} + \frac{yd^y z}{dy} - \int\left(x.d(\frac{d^x z}{dx}) + y.d(\frac{d^y z}{dy})\right)$.

1178. Dico ora che se z sia una funzione di x, y onde $dz = d^x z + d^y z$, ella sarà anche una funzione di x, u (supposta u funzione di x, y) cosicchè denotando con $d'^x z$ la differenza di z per la nuova x, si avrà $dz = d'^x z + d^u z$. Infatti se $z = ax + by = nax + by - (n-1)ax = \frac{(ax + by)}{x^n} x^n =$ ec., potrà farsi $u = nax + by$, $u = by - (n-1)ax$, $u = \frac{ax + by}{x^n}$, $u = (ax + by)x^u$, $u =$ ec., ed u sarà sempre funzione di x, y, onde z lo sarà anche di x, u. Perciò u è indeterminata e suscettibile d'infinite forme differenti.

1179. Anzi può u soggettarsi a soddisfare ad una condizione richiesta, per esempio, che sia tale onde abbiasi $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$, intendendo per p una data funzione di x, y; poichè preso dall'equazione proposta e sostituito in $du = d^x u + d^y u$ il valor di $d^x u$, si avrà $du = d^y u - \frac{pdxd^y u}{dy} = \frac{d^y u}{dy}(dy - pdx)$: dunque supposto m il fattore che rende esatta la differenziale $dy - pdx$ (1130) onde si abbia $mdy - mpdx = dt$, verrà $du = \frac{d^y u}{dy} \cdot \frac{dt}{m}$; dunque u è funzione di t, ed essendo u indeterminata (1178), può farsi $u = t$ onde $\frac{d^y u}{dy} = m$, valori che danno $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$. Così se si voglia u di modo che sia $\frac{d^x u}{dx} - \frac{yd^y u}{xdy} = 0$, avremo $p = -\frac{y}{x}$ e $dy - pdx = dy + \frac{ydx}{x}$, differenziale esatta se si moltiplichi per $m = x = \frac{d^y u}{dy}$; dunque $xy = t = u$ e $\frac{d^x u}{dx} - \ldots \frac{yd^y u}{xdy} = y - \frac{yx}{x} = 0$.

1180. Considerando dunque z come funzione di x, y e di x, u, si avrà $dz = \overset{x}{d} z + \overset{y}{d} z = d'^{x} z + \overset{u}{d} z$ (1178): ma $du = \overset{x}{d} u + \overset{y}{d} u$ ovvero $du \overset{u}{d} z = (\overset{x}{d} u + \overset{y}{d} u) \overset{u}{d} z$, e però $\overset{u}{d} z = \frac{\overset{u}{d} z}{du} (\overset{x}{d} u + \overset{y}{d} u)$; dunque $dz = d'^{x} z + \frac{\overset{u}{d} z}{du} . \overset{x}{d} u + \frac{\overset{u}{d} z}{du} \times \overset{y}{d} u = \overset{x}{d} z + \overset{y}{d} z$, e quindi (1177) $\overset{x}{d} z = d'^{x} z + \frac{\overset{u}{d} z}{du} . \overset{x}{d} u$ e $\overset{y}{d} z = \frac{\overset{u}{d} z}{du} . \overset{y}{d} u$.

1181. Ciò premesso, poco vi vuole a integrar l'equazioni lineari del prim'ordine a tre variabili, che tutte comprendonsi nella generale $\frac{\overset{x}{d} z}{dx} + \frac{p \overset{y}{d} z}{dy} + q = 0$, essendo p una data funzione di x, y, mentre q può esserlo di x, y, z. Poichè sostituiti in essa i valori di $\overset{x}{d} z$, $\overset{y}{d} z$ (1180), si ha $\frac{d'^{x} z}{dx} + \frac{\overset{u}{d} z}{du} \left(\frac{\overset{x}{d} u}{dx} + \frac{p \overset{y}{d} u}{dy} \right) + q = 0$; e fatto $\frac{\overset{x}{d} u}{dx} + \frac{p \overset{y}{d} u}{dy} = 0$ per determinar u (1179), viene $\frac{d'^{x} z}{dx} + q = 0$. Posto dunque in q il valor di y ricavato da quello di u, onde q si cangi in q', avremo $d'^{x} z + q' dx = 0$: ma z è quì funzione di x, u e manca $\overset{u}{d} z$; dunque u è costante (1177.2°); dunque $d'^{x} z = dz = - q' dx$, dunque $z = - \int^{x} q' dx + \varphi(u)$ (1177.2°.).

Esempio. Debba integrarsi $\frac{\overset{x}{d} z}{dx} + \frac{y \overset{y}{d} z}{x dy} + \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$: avremo $p = \frac{y}{x}$, $q = \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)}$ e $\frac{\overset{x}{d} u}{dx} + \frac{p \overset{y}{d} u}{dy} = 0 = \frac{\overset{x}{d} u}{dx} + \frac{y \overset{y}{d} u}{x dy}$. Da questa equazione si ha (1179) $du = \frac{\overset{y}{d} u}{dy} \left(dy - \frac{y dx}{x} \right)$, e poichè il fattore $m = \frac{1}{x}$ rende esatta la differenziale $dy - \frac{y dx}{x}$, verrà $\frac{y}{x} = t = u$, $y = ux$,

$q' = \frac{z}{ux} - ax\sqrt{(1+u^2)}$, e dovrà integrarsi $dz = -\frac{zdx}{ux} + axdx\sqrt{(1+u^2)}$ ovvero $uxdz + zdx = aux^2dx\sqrt{(1+u^2)}$ fatta u costante; integrando pertanto (1139. XI.) e restituito quindi il valor di $u = \frac{y}{x}$, si ottiene $z = \frac{ayx\sqrt{(x^2+y^2)}}{2y+x} + x^{-\frac{x}{y}}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1182. Ho supposta p una data funzione di x, y: ma si deve aggiungere che può essere anche funzione di x, y, z, senza che si alteri l'operazione. Per dimostrarlo basta osservare che da un'equazione $z - axz = by$ può aversi o $z = \frac{by}{1-ax}$, valore assoluto di z, o $z = axz + by$, valore che determina z quando essa nel secondo membro si riguardi come una costante. In tal caso u che era funzione di x, y (1177), lo sarà anche di x, y, z, e perciò nell'equazione $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$ (1179) potrà esserlo anche p, ma z vi si dovrà prender per costante, e quindi tutte l'operazioni dovranno farsi nella consueta maniera. Così per l'equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{xzd^y z}{y^2 dy} = 0$ si ha $p = \frac{xz}{y^2}$, $q = 0$, $du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{zx\,dx}{y^2}\right)$, il fattore $m = y^2$, onde $u = \frac{y^3}{3} - \frac{zx^2}{2}$ e $z = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}zx^2\right) = \varphi(2y^3 - 3zx^2)$.

Nè faccia stupore se quì si sopprime il denominator 6; poichè le costanti soppresse, o sieno coefficienti o esponenti o denominatori comuni, ricompariscono in seguito allorchè si determina la forma delle funzioni φ secondo certe condizioni assegnate. Per esempio se si voglia la forma della funzione φ tale che fatto $y = mx$ nell' equazione $z = \varphi(y^2 + x^2)$, si abbia $z = \frac{x^2}{a}$, è chiaro che sostituiti i valori di z ed y, l' equazione diverrà $\frac{x^2}{a} = \varphi(x^2 + m^2x^2)$; onde posto $u = x^2 + m^2x^2$ e però $x^2 = \frac{u}{m^2+1}$, si avrà $\varphi(u) = \frac{u}{a(m^2+1)} = \frac{x^2+y^2}{a(m^2+1)} = \varphi(x^2+y^2) = z$; e si vede che in φ era stato soppresso il denominator costante $a(m^2+1)$. In tal guisa (per avvisarne quì di passaggio) si determinano le funzioni arbitrarie dell'equazioni a differenze parziali finchè almeno le condizioni assegnate per la loro determinazione possono esprimersi analiticamente.

1183. Del resto, si integrano con questo metodo anche certe equazioni per cui si suol ricorrere alla formula accennata di sopra (1177. 3°.). Tale è l'equazione $\frac{d^x z}{dx} \cdot \frac{d^y z}{dy} = 1$, che ridotta a $\frac{d^x z}{dx} - \frac{dy}{d^y z} = 0$, ci dà $p = 0$, $q = -\frac{dy}{d^y z}$, $du = \frac{d^y u}{dy} . dy$, onde $u = y$, $q' = -\frac{du}{d^u z}$, e quindi $dz = \frac{du}{d^u z} dx$ cioè $z = \frac{xdy}{d^y z} + \varphi(y) = \frac{xd^x z}{dx} + \varphi(y)$: dunque differenziando z per y, si avrà $d^y z \left(= \frac{dx}{d^x z} dy\right) = dy\, \varphi'(y)$; ed integrando, $\frac{ydx}{d^x z} = \varphi(y) +$ una *Costante* che può esser funzione di $\frac{d^x z}{dx}$; dunque $\varphi(y) = \frac{ydx}{d^x z} - f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$ e perciò $z = \frac{xdy}{d^y z} + \frac{ydx}{d^x z} + f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$: cosicchè se sia $\frac{d^x z}{dx} = \frac{dy}{d^y z} = r$ onde $\frac{dx}{d^x z} = \frac{d^y z}{dy} = \frac{1}{r}$, verrà $z = rx + \frac{y}{r} - f(r)$, precisamente come si avrebbe dalla citata formula.

1184. Per assicurarsi poi che l'operazione è ben fatta, si torna dall'integrale all'equazion differenziale 1°. differenziando tutta l'integrale per x, dal che in luogo di φ si ha φ' (1016): 2°. differenziandola nuovamente per y dal che pure si ha φ' in luogo di φ: 3°. eliminando φ' per mezzo delle due equazioni. Si integri al solito (1181) l'equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{r^2 y d^y z}{s^2 x dy} - \frac{r^2 z}{x} = 0$, ove fatta $r^2 = m$, $s^2 = n$, sarà $p = \frac{my}{nx}$, $q = -\frac{mz}{x}$, $du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{mydx}{nx}\right)$, il fattore $= \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, e

perciò $\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}} = u$, $dz = \frac{mzdx}{x}$ e $z = x^m \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$ ovvero $\frac{z}{x^m} = \varphi\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)$: per ritornare alla data, differenzio questa per x e viene

$$\frac{x^m d^x z - mzx^{m-1}dx}{x^{2m}} = \frac{-my\sqrt[n]{x^{m-n}}\,dx\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)}{n\sqrt[n]{x^{2m}}}$$

; differenzio per y ed ho $\frac{d^y z}{x^m} = \frac{dy\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}$; elimino φ', riduco, e trovo la data.

1185. Sia ora da integrarsi l' equazion lineare dell' ordine n^{simo} e della forma $\frac{x^n d^{nx} z}{dx^n} + \frac{nx^{n-1} y d^{(n-1)x} d^y z}{dx^{n-1} dy} + ec. \ldots + \frac{y^n d^{ny} z}{dy^n} = Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + Y'\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + ec. \ldots + X\Psi\left(\frac{y}{x}\right) + X'\Psi'\left(\frac{y}{x}\right) + ec.$: e per render più facile l' intelligenza del metodo, riduciamola ad un caso particolare e sia I[a]. $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3} + \frac{3x^2 y d^{2x} d^y z}{dx^2 dy} + \frac{3xy^2 d^x d^{2y} z}{dx dy^2} + \frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3} = 0$. Pongo $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2} + \frac{2xy d^x d^y z}{dxdy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = V$ (V è funzione di x, y) e differenziando prima per x e poi per y, viene II[a]. $\frac{2x d^{2x} z}{dx} + \frac{x^2 d^{3x} z}{dx^2} + \frac{2y d^x d^y z}{dy} + \frac{2xy d^{2x} d^y z}{dxdy} + \frac{y^2 d^{2y} d^x z}{dy^2} = d^x V$, III[a]. $\frac{x^2 d^{2x} d^y z}{dx^2} + \frac{2x d^x d^y z}{dx} + \frac{2xy d^x d^{2y} z}{dxdy} + \frac{2y d^{2y} z}{dy} + \frac{y^2 d^{3y} z}{dy^2} = d^y V$. Moltiplico la II. per $\frac{x}{dx}$, la III. per $\frac{y}{dy}$ e sostituiti nella data i valori di $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3}$ e di $\frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3}$, ella dopo la riduzio-

ne diventa $\frac{d^{x}V}{dx}+\frac{y d^{y}V}{x dy}-\frac{2V}{x}=0$, che integrata (1181) dà $V=x^{2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, onde l'integrale della I. sarà IV^a. $\frac{x^{2}d^{2x}z}{dx^{2}}+\frac{2xy\,d^{x}d^{y}z}{dxdy}+\frac{y^{2}d^{2y}z}{dy^{2}}=x^{2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Questa nuovamente si integra ponendo $\frac{x d^{x}z}{dx}+\frac{y d^{y}z}{dy}=V$, differenziando prima per x e poi per y, moltiplicando le due differenziali respettivamente per $\frac{x}{dx}$, $\frac{y}{dy}$, e sostituendo nella data i valori di $\frac{x^{2}d^{2x}z}{dx^{2}}$ e di $\frac{y^{2}d^{2y}z}{dy^{2}}$, che fatta la riduzione, la trasformano in $\frac{d^{x}V}{dx}+\frac{y d^{y}V}{x dy}-\frac{V}{x}-x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=0$, d'onde si ha $V=x^{2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ e per integrale della IV., $\frac{x d^{x}z}{dx}+\frac{y d^{y}z}{dy}=x^{2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$. E finalmente per l'integrale di quest'ultima, che sarà l'integrale finita della I., si trova $z=\frac{x^{2}}{2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\Psi\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)$. Così si trattano tutte l'altre della medesima forma e d'un ordine qualunque, e perciò anche l'equazione proposta in principio, giacchè il secondo membro $Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ec. non altera punto il giro delle prescritte operazioni.

1186. E' però tanto simmetrica questa equazione, che il metodo d'integrarla si stimerà forse d'un uso assai raro. Eppure con esso integreremo più facilmente di quel che altri abbia fatto finora, l'equazioni *omogenee* di un ordine n^{simo}, quelle cioè che hanno tutti i termini con differenziali al medesimo grado e con coefficienti costanti. Sia, per esempio, l'equazione I^a. $\frac{d^{2x}z}{dx^{2}}+\frac{b\,d^{x}d^{y}z}{dxdy}+\frac{c\,d^{2y}z}{dy^{2}}=R$ ove R può esser funzione di x, y. Pongo II^a. $\frac{d^{x}z}{dx}+\frac{m\,d^{y}z}{dy}=V$ (m è un coef-

ficiente indeterminato) e differenziando al solito per x e per y, moltiplicando le differenziali respettivamente per $\frac{1}{dx}$, $\frac{c}{mdy}$, e sostituendo nella I. i valori di $\frac{d^{2x}z}{dx^2}$ e di $\frac{cd^{2y}z}{dy^2}$, ella se si faccia III[a]. $b - m - \frac{c}{m} = 0$, diverrebbe IV[a]. $\frac{d^xV}{dx} + \frac{cd^yV}{mdy} = R$. Ma quì bisogna osservare che la risoluzion della III. dando due valori m', m'' di m, la II. si scioglie nelle due $\frac{d^xz}{dx} + \frac{m'd^yz}{dy} = V$, $\frac{d^xz}{dx} + \frac{m''d^yz}{dy} = V$, d'onde viene $\frac{d^xz}{dx} = V$, ovvero $\frac{d^yz}{dy} = 0$; dunque V non è ora funzione di x, y ma di x solamente; dunque la IV. dee ridursi a $\frac{dV}{dx} = R$(1177.2°), da cui abbiamo $V = \int^x Rdx$ senza la solita $\varphi(y)$ che si è trovata $= 0$; dunque l'integrale della I. sarà $\frac{d^xz}{dx} + \frac{md^yz}{dy} = \int^x Rdx$, che nuovamente integrata (1181) da $z = \int dx \int^x Rdx + \varphi(y - mx)$ ricordandosi di mettere in R il valor di $y = u + mx$ (1181) prima di integrar $\int^x Rdx$: ma dai due valori m', m'' di m si ha $z = \int dx \int^x Rdx + \varphi(y - m'x)$ e $z = \int dx \int^x Rdx + f(y - m''x)$; dunque sommando verrà finalmente $z = \int dx \int^x Rdx + \frac{1}{2}\varphi(y - m'x) + \frac{1}{2}f(y - m''x) = \int dx \int^x Rdx + \varphi(y - m'x) + f(y - m''x)$, la cui differenziale restituisce in fatti la data. Così presso a poco si integreranno l'equazioni omogenee degli altri ordini.

1187. Al caso di $m' = m'' = \frac{1}{2}b$ soddisfà anche più direttamente il metodo stesso (1185); poichè avendosi allora $c = \frac{b^2}{4}$, la proposta equazione (1186) diventa $\frac{d^{2x}z}{dx} + \frac{bd^xd^yz}{dxdy} + \frac{b^2d^{2y}z}{4dy^2} = R$, i cui coefficienti costanti formano un quadrato

perfetto. Si ponga dunque $\frac{d^x z}{dx} + \frac{bd^y z}{2dy} = V$: differenziando per x e per y, moltiplicando respettivamente le due differenziali per $\frac{1}{dx}$, $\frac{b}{2dy}$ e sostituendo al solito, si troverà $\frac{d^x V}{dx} + \frac{bd^y V}{2dy} = R$ da cui si ottiene (1181) $V = \int^x R dx + \varphi(y - \frac{bx}{2})$; dunque l'integrale della data sarà $\frac{d^x z}{dx} + \frac{bd^y z}{2dy} = \int^x R dx + \varphi(y - \frac{1}{2}bx)$, dalla cui integrazione viene $z = \int dx \int^x R dx + x\varphi(2y - bx) + f(2y - bx)$.

1188. La natura del nostro Libro non ci permette di estenderci più oltre sull'equazioni a differenze parziali. Solo aggiungeremo che questa teoria si applica sempre utilmente e spesso per necessità a tutti i problemi geometrici ove si considerano le superficie curve. Si voglia, per esempio, l'equazion generale di tutte le superficie di rivoluzione intorno all'asse AA, e si supponga $dz = d^x z + d^y z = Pdx + Qdy$ (1177) la differenziale di questa equazione. Fatta HF $= z$, FP $= y$, PC $= x$, PM $= u =$ PH, si ha (867) $u^2 = z^2 + y^2$, o differenziando, $dz = \frac{udu}{z} - \frac{ydy}{z} = Pdx + Qdy$; e poichè Qdy deve eguagliarsi a $-\frac{ydy}{z}$ (1105), sarà $Pdx = \frac{udu}{z}$; dunque u è funzione di x e può farsi $u = nx$. Si avrà pertanto $Q = \frac{-y}{z}$, $P = \frac{n^2 x}{z}$, $\frac{P}{n^2 x} + \frac{Q}{y} = 0 = \frac{d^x z}{dx} + \frac{n^2 x d^y z}{ydy}$, ed integrando (1181) con prendere il fattore $m = 2y$, verrà $z = \varphi(y^2 - n^2 x^2)$, equazione cercata. **214.**

1189. Poichè però non possono aver quì luogo le notizie occorrenti per dedurre da questa generale equazione l'equazioni particolari di superficie determinate, rammenteremo per ora al nostro intento, che se nell'equazione $u^2 = z^2 + y^2$ si sostituisca il valor di u cavato dall'equazion della curva genitrice AEAE, si avrà subito l'equazione alla superficie generata (867): così se AEAE sia un'ellisse, avremo $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ e l'equazione alla superficie dell'ellissoide sarà $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2}$. Ma se la semiellisse AEA cresca o scemi uniformemente

nel primo quarto di rivoluzione, e all' incontro scemi o cresca del pari nel secondo ec., cosicchè la superficie generata
314. abbia il semiasse $CK = c$ oltre i due $AC = a$, $CE = b$, è ben vero che non sarà più $PM = PH$ perchè la sezione MLP normale al piano AEAE, non sarà più un circolo ma un' ellisse: per altro essendo MLP simile alla sezione EKC segata pur normalmente per ECE, avremo $EC(b) : CK(c) :: MP(u) : PL = \frac{cu}{b}$; onde $HF^2 = z^2 = \frac{c^2u^2}{b^2u^2}(u^2 - y^2)$; riducendo dunque e sostituendo il valor di $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, l' equazione a questa superficie sarà $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

1190. Abbiasi dunque un' infinità di tali superficie ellittico-sferoidali AEAKL simili tra loro e concentriche, e si cerchi l'equazione di quella che tutte le tagli ad angoli retti. Poichè per una delle date superficie abbiamo $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ (1189) e tutte son simili, supposta $a : b : c :: r : s : 1$ la ragione costante dei loro semiassi, e però $a = rc$, $b = sc$, la generale equazione di tutte diverrà $1 = \frac{x^2}{r^2c^2} + \frac{y^2}{s^2c^2} + \frac{z^2}{c^2}$, ove r, s saran costanti in ciascuna sferoide e il solo c varierà dall' una all' altra: perciò differenziando, la comune equazione delle superficie da tagliarsi sarà $dz = -\frac{xdx}{r^2z} - \frac{ydy}{s^2z} = X'dx + Y'dy$ fatto $X' = -\frac{x}{r^2z}$, $Y' = -\frac{y}{s^2z}$. Ora se ad un punto qualunque R della superficie AEAKL si alzi la normale $RT = f$ che incontri il piano AEA nel punto T a cui rispondono (condotta OST parallela a CA) le coordinate $CI = OT = a'$, $IT = GS = b'$, e da R si conduca sul piano AEA la perpendicolare $RV = z$, da V sopra CA la perpendicolare $VG = y$, e congiunta RS, pongasi $CG = OS = x$, sarà $TS = IG = a' - x$, $VS = b' - y$, e il triangolo RVS rettangolo in V darà $RS^2 = z^2 + (b' - y)^2$: ma appartenendo RS al piano RVS perpendicolare ad OT, anche il triangolo RST è rettangolo in S; dunque $RT = f = \sqrt{[z^2 + (b' - y)^2 + (a' - x)^2]}$, che per la natura delle normali alle superficie dovrà esser la massima o la minima di tutte le linee che da T posson condursi alla superficie AEAKL. Differenziando pertanto, verrà $zdz - (b' - y)dy - (a' - x)dx = 0$ (1043), o sostituendo il valor di dz trovato di sopra, $(X'z - (a' - x))dx + (Y'z - (b' - y))dy = 0$, e quindi (1046) $X'z - a' + x = 0$, $Y'z - b' + y = 0$, $a' = X'z + x$, $b' = Y'z + y$ ed $f = z\sqrt{(1 + X'^2 + Y'^2)}$. Ma giacchè nei punti ove le superficie si tagliano, le coordinate della cercata e della data debbono esser le stesse, supposta $dz = d^x z + d^y z = P'dx +$

$Q'dy$ l'equazion differenziale della cercata, $k = RZ$ la sua normale in R, $g = CY$ ed $h = YZ$ le coordinate che determinano il punto Z in cui ella incontra il piano AEA, si troverà col raziocinio medesimo $g = P'z + x$, $h = Q'z + y$ e $k = z\sqrt{(1 + P'^2 + Q'^2)}$, onde se sia $TZ = t$ l'intervallo tra le due normali f, k, si avrà $t = \sqrt{(ZX^2 + XT^2)} = \sqrt{[(a' - g)^2 + (b' - h)^2]} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$. Or le due superficie debbon tagliarsi ad angoli retti e però è retto l'angolo ZRT; dunque $t = \sqrt{(f^2 + k^2)} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$, cioè $1 + P'X' + Q'Y' = 0$, o mettendo i valori di X', Y', P', Q' dati di sopra $\frac{\overset{x}{d}z}{dx} + \frac{r^2 y \overset{y}{d}z}{s^2 x dy} - \frac{r^2 z}{x} = 0$ e però (1184) $z = x^m \varphi \left(\frac{y}{\sqrt[n]{x^m}} \right)$, equazione cercata, che diviene $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ se le date sferoidi si cangino in sfere, ove essendo i semiassi $a = b = c$, si ha $r^2 = s^2 = 1 = m = n$.

FIG. 214.

CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

1191. Oltre quel genere di *Massimi* e *Minimi* di cui già parlammo di sopra (1042), un altro ve ne è più elevato che ha data origine al *Calcolo delle Variazioni*. In quello si cerca il punto di una data linea ove una certa quantità variabile diventa massima o minima, cosicchè cangiandosi gli altri punti o elementi della curva, la quantità massima o minima non soffre alcun cangiamento; in questo si vuole la linea stessa in cui abbia luogo la proprietà del massimo o del minimo, di modo che la quantità massima o minima dipende da tutta la curva, e cangiatone qualunque elemento essa pure si cangia. Così il problema di determinar nel circolo la massima ordinata, riguarda il primo genere: ma quello di trovar tra tutte l'isoperimetre la curva che con l'ordinata e con l'ascissa racchiude la massima area, appartiene al secondo. E' vero che ambedue i generi dipendono dagli stessi principj e che alcuni problemi spettanti al secondo posson trattarsi anche coi metodi del primo, ma tali soluzioni son per lo più assai complicate e poco naturali.

1192. Sia BD una curva che abbia per asse la retta $AE = a$, e fatta l'ascissa $AP = x$, si conducano l'ordinate perpendicolari AB, PM, ED. Pongo $PM = z$ intendendo per z una quantità composta comunque di x, di y, di $p = \frac{dy}{dx}$, di $q = \frac{dp}{dx}$, di $r = \frac{dq}{dx}$ ec. e anche degli integrali $\int \varphi dx$, $\int \varphi' dx$ ec., supposte φ, φ' ec. delle nuove funzioni di x, y, p, q ec. Se si prenda $PT = dx$ e si conduca l'ordinata TV, sarà $PMVT = z dx$ (1115), $ABMP = \int z dx$ che va a zero se $x = 0$, e diviene ABDE se $x = a$. Chia-

221.

FIG. 221. misi H l'area ABDE; dunque se ciascuna ordinata $PM = z$ varij in più o in meno di una quantità infinitesima Mf e sia β la *caratteristica della variazione* come d lo è della differenziazione, avremo $Mf = \beta z$ *variazione* di z, $MfiV = \beta z dx$ *variazione* di $zdx = PMVT$, $BcfM = \int \beta z dx$ somma degli elementi $MfiV$ e *variazione* dell'area ABMP, e finalmente $BCKD = \beta H$ *variazione* dell'area $ABDE = H$. Quindi se quest' area H debba essere un massimo o un minimo, bisognerà che l'area $BckD$ si annulli e sarà $\beta H = \beta.ABDE = \beta \int zdx = 0$ (1043), presa l'integrale da $x = 0$ fino ad $x = a$. Da questa formula $\beta \int zdx = 0$ si avrà la relazione tra x ed y o l'equazione alla curva che ha la proprietà cercata del massimo o del minimo; cosicchè qualunque altra equazione tra x ed y darà un valor più piccolo per H quando H è un massimo, o un valor più grande quando H è un minimo.

1193. Il Calcolo delle Variazioni dee dunque insegnarci a trovar la variazione di H o il valor di βH, che andando poi a zero determina il cercato massimo o minimo. Or H può riguardarsi o nello *stato primitivo* quando z o PM non ha ricevuta in H alcuna variazione, o nello *stato variato* quando z vi ha avuta una variazione Mf, e si è cangiata in $PM \pm Mf = z \pm \beta z$. Ma siccome nello stato primitivo di H se x divenga $x \pm dx$ anche y diviene $y \pm dy$ (985); così nello stato variato mentre H passa in $H \pm \beta H$ ed x ($= AP$) resta lo stesso in ambedue gli stati, z ed y diventano $z \pm \beta z$, $y \pm \beta y$: onde x ordinariamente non influisce nella variazione βH, che solo dipende dalla variazione βz, e si ha $\beta x = 0$, e perciò anche $\beta dx = 0$: pur varierà anchè x in certi casi, di cui non parleremo per ora.

1194. Come z diventa $z + \beta z$, così z' ($= QN$) si cangia in $z' + \beta z' = Qg$, z'' ($= RS$) in $z'' + \beta z'' = Rh$ ec.: ma $z' = z + dz$ (985) onde $\beta z' = \beta z + \beta dz$; dunque $\beta dz = \beta z' - \beta z = d\beta z$ (985), cioè *la variazione d'una differenziale eguaglia la differenziale della sua variazione*. Perciò scrivendo dz in vece di z, sarà $\beta d^2 z = d\beta dz = d^2 \beta z$, e di nuovo scrivendo quì dz in luogo di z, verrà $\beta d^3 z = d\beta d^2 z = d^2 \beta dz = d^3 \beta z$; e in generale $\beta d^n z = d^n \beta z$, o preso $m < n$, $\beta d^n z = d^m \beta d^{n-m} z$.

1195. Del pari supposto $u = \int zdx$ sarà variando, $\beta u = \beta \int zdx$, e differenziando, $du = zdx$; dunque βdu ($= d\beta u$) $= \beta z dx$, e integrando, $\beta u = \int \beta z dx = \beta \int zdx$, cioè *la variazione dell'integrale* $\int zdx$ *eguaglia l'integrale della variazione di* zdx. Perciò scrivendo $\int z$ in vece di z, avremo $\int \beta \int zdx = \beta \int\int zdx = \int\int \beta z dx$ ec.

1196. Si raccoglie da tutto ciò 1°. che la differenziale dz è diversissima dalla variazione βz; poichè dz è l'aumento che riceve z quando l'ordinata passa ad un altro punto della stessa curva, laddove βz è l'aumento di z quando l'ordinata passa ad un altro punto d'un'altra curva: 2°. che ciascun valore di y nel suo passaggio allo stato variato essendo bensì infinitesimo

(1192) ma indipendente da ogni legge o condizione (altrimenti la curva CK non rappresenterebbe tutte quelle in cui può variarsi BD, ma sarebbe determinata) le variazioni βy non hanno alcun rapporto coi valori stessi di y, e sono anzi tanto arbitrarie e indefinite che posson poi determinarsi a piacere e anche mandarsi tutte a zero, fuorchè quella o quelle che corrispondono alla linea infinitesima $PT = dx$ dalla quale risulta la formula $\int z dx$: 3°. che z cangiandosi in $z \pm dz$ nella differenziazione, ed in $z \pm \beta z$ nella variazione, ad onta della diversità tra le differenze e le variazioni, *si ha la variazione di z come se ne ha la differenza* purchè in luogo di dz, dy si scriva βz, βy e si faccia x costante: così la variazione di $z = ax^2 y + bxy^2$ sarà $\beta z = ax^2 \beta y + 2bxy\beta y$ ec.

1197. Dunque $\beta(zdx) = dx\beta z + z\beta dx$: ma $\beta dx = 0$ (1193); dunque $\beta(zdx) = dx\beta z$ e $\int \beta(zdx) = \int dx\beta z = \beta \int (zdx)$ (1195).

1198. Parimente poichè $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ ec. (1192), presa dx costante, si avrà $dp = \frac{d^2y}{dx}$, $dq = \frac{d^2p}{dx} = \frac{d^3y}{dx^2}$, $dr = \frac{d^2q}{dx} = \frac{d^4y}{dx^3}$ ec. ed integrando, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ ec., dunque $\beta p = \frac{\beta dy}{dx}$ (1193) $= \frac{d\beta y}{dx}$ (1194), $\beta q = \frac{\beta d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\beta y}{dx^2}$, $\beta r = \frac{\beta d^3y}{dx^3} = \frac{d^3\beta y}{dx^3}$ ec., differenziali che facilmente si determinano osservando che $d\beta y = \beta y' - \beta y$, $d\beta y' = \beta y'' - \beta y'$, $d\beta y'' = \beta y''' - \beta y''$ ec. (1194), e perciò $d^2\beta y = d\beta y' - d\beta y = \beta y'' - \beta y' - \beta y' + \beta y = \beta y'' - 2\beta y' + \beta y$, $d^3\beta y = \beta y''' - 2d\beta y' + d\beta y = \beta y''' - \beta y'' - 2\beta y'' + 2\beta y' + \beta y' - \beta y = \beta y''' - 3\beta y'' + 3\beta y' - \beta y$ ec.: e se le variazioni di y', y'', y''' ec. sieno zero (1196), verrà $d\beta y = -\beta y$, $d^2\beta y = \beta y$, $d^3\beta y = -\beta y$ ec.

1199. Volendo pertanto la variazione di z funzione di x, y, p, q, r ec. (1192), siccome la sua differenza sarebbe $dz = Pdx + Qdy + Rdp + Sdq$ ec. supposte P, Q, R, S ec. funzioni di x, y, p, q ec.; così la sua variazione, fatto $\beta x = 0$ (1193), sarà $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (1193).

1200. Similmente per aver la variazione di $\int z dx$, essendo sempre z una funzione di x, y, p, q ec., si farà dx costante e avremo 1°. $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (1199): 2°. $\beta(zdx) = dx\beta z$ (1197) $= Qdx\beta y + Rd\beta y + \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec.: 3°. $\int \beta z dx = \beta \int z dx$ (1195) $= \int Q dx \beta y + \int R d\beta y +$

FIG. 221. $\int \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec.: ma $\int Rd\beta y = R\beta y - \int dR\beta y$ (1083) $= R\beta y - \ldots$; $\int \frac{dx dR\beta y}{dx}$, e parimente $\int \frac{Sd^2\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \int \frac{dSd\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2S\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2Sdx\beta y}{dx^2}$ ec.; dunque $\beta \int zdx = \int dx\beta y\,(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{ec.}) + \beta y(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}) + \frac{d\beta y}{dx}(S - \text{ec.}) + \text{ec.}$ Fermiamoci a considerar questa formula.

1201. Osservo primieramente che ella è composta di una parte integrale $\int dx\beta y\,(Q - \frac{dR}{dx}$ ec.), e di una parte assoluta $\beta y\,(R -$ ec.) $+ d\beta y\,(S -$ ec.) $+$ ec. Or nel caso del massimo o del minimo per aver tutta la variazione βH bisogna porre $x = a$ nell' intera formula (1192), ciò che di fatto eseguito nella sua parte assoluta, βy vi indicherà la variazione dell' ultima ordinata ED corrispondente all' ascissa AE $= a$: ma tal variazione essendo arbitraria si può supporre zero (1196): dunque nel caso di $x = a$ tutta la parte assoluta i cui termini son moltiplicati per $\beta y = 0$, per $d\beta y = 0$ ec., si annichilerà e avremo la sola parte integrale $\int dx\beta y\,(Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = \beta H = 0$ (1192).

1202. In secondo luogo osservo che quest' ultima espressione è la somma di tutte le variazioni che nascono dalla variazione di ciascun valore di y: ma tutte posson mandarsi a zero fuorchè una (1196); dunque la somma di esse si ridurrà a quella sola, e si avrà $dx\beta y'(Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}) = 0$, ovvero $Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.} = 0$. Dal che si raccoglie 1°. che se z è solamente funzione di x, y, nella formula di sopra $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. (1200) sarà $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ec. onde $R\beta p = 0$, $S\beta q = 0$ ec., e l'equazione ora trovata diverrà $Q = 0$: 2°. che se z sia funzione di x, y, p, nella formula stessa (1200) sarà $q = 0$, $r = 0$ ec. onde $S\beta q = 0$ ec., e la nostra equazione diverrà $Q - \frac{dR}{dx} = 0$: e così di seguito.

1203. Ma riguardo a questa seconda conseguenza convien riflettere che l' equazioni $Q - \frac{dR}{dx} = 0$, $Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} = 0$ ec. son sempre differenziali o del primo o di altri ordini più elevati: onde la loro integrazione esigendo l' aggiunta di una o più costanti arbitrarie, l' equazione tra x ed y che somministra il massimo o il minimo, non sarà interamente determinata, e si avranno tanti massimi o minimi quanti sono i valori che posson darsi a ciascuna costante. Si fissa dunque in tali casi il vero massimo o minimo colla parte assoluta $\beta y\,(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.})$

$+ d\beta y$ (S — ec) + ec. = o (1201) che attesa la variazione arbitraria βy (1196), non può generalmente andare a zero se non vi vada ciascun suo termine, e sia perciò $\beta y \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}\right) = o$, $d\beta y\,(S - \text{ec.}) = o$ ec., ovvero $R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.} = o$, $S - \text{ec.} = o$ ec., sempre nella supposizione di $x = a$ (1201): ciò determina le costanti e quindi il massimo o minimo, come vedremo.

1204. Troviamo ora la variazione di $\int z dx$ quando z contiene non solo x, y, p, q ec. ma anche un' integrale $\int \varphi dx$ (1192). Sia $\int \varphi dx = \tau$ e avremo I. $\beta\tau = \beta\int\varphi dx = \int Q' dx \beta y + \int R' d\beta y + \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$ ec. (1200): di più essendo z funzione di τ, x, y, p, q ec., supposta V una funzione come z, verrà II. $\beta z = V\beta\tau + Q\beta y + \frac{R d\beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$ ec., che sostituendo il valor della I., diviene $\beta z = V\int Q' dx \beta y + V\int R' d\beta y + V\int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$ ec $+ Q\beta y + \frac{R d\beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$ ec. Ora $\int \beta z dx = \beta\int z dx$ (1195); dunque $\beta\int z dx = \int(V dx \int Q' dx \beta y) + \int(V dx \int R' d\beta y) + \int(V dx \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx})$ ec. $+ \int Q dx \beta y + \int R d\beta y + \int \frac{S d^2 \beta y}{dx}$ ec. Per liberar la formula dal segno integrale moltiplicato, pongo $V dx = dK$ onde $\int(V dx \int Q' dx \beta y) = \int(dK \int Q' dx \beta y) = K\int Q' dx \beta y - \int K Q' dx \beta y$, $\int(V dx \int R' d\beta y) = \int(dK \int R' d\beta y) = K\int R' d\beta y - \int K R' d\beta y$, $\int(V dx \int \frac{S d^2 \beta y}{dx}) = \int(dK \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}) = K\int \frac{S' d^2 \beta y}{dx} - \int \frac{K S' d^2 \beta y}{dx}$ ec.; dunque $\beta\int z dx = K\int dx \left(Q' \beta y + \frac{R' d\beta y}{dx} + \frac{S' d^2 \beta y}{dx^2} \text{ ec.}\right) + \int dx \left[(Q - KQ')\beta y + (R - KR')\frac{d\beta y}{dx} + (S - KS')\frac{d^2 \beta y}{dx^2} \text{ ec.}\right]$, ove posson farsi le riduzioni di sopra (1200).

1205. Quasi nel modo stesso potrebbe aversi la variazione di $\int z dx$ quando z contiene più integrali $\int \varphi dx$, $\int \varphi' dx$ ec., e generalmente quando è data da un' equazion differenziale di qualunque ordine; potrebbe anche indagarsi la variazione di $\int z dx$ e di $\int z$ quando x non fosse costante come lo abbiamo supposto di sopra, e fino introdursi in questo Calcolo le dif-

ferenze parziali che ne formano un nuovo ramo: ma tali ricerche ci devierebbero dalla presente nostra intenzione di terminar questo Libro con alcune più semplici e più elementari applicazioni dell' esposta dottrina.

Probl. I. Tra tutte le curve riferite ad una stessa ascissa determinar quella in cui $\int z dx = \int (gx - y^2) y dx$ è un massimo o un minimo. Si avrà $z dx = (gx - y^2) y dx$, $z = (gx - y^2) y$ e $\beta z = (gx - 3y^2) \beta y$ (1196) $= Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. (1200); dunque $Q = gx - 3y^2$, $R = 0$, $S = 0$ ec.: ma dee esser $Q = 0$ (1202.1°.); dunque $gx - 3y^2 = 0$ ovvero $y^2 = \frac{1}{3}gx$, equazione alla parabola. Sostituito il valor di $y = \sqrt{\frac{1}{3}gx}$ nella formula $\int (gx - y^2) y dx$, ella diviene $2\int (\frac{1}{3}gx)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{15}gx^2\sqrt{\frac{1}{3}gx}$ che si annulla quando $x = 0$, ed è un massimo o un minimo quando $x = a$. Per distinguere qual dei due abbia quì luogo, prendo in vece della parabola un'altra linea qualunque (1192), per esempio la linea retta coincidente con l'asse onde sia $y = 0$, e trovo che $y = 0$ riduce la data formula a zero mentre $y = \sqrt{\frac{1}{3}gx}$ la riduceva a $\frac{4}{15}gx^2\sqrt{\frac{1}{3}gx} > 0$; dunque si ha quì un massimo.

II. Trovar la curva in cui $\int z dx = \int (15g^2x^2 - 15g^3x + 5g^2y^2 - 3y^4) y dx$ è un massimo o un minimo. Dunque $\beta z = (g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4) 15\beta y = Q\beta y$, e $Q = 0 = g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4 =$ (208) $(y^2 - g^2 + gx)(gx - y^2)$, e perciò soddisfanno al quesito due parabole dell'equazioni I. $y^2 = g(g - x)$, II. $y^2 = gx$. Per sapere quale delle due dia il massimo, supporrò x infinitesima, il che riduce la I. ad $y = g$ (268), valore che posto nella formula data, la cangia in $\int 2g^5 dx$ (268), mentre sostituendovi $y = \sqrt{gx}$ preso dalla II., si ha $\int - 10g^3 x dx \sqrt{gx}$ (268); ma fatto, come sopra, $y = 0$, la formula va a zero e $\int 2g^5 dx > 0$, laddove $\int - 10g^3 x dx \sqrt{gx} < 0$; dunque la I. dà un massimo, la II. un minimo.

III. Qual' è la curva in cui $\int z dx = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{y}}$ è un massimo o un minimo? Poichè $\frac{dy}{dx} = p$, verrà $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + p^2)}$, onde $z = \sqrt{\frac{1 + p^2}{y}}$, $dz (= Pdx + Qdy + Rdp) = \frac{pdp}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{dy\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$ e $\beta z = \frac{p\beta p}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{\beta y\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}} = Q\beta y + R\beta p$; dunque $P = 0$, $Q = \frac{-\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$, $R = \frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}$; e poichè dee quì aversi $Q - \frac{dR}{dx} = 0$ (1202.2°.), sarà $Qpdx$ (=

$Qdy)=p\,dR$: ma essendo $P=0$, viene $dz=Qdy+Rdp=pdR+Rdp$; dunque integrando, $z\left(=\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\right)=pR+C=\frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}}+C$, e $C=\frac{1}{\sqrt{y(1+p^2)}}$. Pertanto se si faccia $C=\frac{1}{\sqrt{m}}$, avremo $m=y(1+p^2)$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, e $dy=dx\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, equazione ad una cicloide (1038) il cui circolo generatore ha per diametro m. La riduco a $dx=dy\sqrt{\frac{y}{m-y}}=\frac{ydy}{\sqrt{(my-y^2)}}$ ed integrandola ottengo $x=arc.\,sen\,v.\,y-\sqrt{(my-y^2)}+C$ (1154), con che abbiamo le due costanti arbitrarie m, C. Per determinarle faccio $R-\frac{dS}{dx}=0$ (1203), cioè $R\left(=\frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}\right)=0$ perchè quì $S=0$, e viene $p=0=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$ e perciò $y=m$; quindi l'equazione integrata, postovi $y=m$ ed $x=a$ (1203), diverrà $a=arc.\,sen\,v.\,m+C$; ma essendo m il diametro, $arc.\,sen\,v.\,m$ è evidentemente la semicirconferenza $m\pi$; dunque $C=a-m\pi$; di più se quando $x=0$ si vuole anche $y=0$, l'equazione integrata si cangierà in $0=a-m\pi$ e sarà $m=\frac{a}{\pi}$. Del resto, si ha quì un minimo; poichè la data formula, sostituito il valor di $p=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, diventa $\int dx\sqrt{\frac{m}{y}}$, da cui, facendo al solito $y=0$, viene un infinitamente grande.

IV. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella in cui l'area $\int ydx$ (1115) è un massimo o un minimo. Giacchè l'espressione della lunghezza d'un arco è (1119) $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ (III.) e questa per la natura degli isoperimetri non varia, avremo $\beta\int dx\sqrt{(1+p^2)}=0$: ma anche $\beta\int ydx=0$ (1192); dunque il problema si ridurrà a trovar la curva in cui $\int zdx=\int ydx+\int gdx\sqrt{(1+p^2)}$ è un massimo o un minimo, moltiplicata per g costante l'espression dell'arco, onde sieno omogenee le due integrali. Si avrà pertanto $z=y+g\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z=\beta y+\frac{gp\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q=1$, $R=\frac{gp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q-\frac{dR}{dx}=0$; e ripetuto il raziocinio del passato problema, verrà

$z (= y + g\surd(1+p^2)) = pR + C = \frac{gp^2}{\surd(1+p^2)} + C$, $(C - y)\surd(1+p^2) = g$, $p (= \frac{dy}{dx}) = \frac{\surd[g^2 - (C-y)^2]}{C-y}$, e $dx = \ldots$ $\frac{dy(C-y)}{\surd[g^2-(C-y)^2]}$; dunque integrando, $x = \surd[g^2 - (C - y)^2] + C'$, cioè $(C-y)^2 = g^2 - (x - C')^2$ equazione al circolo, in cui le costanti g, C, C' si determineranno come sopra (III) avvertendo di più che la lunghezza della curva può supporsi data: ed è chiaro che il radicale portando il doppio segno, e perciò potendo descriversi il circolo onde rivolga all' ascissa o la concavità o la convessità, avremo un massimo nel primo caso, un minimo nel secondo.

V. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella il cui solido di rivoluzione ha la massima o minima superficie $2\pi \int y\surd(dx^2 + dy^2)$ (1127). Trascurato 2π che è un numero costante, e fatta $\surd(dx^2 + dy^2) = dx\surd(1+p^2)$, dovrà essere, come nell'antecedente problema, $\int z dx = \int y dx\, \surd(1+p^2) + \int g dx \surd(1+p^2)$ un massimo o un minimo; dunque $z = (y + g)\surd(1+p^2)$, $\beta z = \beta y \surd(1+p^2) + \frac{(y+g)p\beta p}{\surd(1+p^2)}$, onde $Q = \surd(1+p^2)$, $R = \frac{(y+g)p}{\surd(1+p^2)}$, $Q - \frac{dR}{dx} = 0$, e fatto il solito raziocinio, $z (= (y+g)\surd(1+p^2)) = pR + C = \frac{(y+g)p^2}{\surd(1+p^2)} + C$, $C = \frac{y+g}{\surd(1+p^2)}$, $p (= \frac{dy}{dx}) = \frac{1}{C}\surd[(y+g)^2 - C^2]$, e $dx = \frac{C dy}{\surd[(y+g)^2 - C^2]}$, equazione alla curva volgarmente detta la *Catenaria* perchè una catena flessibilissima se sia sospesa per le sue estremità, si conforma in questa curva. E quì pure atteso il doppio segno che compete al radicale, si avrà un massimo quando la curva rivolga la concavità all'asse, ed un minimo quando gli volga la convessità.

IL FINE.

Fig. 1
Q
P
A
R
K
F
B
15
20
C
Fig. 2

C
F
L
D
E
O
H
N
R
D
46
C
B
50
Fig. 50.

Fig. 51
C
D
D B
H K
B
I D
C
N
M
D
Fig. 73.

Fig. 74
H
I
K
C
78
N
M
B
G
83
F
A
D
M
T
B
L
s
l
b
Fig. 98.

101

102

103

105

106

109

110

113

114

Fig. 221.